

偏微分方程式を用いた Schramm-Loewner 発展の解析

Analysis of the Schramm-Loewner evolution using partial differential equations

物理学専攻 高山 大河

Department of Physics. Taiga Takayama

1 Schramm-Loewner 発展

複素上半平面を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ と書く。ただし、 \mathbb{C} は複素平面を表す。曲線 γ を原点を出発点として時間 $t \in [0, \infty)$ と共に単調に伸びていく単純曲線 $\gamma = \gamma[0, t]$, $t \in [0, \infty)$ とする。ただし、 $\gamma(0, \infty) \in \mathbb{H}$ である。ここで、 g_t を $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$ の共形変換とすると、 $g_t(z)$ は次の Loewner 微分方程式に従う。

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z. \quad (1.1)$$

ただし、 U_t は Loewner 微分方程式の駆動関数であり、 $U_t = g_t(\gamma(t))$ である。

Schramm は [1] で、Loewner 微分方程式 (1.1) の駆動関数を $U_t = \sqrt{\kappa} B_t$, $\kappa > 0$ とした。ただし、 B_t は 1 次元標準ブラウン運動である。つまり、

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z, \quad z \in \mathbb{H}. \quad (1.2)$$

この初期値問題の解として得られる共形変換の族 $\{g_t\}_{t \geq 0}$ を chordal Schramm-Loewner 発展 (Schramm-Loewner evolution) と呼び、パラメータ κ を付して SLE_κ と略記する。また、(1.2) を複素上半平面 \mathbb{H} での chordal SLE_κ に対する前進微分方程式とする。この時、 $\gamma(0) = 0$ とし、 $t > 0$ に対して $\gamma(t)$ を $\sqrt{\kappa} B_t = g_t(\gamma(t))$ によって定義する。すると、 $\gamma[0, t]$ は一般には単純曲線ではないが、 t に関して連続曲線を与えることが証明されており、 $\gamma[0, t]$ を SLE_κ 曲線と呼ぶ。また、 SLE_κ 曲線の振る舞いは $0 < \kappa \leq 4$, $4 < \kappa < 8$, $\kappa \geq 8$ の 3 相で異なる特徴を持つ。まず、 $0 < \kappa \leq 4$ の時、 SLE_κ 曲線は単純曲線となる。次に、 $4 < \kappa < 8$ の時、 SLE_κ 曲線は自分自身や実軸と接することはあるが交わることのない曲線となる。ただし、曲線が伸びていくにつれ、曲線で囲まれた領域は複素上半平面 \mathbb{H} を覆いつくしていき、曲線自身で \mathbb{H} が埋めつくされることはない。そして、 $\kappa \geq 8$ の時、複素上半平面 \mathbb{H} を埋めつくしていく曲線となる。

また、 SLE_κ は幾つかの 2 次元格子上の統計物理モデルの連続極限と対応していることが知られている [6, 7]。例として、 $\kappa = 2, 3, 4, 6, 8$ において、 SLE_κ はそれぞれ loop-erased random walk, 臨界 Ising 界面曲線, 臨界 4 状態 Potts 模型, 臨界浸透探索過程および uniform spanning tree に対応する。

2 先行研究

chordal SLE_κ に対する前進微分方程式 (1.2) に対して時間反転を行うことで、複素上半平面 \mathbb{H} での chordal $\text{SLE}_\kappa \{h_t\}_{t \geq 0}$ に対する後進微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} h_t(z) = \frac{-2}{h_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad h_0(z) = z, \quad z \in \mathbb{H} \quad (2.1)$$

を得る. 先行研究である Lyons-Margarint-Nejad[2] では, 伊藤の公式およびランダム時間変換を用いることで, この方程式から 1 次元拡散過程 T_u , $u \geq 0$ が満たす確率微分方程式

$$dT_u = -\frac{4T_u}{1 + \kappa T_u^2} du + d\tilde{B}_u, \quad T_0 = 0 \quad (2.2)$$

を導出した. ただし, \tilde{B}_u は 1 次元標準ブラウン運動であり, u はランダム時間変換後の時間変数である. また, T_u は $z_t = h_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t$ の偏角の cotangent を $\sqrt{\kappa}$ で割ったものに相当する. ここで, T_u の確率微分方程式に対する Kolmogorov 前進方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} p_t(x, y) + \frac{4y}{1 + \kappa y^2} \frac{\partial}{\partial y} p_t(x, y) + \frac{4(1 - \kappa y^2)}{(1 + \kappa y^2)^2} p_t(x, y) \quad (2.3)$$

と与えられる. ただし, $p_t(x, y)$ は時間間隔 t の間に x から y に遷移する確率密度関数であり, 初期条件は $\lim_{t \downarrow 0} p_t(x, y) = \delta(y)$ とする. そして, この Kolmogorov 前進方程式に対して $\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = 0$ とすることで, 確率過程 T_u に対する定常確率密度関数 $\rho(T)$ の従う微分方程式

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dT^2} \rho(T) + \frac{4T}{1 + \kappa T^2} \frac{d}{dT} \rho(T) + \frac{4(1 - \kappa T^2)}{(1 + \kappa T^2)^2} \rho(T) = 0 \quad (2.4)$$

を得る. この微分方程式は Gauss の超幾何微分方程式に帰着でき, 確率密度関数の非負条件を考慮することで, 定常密度関数 $\rho(T)$ は

$$\rho(T) = C(1 + \kappa T^2)^{-\frac{4}{\kappa}}. \quad (2.5)$$

ただし, C は規格化定数であり, $C = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \kappa T^2)^{-\frac{4}{\kappa}} dT \right)^{-1}$ で定まる. 次に, 定常密度関数 $\rho(T)$ に対して, $T = -\frac{1}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}$ として, 変数変換 $T \rightarrow \theta$ を行う. すると, $d\tilde{\rho}(\theta) = \frac{C}{\sqrt{\kappa}} \sin^{\frac{8}{\kappa}-2} \theta d\theta$ が得られる. ここで, θ は $z_t = h_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t$ の偏角に相当する. この偏角 θ に対する定常密度関数 $\tilde{\rho}(\theta)$ は, $\kappa = 4$ で空間依存性が変化し, $\kappa = 8$ で可積分性が変化する. これは SLE_κ 曲線の挙動の変化と対応しており, SLE_κ 曲線の挙動の変化が定常密度関数 $\tilde{\rho}(\theta)$ の空間依存性および可積分性の変化により表されたこととなる.

3 T_u の確率微分方程式に対する Kolmogorov 前進方程式

3.1 Kolmogorov 前進方程式に対する固有値問題

本研究では, 確率密度関数 $p_t(x, y)$ の κ 依存性を動的に捉えるために, Kolmogorov 前進方程式 (2.3) に対する次の固有値問題を考えた.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(y; \lambda) + \frac{4y}{1 + \kappa y^2} \frac{\partial}{\partial y} u(y; \lambda) + \frac{4 - 4\kappa y^2}{(1 + \kappa y^2)^2} u(y; \lambda) = -\lambda u(y; \lambda). \quad (3.1)$$

これを満たす対 $(\lambda, u(y; \lambda))$ によって得られる $U(t, y; \lambda) = e^{-\lambda t} u(y; \lambda)$ は Kolmogorov 前進方程式 (2.3) を満たす. この固有値方程式 (3.1) に対して, $s(y) = \sqrt{2}y$ および $r(s) = (1 + \frac{\kappa}{2}s^2)^{-2/\kappa}$ を用いて Liouville 変換を行う. それにより固有値方程式 (3.1) は次の通り Schrödinger 型へと変形される.

$$\frac{d^2}{ds^2} (r^{-1} \tilde{u}(s; \lambda)) - \left[\frac{(16 + 4\kappa)s^2 - 8}{(2 + \kappa s^2)^2} - \lambda \right] (r^{-1} \tilde{u}(s; \lambda)) = 0. \quad (3.2)$$

ただし, $\tilde{u}(s; \lambda) = u(y; \lambda)$ である.

3.2 Schrödinger 型の固有値方程式の $\lambda = 0$ での解

先行研究で得られた定常密度関数 $\rho(T)$ は, 固有値方程式 (3.1) の零固有値解 $u(y; 0)$ に相当する. よって, Schrödinger 型の固有値方程式 (3.2) の $\lambda = 0$ での解は

$$r^{-1} \tilde{u}(s; 0) = C \left(1 + \frac{\kappa}{2} s^2\right)^{-2/\kappa} \quad (3.3)$$

である. この零固有値解 $r^{-1} \tilde{u}(s; 0)$ に対して, $s = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}$ として, 変数変換 $s \rightarrow \theta$ を行う. すると, $d\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta) = \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}} \sin^{\frac{4}{\kappa}-2} \theta d\theta$ が得られる. ただし, $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta) = r^{-1}(s) \tilde{u}(s; 0)$ である. この $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta)$ は, $\kappa = 2$ で空間依存性が変化し, $\kappa = 4$ で可積分性が変化する.

一方, 先行研究の定常密度関数に同様の変化が起こるのは $\kappa = 4, 8$ の時であり, 対応する κ の値がそれぞれ $1/2$ 倍されてしまっていることが分かる.

3.3 ポテンシャルの κ 依存性

Schrödinger 型に変形した固有値方程式 (3.2) のポテンシャル部分を

$$q(s) = \frac{(16 + 4\kappa)s^2 - 8}{(2 + \kappa s^2)^2} \quad (3.4)$$

とおき, $q(s)$ に対して $s \rightarrow \theta$ の変数変換を行う. すると, 変数変換されたポテンシャル

$$\tilde{q}(\theta) = \left(\frac{8}{\kappa} + 2\right) \sin^2 \theta - \left(\frac{8}{\kappa} + 4\right) \sin^4 \theta \quad (3.5)$$

を得る. ポテンシャル $q(s)$ および $\tilde{q}(\theta)$ はともに, 谷の両脇に山を持つような形となる. また, $\kappa > 0$ に対して最大値は $\frac{(4+\kappa)^2}{4\kappa(2+\kappa)}$, 最小値は -2 である. ここで, 最大値 $\frac{(4+\kappa)^2}{4\kappa(2+\kappa)}$ は κ が大きくなるにつれ単調に減少することから, κ が大きくなるのに伴いポテンシャルの山は低くなっていくことが分かる.

また、変数変換したポテンシャル $\tilde{q}(\theta)$ の符号付き面積を $S(\kappa)$ とおくと、 $S(\kappa)$ は

$$S(\kappa) = \int_0^\pi \tilde{q}(\theta) d\theta = \pi \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.6)$$

と求まる。この $\tilde{q}(\theta)$ の符号付き面積 $S(\kappa)$ は、 $0 < \kappa < 2$ で正、 $\kappa = 2$ で 0、 $2 < \kappa$ で負となることが分かる。この様に、Schrödinger 型の固有値方程式のポテンシャルの挙動は、 $\kappa = 2$ において変化することが確認された。

一方、先行研究の定常密度関数に変化が起こる κ の値は $\kappa = 4, 8$ であり、本研究で得られた $\kappa = 2$ という値と異なる。つまり、本研究の結果として、従来知られている $\kappa = 4, 8$ での相転移とは異なる、 $\kappa = 2$ での変化が見られたこととなる。ここで、 $\kappa = 2$ において SLE_κ は loop-erased random walk の連続極限に対応している。loop-erased random walk は Schramm が SLE_κ を導入したきっかけとなった確率モデルであり、 SLE_κ 理論の研究において重要なモデルの 1 つである。そのことから、 $\kappa = 2$ においてポテンシャルの挙動に変化が起こったことと、loop-erased random walk には何かしらの関連があると予想される。

参考文献

- [1] Schramm, Oded : Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. Israel J. Math. 118 (2000), 221–288, arXiv:math.PR/9904022
- [2] Lyons, T. J., Margarint, V., Nejad, S. : Convergence to closed-form distribution for the backward SLE_κ at some random times and the phase transition at $\kappa = 8$. arXiv:math.PR/1910.05519v1
- [3] 稲見武夫 (1998) 「常微分方程式 理工系の基礎数学 3」 岩波書店
- [4] 小谷眞一, 俣野博 (2006) 「微分方程式と固有関数展開」 岩波書店
- [5] 松本裕行 (2004) 「応用のための確率論・確率過程」 サイエンス社
- [6] W. Kager and B. Nienhuis : A guide to stochastic Löwner evolution and its application. J. Stat. Phys. 115 (2004), 1149-1229, arXiv:math-ph/0312056v3
- [7] D. Chelkak, H. Duminil-Copin, C. Hongler, A. Kemppainen, and S. Smirnov : Convergence of Ising interfaces to Schramm’s SLE curves. Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, 352(2), (2014), 157–161, arXiv:1312.0533v2