

格子経路模型とランダム・ウォークの三角関数拡張および楕円関数拡張

Trigonometric and Elliptic Extensions of Lattice Path Models and Random Walks

物理学専攻 星 奈津子

Department of Physics. Natsuko Hoshi

1 格子経路模型の楕円関数拡張

数式や理論に a, b, q といったパラメータを導入することを拡張という。導入の仕方を、パラメータに 0 や ∞ などの特別な値を代入したとき元の理論に戻るような形に工夫することで、元の内容を網羅しつつより幅広い応用が期待される理論を作ることができる。

Chaundy と Bullard によって示された以下のような恒等式がある [1].

$$1 = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} x^k + x^{m+1} \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} (1-x)^k. \quad (1.1)$$

この恒等式の証明方法は Koornwinder と Schlosser によって複数紹介されている [2, 3]. 今回はその中の「重み付き格子経路法」に着目した。これは、格子模型上の経路に適切な重みを課すことで、全経路の重みの和を恒等式と一致させる証明方法である。ここでいう格子模型とは正方格子上の領域のことであり、格子点間を結ぶ線分に沿って領域内を右または上へ移動する経路を考えている。また、重みとは各ステップに与える関数のことであり、経路の重みは通過したステップの重みの積によって定義される。本研究では、最も基本的な拡張である q -拡張から、最大の拡張といわれる楕円関数拡張まで、 q -拡張、第 $1(a, b; q)$ -拡張、第 $2(a, b; q)$ -拡張、 $(a, b, c; q)$ -拡張 (論文題目ではここまでは総称して三角関数拡張とよんでいる)、楕円関数拡張といった順に、計 5 段階の拡張を (1.1) 式に施した。そしてそれらを重み付き格子経路法によって証明することで、拡張された恒等式とそれに対応する格子経路模型を得た。ただし今回、通過した点の座標に依存する形に重みを拡張したことで、全経路の重みの和の表記が明らかではなくなった。そのため証明の詳細な手順は本研究のオリジナルとなっている。楕円関数拡張はその他の 4 つの拡張を含んでいるため、ここでは楕円関数拡張した恒等式と格子経路模型の重みを紹介する。恒等式は

$$1 = \frac{(ac, c/a, bx, b/x; q, p)_{n+1}}{(ab, b/a, cx, c/x; q, p)_{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{\theta(acq^{n+2k}; p)(acq^n, bcq^n, c/b, q^{n+1}, ax, a/x; q, p)_k}{\theta(acq^n; p)(q, aq/b, abq^{n+1}, ac, cq^{n+1}/x, cxq^{n+1}; q, p)_k} q^k \\ + \frac{(bc, c/b, ax, a/x; q, p)_{m+1}}{(ab, a/b, cx, c/x; q, p)_{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{\theta(bcq^{m+2k}; p)(bcq^m, acq^m, c/a, q^{m+1}, bx, b/x; q, p)_k}{\theta(bcq^m; p)(q, bq/a, abq^{m+1}, bc, cq^{m+1}/x, cxq^{m+1}; q, p)_k} q^k \quad (1.2)$$

となる。重みは、もとの恒等式に対しては右を x , 上を $1-x$ とすれば良いが、楕円関数拡張を施した場合には、

$$h(i, j; x; a, b, c; q, p) := ((i, j) \rightarrow (i+1, j) \text{ の重み}) = \frac{\theta(bcq^{i+2j}, (c/b)q^i, axq^i, (a/x)q^i; p)}{\theta(abq^{i+j}, (a/b)q^{i-j}, cxq^{i+j}, (c/x)q^{i+j}; p)}, \\ 1 - h(i, j; x; a, b, c; q, p) := ((i, j) \rightarrow (i, j+1) \text{ の重み}) = \frac{\theta(acq^{2i+j}, (c/a)q^j, bxq^j, (b/x)q^j; p)}{\theta(abq^{i+j}, (b/a)q^{j-i}, cxq^{i+j}, (c/x)q^{i+j}; p)} \quad (1.3)$$

となることが求められた。なお、 $\theta(x; p)$ は変形 Jacobi テータ関数という特殊関数である。各パラメータについて $p, q \in \mathbb{C}$, $a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ であるものとし、変数は $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ である。

2 ランダム・ウォークの拡張

作成した格子経路模型の重みは、複素数の値をとる関数となっている。ここで特に $h(i, j; x; a, b, c; q, p) \in \mathbb{R}$, $0 < h(i, j; x; a, b, c; q, p) < 1$ のときを考えると、重みはそのステップや経路を選ぶ確率と見なせるようになる。また、経路の確率を用いて k ステップ進んだときの確率分布を得ることができる。変数変換によって座標軸を (ξ, t) にとり直し、2次元格子模型上の経路を $1+1$ 次元のランダム・ウォークへとおきかえた。ここからは $a, b, c, q, p, x \in \mathbb{R}$ であるものとし、さらに $0 < h(i, j; x; a, b, c; q, p) < 1$ を満たすために各パラメータに課す十分条件を求めた。この条件を満たすパラメータの値を代入して確率分布を描いたところ、パラメータ依存性(図 1, 2)と時間依存性(図 3)が発見された。この特徴は以下のようにまとめられる、

- 単峰(極大値が1つ)と複峰(極大値が2つ)の分布が現れる
 ⇒ 進みやすい方向を1つまたは2つ持つ。
- 単峰分布は時間の経過に伴って複峰分布になる
 ⇒ 偶然進みにくい方向へ進んだランダム・ウォークは時間の経過に伴って収束する。
- a : 小 → 大で最大値の位置が右 → 左
 ⇒ a の値を大きくすると、より左へ進みやすくなる。

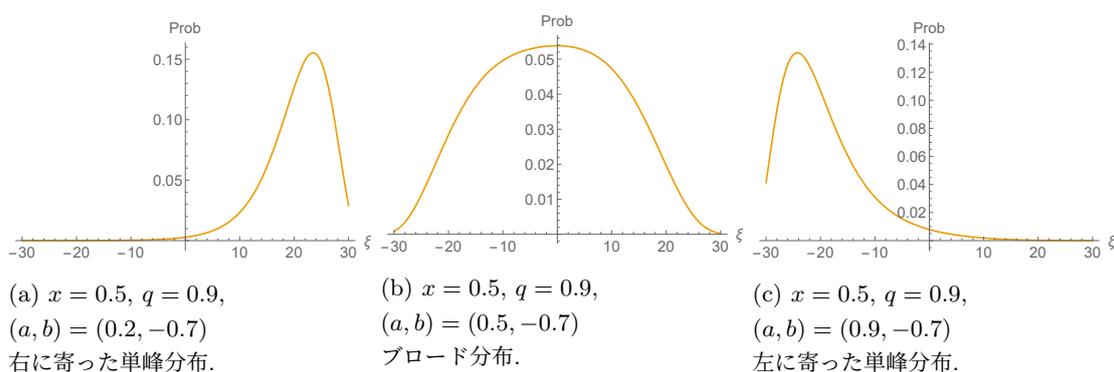


図 1: 単峰分布は、 a を大きくすると、(a)→(b)→(c) のように変化する。

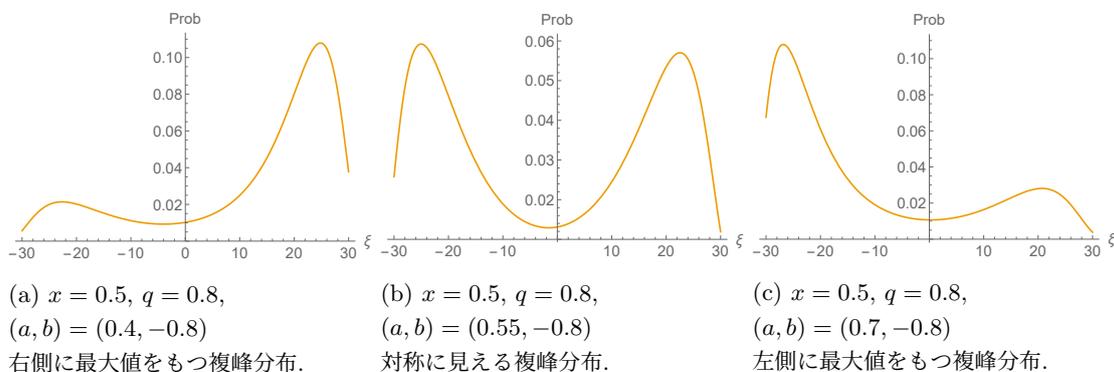
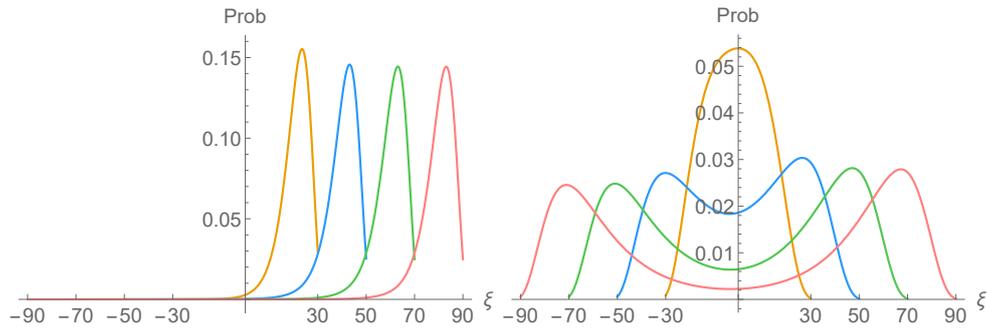


図 2: 複峰分布は、 a を大きくすると、(a)→(b)→(c) のように変化する。



(a) $x = 0.5$, $q = 0.9$, $(a, b) = (0.2, -0.7)$, (b) $x = 0.5$, $q = 0.9$, $(a, b) = (0.5, -0.7)$, $t = 30$ (橙), 50 (青), 70 (緑), 90 (桃). 単峰分布. $t = 30$ (橙), 50 (青), 70 (緑), 90 (桃). 徐々に複峰時間が経過すると最大値はより端へ寄って鋭く分布になり, 端へ寄って鋭くなっていく. なる. $t = 90$ では複峰分布になっている.

図 3: 時間発展で性質が変わる様子が見られる.

これらの振る舞いは全ての三角関数拡張で見られたが, ここでは条件の範囲が最も広い第 1($a, b; q$)-拡張の結果を示している. なお, 楕円関数拡張では強い十分条件を課しているため同様の分布を描くことができない. 推移確率についても数値的に調べ (図 4), 分布の特徴を生じさせる原因を考察した. また, 典型的と思われる分布を描くパラメータの組を選び, 計算機シミュレーションによってランダム・ウォークを走らせ特徴の再現を行った (図 5). $t = 90$ での到達地点についてのヒストグラムは確率分布と一致することが確認された (図 6).

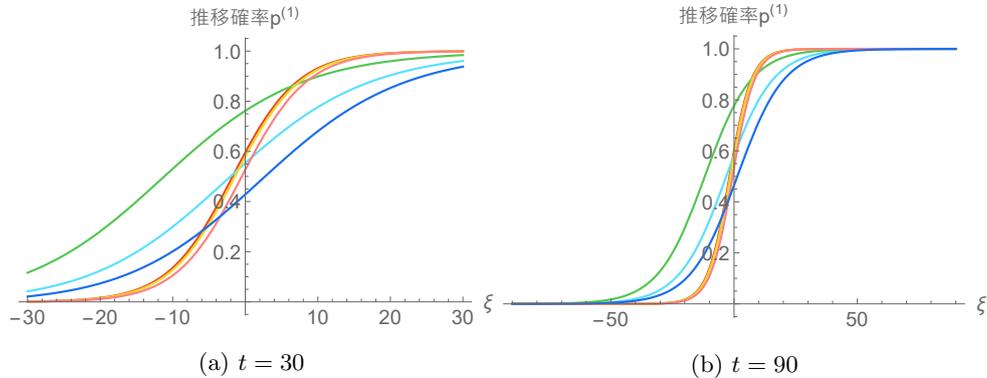


図 4: 推移確率の値. $x = 0.5$, $q = 0.9$, $(a, b) = (0.2, -0.7)$ (緑), $(0.5, -0.7)$ (水色), $(0.8, -0.7)$ (青), $q = 0.8$, $(a, b) = (0.4, -0.6)$ (赤), $(0.5, -0.7)$ (黄), $(0.7, -0.8)$ (桃). 時間経過でほぼ変化しない.

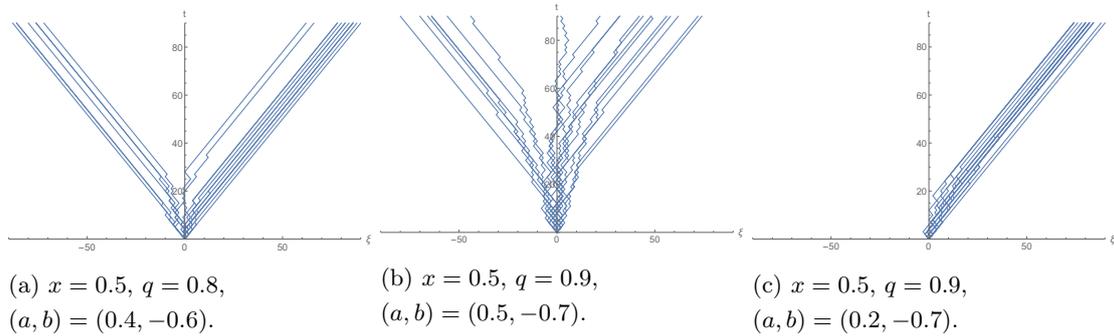


図 5: $t = 90$ までのランダム・ウォーク 20 通り.

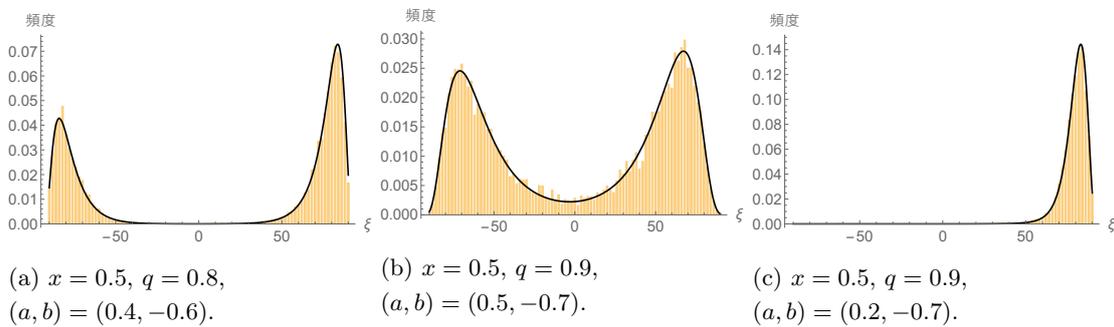


図 6: ランダム・ウォーク 10000 通りの到達地点についてのヒストグラム. 確率分布のグラフと一致する.

参考文献

- [1] Chaundy, T. W., Bullard, J. E.: John Smith's problem. *Math. Gazette* **44**, 253–260 (1960)
- [2] Koornwinder, T. H., Schlosser, M. J.: On an identity by Chaundy and Bullard. I. *Indag. Mathem., N.S.* **19** (2), 239–261 (2008)
- [3] Koornwinder, T. H., Schlosser, M. J.: On an identity by Chaundy and Bullard. II. More history. *Indag. Mathem.*, **24**, 174–180 (2013)
- [4] Koornwinder, T.H.: On the equivalence of two fundamental theta identities. *Anal. Appl. (Singap.)* **12**, 711–725 (2014)
- [5] Hoshi, N., Katori, M., Koornwinder, T. H., Schlosser, M. J.: Extensions of the Chaundy–Bullard identity. 投稿準備中
- [6] Schlosser, M. J.: Elliptic enumeration of nonintersecting lattice paths. *J. Combin. Theory Ser. A* **114**, 505–521 (2007)
- [7] Schlosser, M. J.: A noncommutative weight-dependent generalization of the binomial theorem. *Sém. Lothar. Combin.*, **B81j** (2020), 24 pp