AdS/CFT 対応による Unruh 効果の記述

- Unruh effect in AdS/CFT correspondence -

物理学専攻　今井 天平
Teppei Imai

概要

本論文では、AdS/CFT 対応により高次元の重力理論を用いて Unruh 効果を記述する方法を考察する。Unruh 効果とは、静止している観測者にとってゼロ温度の真空中を、加速度 a で等加速度運動する観測者は有限温度 $T = \frac{a}{2\pi}$ を観測するという効果である [1]。Xiao は、本来場の量子論の枠組みで記述される Unruh 効果を 5 次元負曲率時空である AdS_5 時空中の string の古典力学の計算を用いて再現した [2]。この Xiao の計算は、場の量子論として $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills 理論を用いた場合に対応する。一方、$T = \frac{a}{2\pi}$ の結論は用いる場の量子論の詳細によらないはずである。本論文では、Xiao による重力理論側の解析を一般化した場合でも、$T = \frac{a}{2\pi}$ が極めて一般的に得られることを確認した。

AdS/CFT 対応を用いた Unruh 温度の計算

Xiao は、4 次元時空中を等加速度運動する quark を AdS/CFT 対応によって 5 次元時空中の string に置き換えることによって Unruh 温度を計算した [2]。

4 次元の $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills 理論の双対時空は $AdS_5 \times S^5$ であることが知られている [3, 4, 5]。また、quark の運動は、この AdS_5 時空中の string の運動に置き換えられる。ここで、AdS_5 時空の計量は

$$ds^2 = R^2 \left[\frac{du^2}{u^2} - u^2 dt^2 + u^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \right], \tag{1}$$

となっており、ここで R は AdS_5 時空の曲率半径である。また、string の運動を記述する Nambu-Goto 作用は

$$S = -T_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{-\mathrm{det} g_{ab}} \tag{2}$$

で表される。ここで (τ, σ) は string の world-sheet 上の座標、T_0 は string の張力、g_{ab} は誘導計量を表している。また、AdS_5 時空中の string の位置を AdS_5 中で、$X^\mu(\tau, \sigma)$ に対し static ゲージ $(\tau, \sigma) = (t, u)$ を採用し、古典的な string の運動方程式を解くことにより、string の配位は以下の式で与えられる。

$$X = \pm \sqrt{t^2 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{u^2}}. \tag{3}$$

ここで a は quark、antiquark の加速度の大きさであり、境界条件として与えられる。(3) から分かるように、string は $0 \leq \frac{1}{u} \leq \sqrt{t^2 + b^2}$ の範囲に存在している。さらに、後述するが、string 上には $u_{\mathrm{H}} = 1/b$ の位置に Killing horizon が存在している。

次に、AdS 時空の boundary 上の座標 (t, x) を Rindler 座標 (τ, ρ) に変換する。Rindler 座標では観測者も quark と同じ等加速度運動をすることで quark は静止しているように見える。これに対応する 5 次元での

座標変換は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{b^2 - r^2}\exp\left(\frac{\rho}{b}\right)\sinh\frac{\tau}{b}, \\
x &= \sqrt{b^2 - r^2}\exp\left(\frac{\rho}{b}\right)\cosh\frac{\tau}{b}, \\
u &= \frac{1}{r}\exp\left(-\frac{\rho}{b}\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ただし $b = 1/a$ である。r は変換後の 5 次元目の座標であるが、その範囲は $0 \leq r \leq b$ となる。また新しい座標において、string の配位 (3) は $\rho = 0$ と定常的となっており、座標変換によって、等加速度運動する観測者にとっての 5 次元の視点での静止系に移ったことが分かる。

さらにこの変換によって計量 (1) がどのように変換されるか計算すると、以下のようになる。

$$
ds^2 = \frac{R^2}{r^2}\left[\frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{b^2}} - \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)d\tau^2 + d\rho^2 + (dy^2 + dz^2)\exp\left(-\frac{2\rho}{b}\right)\right]. \tag{5}
$$

興味深いことに、(5) の計量は $r = b$ において horizon が存在している。そこでの Hawking 温度を計算すると、以下のようになる。

$$
T_{\mathrm{H}} = -\frac{f'(b)}{4\pi} = \frac{1}{2\pi b} = \frac{a}{2\pi}. \tag{6}
$$

ここで $f(r) = 1 - r^2/b^2$ である。この温度は Unruh 温度 $T = \frac{a}{2\pi}$ を正確に与えている。Unruh 温度は、真空中で等加速度運動をする粒子が感じる温度であり、曲がった時空上の場の量子論を用いることで導かれるが、ここでは曲がった時空上の古典重力から同じ結果を得ることができた。

一般時空による Unruh 温度の計算

次に、双対時空を一般化して前節と同様に解析を行なっていく。ただし、双対時空には (t,x) 面内で Lorentz 対称性を持つものと仮定すると、双対時空の計量は以下のように書くことができる。

$$
ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{xx}dx^2 + g_{uu}du^2 + f(u)dx_\perp^2, \qquad -g_{tt} = g_{xx}. \tag{7}
$$

ここで、$x_\perp$ とは、(t,x) 面に垂直な方向を表している。さらに、string の配位を

$$
X = \sqrt{t^2 + \frac{1}{a^2} - h(u)}, \tag{8}
$$

と仮定する。このように仮定できる理由は、(t,x) 平面において Lorentz 対称性を課しているため、計量の一般化によって Xiao の結果 (3) の $1/u^2$ の部分が変化しても u のみの関数で与えられると考えるのが自然であるためである。するとこの解における Xiao と同様な変換は以下のように表される。

$$
t = \sqrt{b^2 - r^2}\exp\left(\frac{\rho}{b}\right)\sinh\frac{\tau}{b}, \tag{9}
$$

$$
x = \sqrt{b^2 - r^2}\exp\left(\frac{\rho}{b}\right)\cosh\frac{\tau}{b}, \tag{10}
$$

$$
h(u) = r^2\exp\left(\frac{2\rho}{b}\right). \tag{11}
$$

この変換後の座標で張られる時空を Holographic Rindler 時空と呼ぶことにする。また、(9)、(10)、(11) を (8) に代入すると、$\rho=0$ が加速系の string の配位となっていることが確かめられ、string は (τ,ρ) 面に垂直な方向 (r 軸に沿った方向) に伸びていることが分かる。

ここで、(9)、(10)、(11) を用いると string 上の誘導計量は以下のようになる。

$$\widetilde{g}_{\tau\tau}=\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)\left[g_{tt}\cosh^2\left(\frac{\tau}{b}\right)+g_{xx}\sinh^2\left(\frac{\tau}{b}\right)\right], \tag{12}$$

$$\widetilde{g}_{rr}=\frac{r^2}{b^2-r^2}\left[g_{tt}\sinh^2\left(\frac{\tau}{b}\right)+g_{xx}\cosh^2\left(\frac{\tau}{b}\right)\right]+(\partial_r u)^2 g_{uu}, \tag{13}$$

ただし、$\rho=0$ とした。ここで、誘導計量 $\widetilde{g}_{ab}$ は時空の計量を $g_{\mu\nu}$、時空の座標を x^μ とすると以下の式で計算される。

$$\widetilde{g}_{ab}=\partial_a x^\mu \partial_b x^\nu g_{\mu\nu}. \tag{14}$$

(12) を、(7) を用いて $r=b$ で展開していくと、

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_{\tau\tau}&=\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)\left[g_{tt}\cosh^2\left(\frac{\tau}{b}\right)+g_{xx}\sinh^2\left(\frac{\tau}{b}\right)\right],\\&=\frac{2}{b}\left.g_{xx}\right|_{r=b}(r-b)+O[(r-b)^2],\end{aligned} \tag{15}$$

と計算される。次に、$\widetilde{g}_{rr}$ を計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_{rr}^{-1}&=\left[\frac{r^2}{b^2-r^2}\left[g_{tt}\sinh^2\left(\frac{\tau}{b}\right)+g_{xx}\cosh^2\left(\frac{\tau}{b}\right)\right]+[\partial_r u]^2 g_{uu}\right]^{-1},\\&=-\frac{2}{b}\frac{1}{\left.g_{xx}\right|_{r=b}}(r-b)+O[(r-b)^2],\end{aligned} \tag{16}$$

ここでは、$\partial_r u$ は以下の計算より得られる。

$$\partial_r h(u)=\partial_r u\partial_u h(u)\quad\to\quad\partial_r u=\frac{2r}{h'(u)},\ \ (\partial_u h(u)=h'(u))$$

ここで、string は Holographic Rindler 時空において、r 方向に真っ直ぐ伸びていたことから、string の上の誘導計量 $\widetilde{g}_{ab}$ は Holographic Rindler 時空中の $\rho=0$ における時空の計量に一致している。(15) や (16) が $r=b$ で展開可能だと仮定すると、以下のように計算することができる。

$$T_{\mathrm{H}}=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(-\frac{2\left.g_{xx}\right|_{r=b}}{b}\right)\left(-\frac{2}{b\left.g_{xx}\right|_{r=b}}\right)}=\frac{1}{2\pi b}=\frac{a}{2\pi}. \tag{17}$$

つまり、Lorentz 対称性のある時空で、

「string に沿った計量が horizon 近傍において展開可能である」

という条件が満たされれば双対時空の詳細によらず Unruh 温度を再現することができるということである。

考察

(15) と (16) の展開を詳しく調べ、前節で得られた条件について考察していく。g_{xx} と g_{uu} を $g_{xx}(r)$ と $g_{uu}(r)$ として、(15) と (16) を 2 次の項まで展開すると、以下のようになる。

$$\widetilde{g}_{\tau\tau} = \frac{2}{b} g_{xx}(b)(r-b) + \frac{[g_{xx}(b) + 2bg'_{xx}(b)]}{b^2}(r-b)^2 + O[(r-b)^3], \tag{18}$$

$$\widetilde{g}_{rr}^{-1} = -\frac{2}{b}\frac{1}{g_{xx}(b)}(r-b) + \left[-\frac{16 g_{uu}(b)}{h'(u_{\mathrm{H}})^2 g_{xx}(b)^2} + \frac{3g_{xx}(b) + 2bg'_{xx}(b)}{b^2 g_{xx}(b)^2}\right](r-b)^2 + O[(r-b)^3]. \tag{19}$$

ただし、$h'(u) = \partial_u h(u)$、$g'_{xx} = \partial_r g_{xx}$、$g'_{uu} = \partial_r g_{uu}$ であり、また、$u_{\mathrm{H}} = 1/b$ とした。ここで、(18) と (19) の 2 次の項が 1 次の項よりも重要にならない条件を考察する。

(18) の 2 次の項は、一般に、g_{xx} や $\partial_r g_{xx}$ が時空全体で有限の値をとるように定義されるとすれば、$r = b$ 近傍で 2 次の項が 1 次の項よりも重要になることはない。

(19) では、さらに $(r-b)$ の 2 次の項に $h'(u_{\mathrm{H}})$ が含まれている。少なくとも、「$h'(u)$ が horizon 近傍で 0 でない有限の値をとる」ことが満たされていれば (18) の展開が妥当となり (17) を結論とすることができる。

参考文献

[1] W. G. Unruh, "Notes on black hole evaporation," Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).

[2] B. W. Xiao, "On the exact solution of the accelerating string in AdS(5) space," Phys. Lett. B **665** (2008), 173-177. [arXiv:0804.1343 [hep-th]].

[3] J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity," Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113. [arXiv:hep-th/9711200].

[4] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from noncritical string theory," Phys. Lett. B **428** (1998), 105-114. [arXiv:hep-th/9802109 [hep-th]].

[5] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), 253-291. [arXiv:hep-th/9802150 [hep-th]].