バックグラウンドメッシュを用いたSpace-Time有限要素法による高潮解析

Storm Surge Analysis using Space-Time Method with Background Mesh

20N3100031B　中村　光太郎（計算力学研究室）
Kotaro NAKAMURA/ Computational Mchanics Lab.

Key Words : *Space-Time FEM, Storm surge analysis, Background mesh*

1. はじめに

近年，台風被害が頻発化・激甚化し，加えて気候変動による海面上昇等により，将来さらに高潮による災害リスクが高まるおそれがある．また，高潮による被害は沿岸域における護岸からの越水だけでなく，河川を逆流した海水の氾濫など，被害は内部にまで至るため，氾濫域を高精度に表現可能な計算手法が必要となる．このような移動境界問題に対し高精度な解析が可能である界面追跡法の一種としてSpace-Time有限要素法が知られている．しかし，時々刻々と解析メッシュが変化するため，メッシュ更新時に形状が破綻してしまうなどの問題がある．

そこで本研究では，Space-Time法による界面追跡法においてメッシュが破綻する問題を克服し，陸域の地形情報を損なうことなく解析を行うためにバックグラウンドメッシュに基づくメッシュ再構築手法[1]を適用し，高潮解析を行った．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

高潮解析の支配方程式として，以下に示す浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{t}}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{x_i}}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x_i}}\left(\mathbf{K}_{ij}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{x_j}}\right)=\mathbf{R} \tag{1}$$

各ベクトル，各マトリックスは以下のようになる．

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 0 \\ -c^2\dfrac{\partial(z-\zeta_0)}{\partial x_1}-\dfrac{u_1 H C_f\sqrt{u_1^2+u_2^2}}{H}+\dfrac{\rho_a C_D\sqrt{w_1^2+w_2^2}w_1}{\rho} \\ -c^2\dfrac{\partial(z-\zeta_0)}{\partial x_2}-\dfrac{u_2 H C_f\sqrt{u_1^2+u_2^2}}{H}+\dfrac{\rho_a C_D\sqrt{w_1^2+w_2^2}w_2}{\rho} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2-u_1^2 & 2u_1 & 0 \\ -u_1u_2 & u_2 & u_1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -u_1u_2 & u_2 & u_1 \\ c^2-u_2^2 & 0 & 2u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{11}=\nu\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2u_1 & 2 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{K}_{12}=\nu\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{21}=\nu\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{K}_{22}=\nu\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \\ -2u_2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} H \\ u_1H \\ u_2H \end{bmatrix},\quad C_f=\frac{gn^2}{H^{1/3}}$$

ここで，Hは全水深，w_iは風速，cは波速，zは河床高さ，ρ，ρ_aは，それぞれ水の密度，空気の密度，u_iは各方向の流速，gは重力加速度，νは渦動粘性係数，nはマニングの粗度係数，ζ_0は気圧低下に伴う水位上昇量，C_Dは抗力係数であり本多・光易の式[2]を用いる．また，$\mathbf{U}$は未知ベクトル，$\mathbf{R}$は勾配及び摩擦ベクトル，$\mathbf{A}_i$は移流行列，$\mathbf{K}_{ij}$は拡散行列である．

(2) 台風モデル

台風の気圧分布は次式に示すMyers の式で与えた．

$$P(r)=P_c+\Delta P\cdot e^{\left(-\frac{r_0}{r}\right)} \tag{2}$$

ここに，$P(r)$ は台風中心から距離rだけ離れた地点での気圧，P_c は台風の中心気圧，ΔP は気圧の深度，r_0 は台風内の最大風速地点の台風中心からの距離である．これを用いて，式(1) の気圧低下に伴う水位上昇ζ_0は次式で与える．

$$\zeta_0=0.991(1013-P(r))\times 10^{-2} \tag{3}$$

また，台風域内の風速Wは中心対称の風u_1と台風の移動に伴う場の風u_2によって以下のようになる．

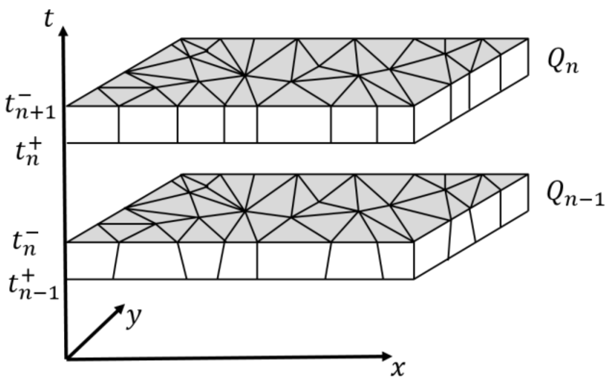
$$\vec{W}=\vec{u_1}+\vec{u_2} \tag{4}$$

$$u_1=C_1V_{gr}\ ,\ \ u_2=C_2V_t\exp\left(-\frac{r\pi}{500\times 10^3}\right)$$

ここで，V_{gr}は傾度風速，V_tは台風移動速度，C_1，C_2は風速低減係数であり，藤井・光田のモデル[3]を用いる．

(3) Space-Time有限要素法

Space-Time 法は，空間と時間の双方に対して有限要素法を適用する手法であり，時間・空間領域（Space-Time slab）毎に独立に離散化を行う．Space-Time slab とは図-1 に示すように時刻t_n での空間領域Ω_n と時刻t_{n+1}での空間領域Ω_{n+1} を連結したものであり，ここでt_n^+とt_{n+1}^-での± は slab 内での上下を表している．その後，各々一つ前の Space-Time slab の情報をもとに slab 内での節点における未知量を求め，時間進行していく方法である．このため時間刻み毎のメッシュ同士が幾何学的に連続である必要はない．



図–1　Space-Time slab

(4)　定式化

式(1)に対し，Space-Time slab毎に有限要素法の適用を行う．いま，t_n^+とt_{n+1}^-に囲まれた領域に着目し，時間方向の不連続量を含む形を考えると次式のようになる．

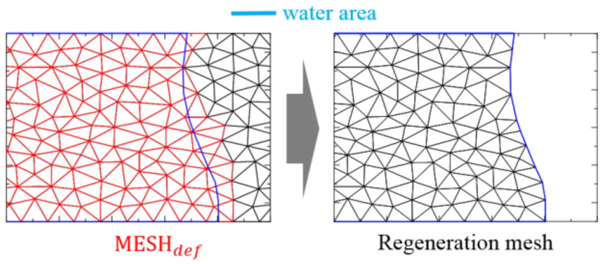
$$
\begin{aligned}
&\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\Omega}\mathbf{U}^*\left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x_i}\right)+\left(\frac{\partial\mathbf{U}^*}{\partial x_i}\right)\left(\mathbf{K}_{ij}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x_j}\right)d\Omega dt \\
&+\int_{\Omega}(\mathbf{U}^*)_n^+\cdot((\mathbf{U})_n^+-(\mathbf{U})_n^-)d\Omega \\
&+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\Omega_e}\tau\left(\frac{\partial\mathbf{U}^*}{\partial t}+\mathbf{A}_j^T\frac{\partial\boldsymbol{U}^*}{\partial x_j}-\mathbf{K}\frac{\partial^2\mathbf{U}^*}{\partial x_i^2}\right) \\
&\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x_i}-\mathbf{K}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial x_i^2}-\mathbf{R}\right)d\Omega_e dt \\
&+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\Omega_e}\delta\left(\frac{\partial\boldsymbol{U}^*}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial x_i}\right)d\Omega_e dt \\
&=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\Omega}\mathbf{U}^*\cdot\mathbf{R}\,d\Omega dt \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ここに，左辺第1項は通常のGalerkin項，第2項は時刻$t=t_n$における解の連続性を弱く要求するものであり，第3項はGLS法による安定化に寄与する項である．また，第4項は衝撃捕捉項である．ここでτ，δは安定化パラメータである．

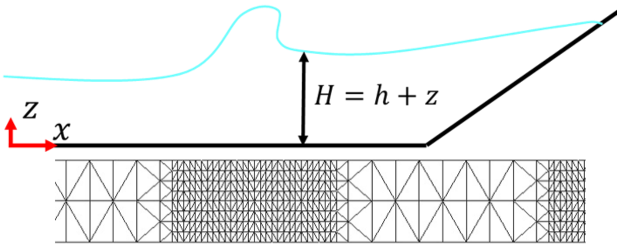
(5)　メッシュ再構築手法

本研究では，移動境界を表現する際に，あらかじめ流体が移動する領域全体にバックグラウンドメッシュを設置しそれに基づいて解析メッシュの再構築を行う[3]．図–2に示すように，メッシュを再構築するための領域をバックグラウンドメッシュから定義する．その際，定義された計算領域は水域を包含するように定義する．その後，水際線に割り当てられた節点は，その節点から最も近い水域の水際線上に移動させ，その移動量を境界条件とし，線形弾性方程式を解くことにより，内部節点の移動量を求め, 新たにメッシュが再構築される．

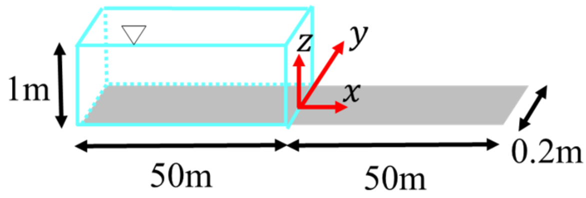
また，再構築されたメッシュの節点上には物理量は



図–2　メッシュの再構築



図–3　AMR法　細分化の様子



図–4　ダムブレイク問題　初期条件

配置されていないため水域の物理量を再配置する必要がある．この再配置には, 面積座標に基づくCIVA法[4]で用いられる3次補間式により補間を行っている．

$$
\phi(X_n^{RG})=\left[\sum_{i=1}^{3}a_iL_i+d\sum_{j,k=1}^{3}b_{jk}\left[L_j^2L_k+\frac{1}{2}L_1L_2L_3\right]\right] \quad (6)
$$

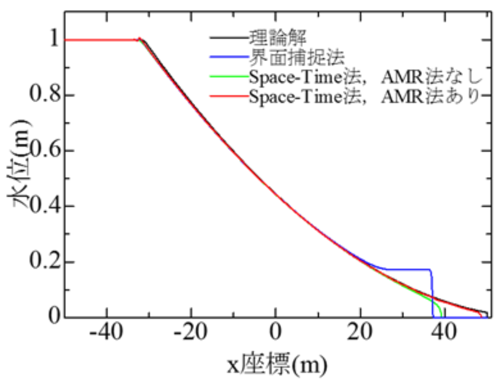
$$
a_i=\phi_i\ ,\ b_{jk}=\phi_j-\phi_k+(x_k-x_j)\cdot\nabla\phi_j
$$

また，AMR法を適用することで，局所的に細分化し，より高精度な解析が可能となる．この手法では，バックグラウンドメッシュも細分化する必要があるが，物理量に関する値は持っていないため，解析メッシュとバックグラウンドメッシュの要素を対応させ，バックグラウンドメッシュの要素に対する細分化を計算によって得られた水位Hの二階微分値を参考にする．また，水際線に隣接している要素も細分化すると図–3に示すようになる．

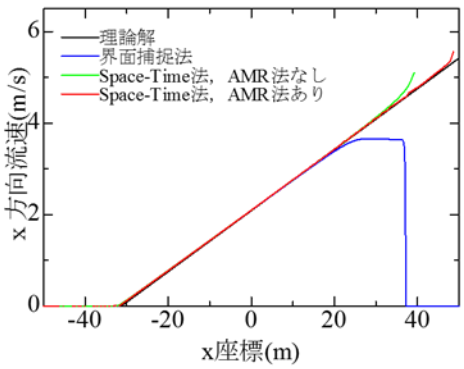
3.　数値解析例

(1)　ダムブレイク問題

まず本メッシュ再構築手法の精度を検証するため，図–4に示すようなダムブレイク問題で解析を行い通常のFEMの界面捕捉法との比較を行った．



図–5　解析結果（水位分布）



図–6　解析結果（流速分布）

a)　解析条件

メッシュはユニオンジャック型の構造格子メッシュであり，分割幅は0.1mである．時間増分Δtは0.002sであり，境界条件は壁面にSlip条件を与えている．

b)　解析結果

図–5に水位分布の比較グラフを示す．図–6に流速分布の比較グラフを示す．これらの結果からSpace-Time法が理論解と良い一致を示していることが確認できる．

(2)　フラスコ湾での高潮氾濫解析

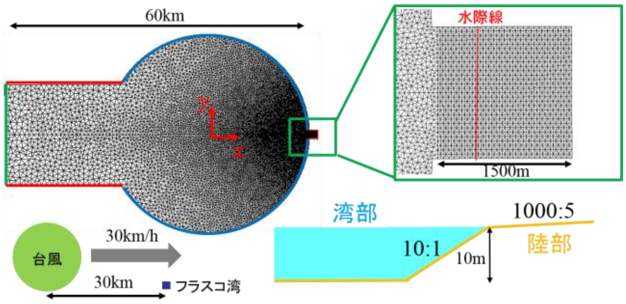
本手法の高潮解析への適用性を確認するために，図–7に示すような仮想の湾と陸部において高潮氾濫解析を行った．

a)　解析条件

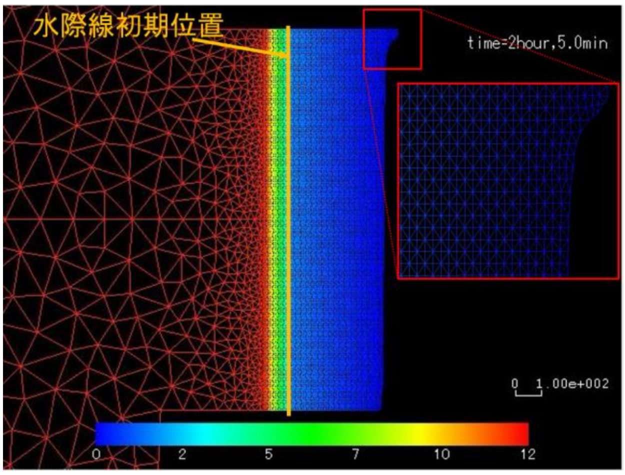
初期条件として湾部に水深10mを与え，陸部まで1/10の勾配を与えた．境界条件は青線部にNon-Slip条件，赤線部にSlip条件，緑線分に開境界条件を与えた．時間増分Δtは1sである．台風のパラメータは伊勢湾台風を参考にし，中心気圧は940hPa，最大風速半径は100kmを与え，最大風速部か湾にかかるように左から右へ通過させた．また，最小メッシュ幅は10mである．

b)　解析結果

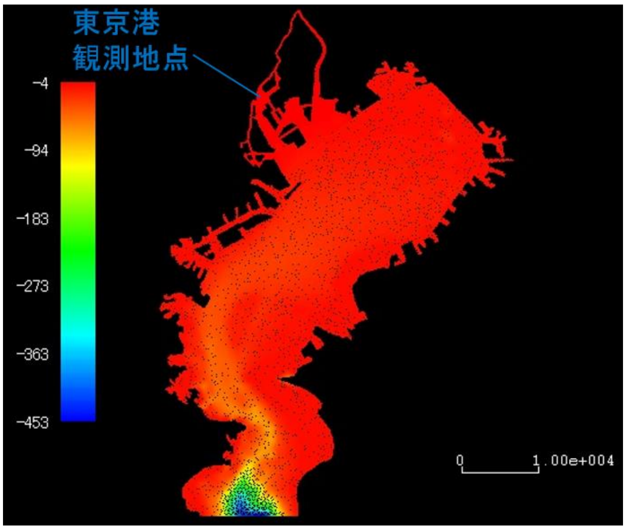
図–8に，台風通過に伴う遡上の様子を示す．これらの結果から本メッシュ再構築手法において高潮氾濫解析を



図–7　フラスコ湾　解析条件



図–8　フラスコ湾　解析結果



図–9　東京湾メッシュ分割図

行い，水際線を滑らかに表現できていることが確認できる．

(3)　東京湾での高潮解析

実際の地形での高潮現象と比較し，高潮解析の妥当性を検証するために図–9に示すような東京湾での高潮解析を行った．比較する高潮現象として2019年の台風19号による高潮を対象とし，東京港での潮位偏差の実測値との比較を行った．

表-1　主要４分潮

Code	Amplitude $a_m[m]$	Period $T_m[h]$	Phase delay $k_m[rad]$
M2	0.3592	12.42	2.5543
S2	0.1699	12.00	3.0423
K1	0.2322	23.93	3.0852
O1	0.182	25.82	2.7583

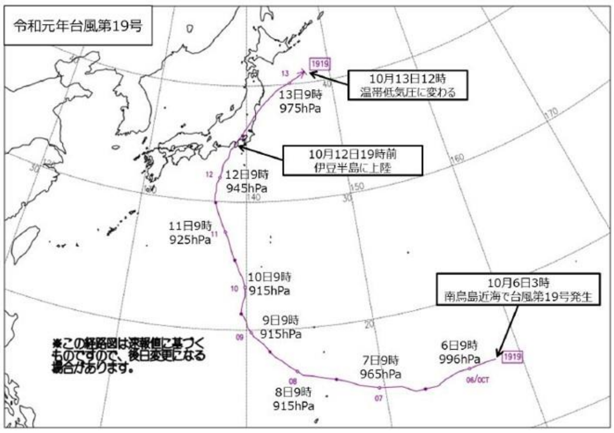


図-10　台風経路　(気象庁より引用)

a)　解析条件

台風のパラメータとして中心気圧は各時刻において，観測データを参考にし，最大風速半径も同様に観測値をもとに計算し95kmとした．台風経路は図-10に示すような経路で，10日3時から13日9時までの解析を行った．また，境界条件として下部境界に表-1に示すような主要4分潮を以下のように与えた．

$$\eta=\sum_{m=1}^{4}a_m\sin(\frac{2\pi}{T_m}t+k_m) \tag{7}$$

また，その他の境界にはNon-Slip条件を与えた．時間増分Δtは10sであり，最小メッシュ幅は10mである．

b)　解析結果

図-11に，潮位偏差の比較グラフを示す．また，図-12にピーク時のコンター図を示す．これらの結果から，ピーク前後で潮汐の影響が強く出てはいるが概ね挙動を再現できていることが確認でき，潮位偏差のピークを概ね捉えられていることが確認できる．また，ピーク時の東京港付近から隅田川，荒川に対して波が遡上し，水位が高まっていることが確認できる．

4.　終わりに

本研究では界面追跡法におけるメッシュ破綻を避け，地形情報を正しく考慮するために，バックグラウンドメッシュに基づくメッシュ再構築手法を適用しSpace-Time法による高潮解析を行った．

- バックグラウンドメッシュを用いたSpace-Time法は界面捕捉法に比べ，精度良く移動境界の位置及び周辺の物理量を求められた

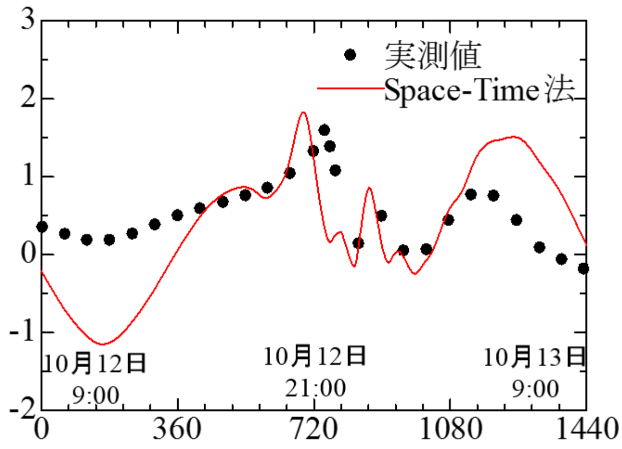


図-11　潮位偏差グラフ

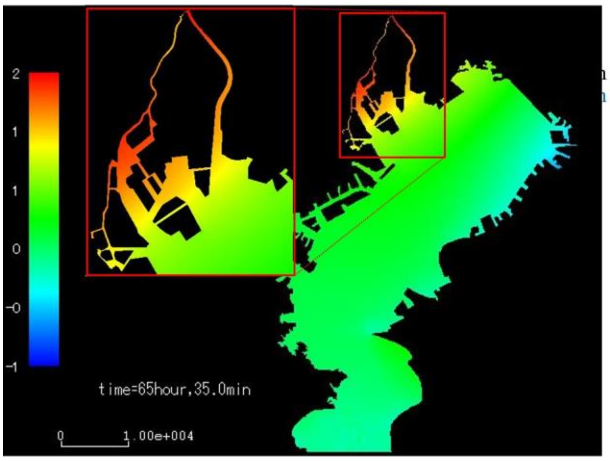


図-12　潮位偏差コンター図

- 仮想的なフラスコ湾での高潮氾濫解析において，滑らかに水際線を表現することができた
- 東京港での実測値との比較により高潮解析の妥当性を示すとともに，河川遡上の危険性を確認することができた

今後の課題として実地形での高潮氾濫解析が挙げられる．

参考文献

1) Shinsuke, T., Seizo, T., Kazuo, K. and Tayfun, E. T.,Space-Time SUPG finite element computation of shallowwater-flows with moving shorelines, Comput Mech, 48,pp.293-306, 2011.
2) Mitsuyasu, H. and Honda, T., The High Frequency Spectrum of Wind Generated Wave, J. Oceanog. Soc. Japan, 30, No4, 1974.
3) 藤井健，光田寧，台風の確立モデルの作成とそれによる強風のシミュレーション，京都大学防災研究所年報，29, B-1，pp.229-239, 1986.
4) Tanaka, N., The CIVA method for mesh-free approaches:improvement of the CIP method for nsimplex, Computational Fluid Dynamics JOURNAL, 8, no.1, pp.121-127,1999.