

Isogeometric Analysisに基づいたFEMによる構造物の損傷を考慮した 流体-構造連成解析

Fluid-Structure Interaction Considering the Crack Propagation Using FEM Based on Isogeometric Analysis

20N3100049J 吉田 也真都 (都市人間環境学専攻)
Yamato YOSHIDA/ Computational Mechanics Lab.

Key Words : *Isogeometric Analysis, FEM, FSI, Isotropic damage model*

1. はじめに

地震大国である日本では、津波によるコンクリート構造物の甚大な被害が想定されており、流体力の衝突による構造物の破壊メカニズムを解明することは極めて重要な研究課題である。著者らはこれまで、有限要素法(FEM)によるコンクリート構造物の損傷を考慮した流体-構造連成解析手法の構築を行ってきた。しかしFEMでは、用いる基底関数によって要素分割を行うため、CADのSpline関数によって設計される構造物の曲面が近似的に表現されてしまう。近年この問題を解決する手法としてIsogeometric Analysis (IGA)²⁾が注目を浴びている。IGAではCADの形状表現に使われるSpline関数を形状関数に用いることで、CADで設計された曲面を有する構造物に対しても形状誤差なく解析が行われる。

本研究では、構造解析にIGAを適用することで、複雑な曲面を有するコンクリート構造物に対する損傷を考慮した流体-構造連成解析手法の構築を目的とした。数値解析例として、円柱片持ち梁における振動解析、及び構造物を有する三次元ダムブレイク問題を取り上げることで、IGAに基づいたFEMによる構造解析の有効性の検証、及びIGAに基づいたFEMによる構造物の損傷を考慮した流体-構造連成解析手法の妥当性の検証を行った。

2. IGAに基づいたFEMによる動的構造解析手法

本研究では、IGAの離散化としてNURBS関数を用いる。

(1) NURBS関数

CADの形状表現で多く用いられているNURBS (Non Uniform Rational B-Spline) 関数はCox de Boor Algorithm (1) によって定義される三方向のB-Spline基底関数を用いて、式(2)のように定義される。

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i < \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \quad (p=0)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (p=1,2,3 \dots) \quad (1)$$

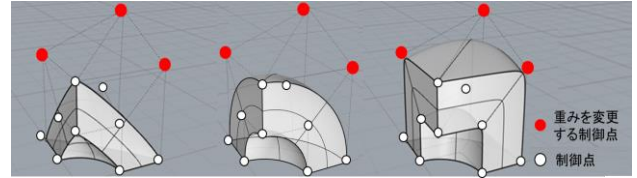


図-1 NURBS関数における重みの効果

$$R_{i,j,k}^{p,q,r} = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}} \quad (2)$$

ここで、 ξ, η, ζ はそれぞれの方向のB-Spline基底関数 N, M, L を決定するパラメータ空間の座標であるノット、 i, j, k は N, M, L を表現する物理空間の座標である制御点の番号、 p, q, r は N, M, L の次数、 $w_{i,j,k}$ は各制御点における重みである。なお ξ_i はCADで描いた形状から得られるノットベクトルの成分値である。

NURBS関数は制御点に付与される重みの値を変えるだけで、要素数を保ったまま様々な形状を表現できる特徴を持ち、図-1にその特徴を示す。図中の赤丸の制御点における重みの値のみを変更することで、形状を様々表現することができている。この特徴により、IGAでは解析領域となる構造物を少ない要素数で表現することが可能となる。

(2) 定式化

動的構造解析の支配方程式は運動中の平衡方程式(3)、歪み-変位関係式(4)、応力-歪み関係式(5)である。

$$-\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5)$$

ここで、 u_i は変位、 σ_{ij} は応力、 ε_{ij} はひずみ、 c は弾性係数テンソルである。支配方程式に対して仮想仕事の原理を適用することにより、各要素における仮想仕事式(6)を導く。

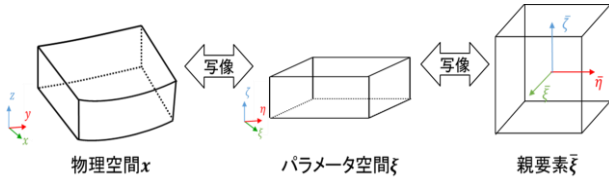


図-2 IGAにおける変数変換

$$\int_{\Omega_e} \rho \mathbf{R}_e^T \mathbf{R}_e d\Omega \ddot{\mathbf{d}}_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e d\Omega \mathbf{d}_e = \int_{\Gamma_e} \mathbf{R}_e^T \mathbf{t}_e d\Gamma \quad (6)$$

ここで、 Ω_e は要素領域、 \mathbf{R}_e は形状関数行列、 \mathbf{d}_e は制御点変位ベクトル、 \mathbf{B}_e はBマトリックス、 \mathbf{D}_e は弾性係数行列、 Γ_e は要素境界、 \mathbf{t}_e は表面力ベクトルである。

形状関数となるNURBS関数は式(2)で示したよう、物理空間 $\mathbf{x}(x, y, z)$ の関数ではなく、ノットにより定義されるパラメータ空間 $\xi(\xi, \eta, \zeta)$ の関数である。このため、式(6)の積分を行う際に、物理空間とパラメータ空間の変数変換を施す必要がある。また、各要素での積分を親要素に写像して数値積分でを行うため、パラメータ空間 $\xi(\xi, \eta, \zeta)$ と親要素 $\bar{\xi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ の変数変換を施す必要がある。このようにIGAでは二度の変数変換を行う必要がある。この関係を図-2に示す。この物理空間とパラメータ空間の写像関係式、パラメータ空間と親要素の写像関係式は式(7),(8)に示す通りである。

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n_{np}} R_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_{x_i} \quad (7)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \{ (\xi_{i+1} - \xi_i) \bar{\xi} + (\xi_{i+1} + \xi_i) \} \quad (8)$$

ここで、 n_{np} は制御点の総数、 \mathbf{B}_{x_i} は制御点の座標である。本研究では数値積分としてGauss求積法を適用するが、NURBS関数は有理多項式であるため、積分点数をNURBS関数の次数+1点とする必要があるとされている。各要素で積分を行い、行列を解析領域全体で重ね合わせることで、空間方向に離散化された式(9)を得る。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (9)$$

ここで \mathbf{M} は質量行列、 \mathbf{K} は剛性行列、 \mathbf{F} は外力ベクトルである。式(9)に対して時間方向の離散化にNewmarkの β 法を適用することで時間方向の離散化を行い、未知数である変位を求める。

3. 損傷を考慮した流体-構造連成解析手法

VOF法を用いた安定化有限要素法で自由表面流れ解析を行い、等方性損傷モデルを考慮したIGAに基づいたFEMで構造物の損傷解析を行うことで連成解析を行う。

(1) 自由表面流れ解析

VOF法による自由表面流れ解析の支配方程式は、流れ場の支配方程式であるNavier-Stokes方程式(10),連続式(11)

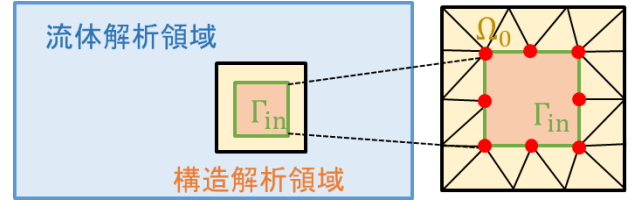


図-3 構造物に作用する流体力の計算

界面関数の支配方程式である移流方程式(12)である。

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_i \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

ここで、 ρ は流体の密度、 u_i は流速、 f_i は物体力、 p は圧力、 μ は粘性係数、 ϕ は界面位置を表現するVOF関数である。VOF関数は各節点において、液体であれば1、界面であれば0.5、気体であれば0と定義される。

支配方程式(10),(11),(12)に対して、空間方向の離散化にSUPG/PSPG法に基づく安定化有限要素法を適用し、時間方向の離散化にCrank-Nicolson法を適用することで、自由表面流れ解析を行う。

(2) 構造物に作用する流体力の算出

構造物に作用する流体力の算出については、図-3に示すよう、流体力を求めたい構造物周りの領域 Ω_0 で、式(10),(11)に対して重み付き残差法を適用し、圧力項と粘性項に部分積分を施すことで弱形式(13)を導く。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} w_i \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_i \right) d\Omega - \int_{\Omega_0} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} p d\Omega \\ & + \int_{\Omega_0} q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega_0} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_{in}} w_i \left\{ -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} n_j d\Gamma \quad (13) \end{aligned}$$

ここで、 w, q はそれぞれ式(10),(11)に対する重み関数、 Γ_{in} は構造物周りの要素境界、 δ はクロネッカーのデルタ、 n_j は要素境界に対して外向きの法線方向ベクトルである。式(13)の右辺の境界積分項が構造物に作用する流体力となるので、左辺項の流速と圧力に流れ場の計算で求めた値をそれぞれ代入することで、構造物に作用する流体力を求める。これにより求まる流体力を構造解析で外力として与えることで連成解析を行う。

なお、本研究では微小変形を仮定しており、流体解析において構造物の変形は考慮しない片方向連成解析とする。

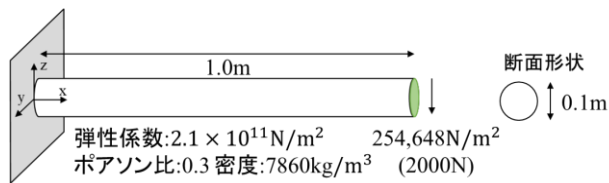


図-4 解析モデル

メッシュ	要素数	自由度数	要素分割と断面形状
a IGA	20	1,107	
b IGA	80	1,968	
c IGA	320	4,428	
d ANSYS	60	1,428	
e ANSYS	260	4,089	

図-5 解析メッシュ

(3) 損傷解析手法

本研究ではコンクリート構造物の損傷解析手法として、車谷らによって提案された等方性損傷モデル³⁾を導入する。等方性損傷モデルでは、式(14)で定義される損傷変数を応力-歪み関係式(5)に組み込むことで、損傷の様子を弾性係数の低下によって間接的に表現する。

$$D(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \exp\left(-\frac{E\kappa_0 h_e}{G_f}(\kappa - \kappa_0)\right) \quad (14)$$

ここで、 κ は変形履歴における等価歪みの最大値、 κ_0 は破壊発生歪み、 E は弾性係数、 h_e は要素サイズ、 G_f は破壊エネルギーである。また、損傷変数 D は0から1の値を取り、0であれば損傷していない、1であれば完全に損傷している状態を示す。等方性損傷モデルの詳細については参考文献³⁾を参照されたい。

4. 数値解析例

数値解析例として、円柱片持ち梁の振動解析と構造物を有する三次元ダムブレイク問題を取り上げる。

(1) 円柱片持ち梁における振動解析

図-4に示す解析モデルにおいて、梁先端での鉛直方向変位を商用解析ソフトによる結果と比較し、荷重除荷後の振動解析を行うことで、IGAの有効性を検証する。

a) 解析条件

図-5に解析メッシュを示す。IGAのメッシュは二次のNURBS要素でメッシュa, b, cはそれぞれ断面を1要素, 4要素, 16要素で表現し、各メッシュでGauss積分の積分点数を2~6として解析を行う。商用解析ソフトとの比較として六面体二次要素(メッシュd, e)を用いてANSYSで解析を行う。また、振動解析の時間増分は 10^{-4} sとした。

表-1 各条件での変位と理論値との相対誤差

単位: 10^{-4} [m]

積分点	メッシュ a	メッシュ b	メッシュ c
2	4.409 (31.82%)	6.568 (-1.59%)	6.464 (0.05%)
3	6.680 (-3.29%)	6.422 (0.69%)	6.449 (0.28%)
4	6.220 (3.82%)	6.429 (0.59%)	6.449 (0.28%)
5	6.262 (3.17%)	6.429 (0.59%)	6.449 (0.28%)
6	6.249 (3.37%)	6.429 (0.59%)	6.449 (0.28%)

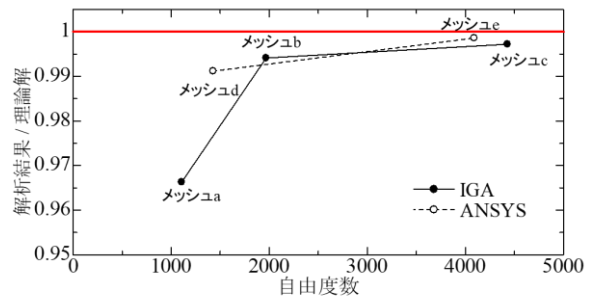


図-6 商用解析ソフトとの比較

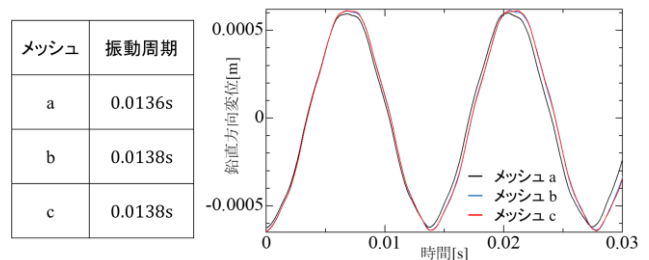


図-7 各メッシュでの振動の様子

b) 解析結果

表-1に各メッシュ、各積分点数で梁先端の鉛直方向変位の理論値との相対誤差を示す。円を1要素で表現しているメッシュaで安定した解析を行うには積分点が4点以上必要であったが、円を4分割以上したメッシュb, cでは3点積分で安定した解析を行えたことに加え、相対誤差が1%未満となる高精度な解析を行うことができた。

図-6に積分点を4点としたIGAの結果とANSYSによる結果の比較を示す。この図から、IGAでは断面を4分割以上することで、商用解析ソフトと同等に高精度な解析を行えることが確認できる。

そして図-7にIGAによる、荷重除荷後の梁先端での振動の様子を示す。本例題における振動周期の理論値は0.0138sであるが、いずれのメッシュにおいても解析結果が理論値と良い一致を示した。

以上より、IGAでは円の断面を1要素として解析しても相対誤差が3%程度の精度で解析を行うことが可能で、円の断面を4分割以上することで、一般的な商用解析ソフトと同等の高精度な解析を行えることが確認できた。

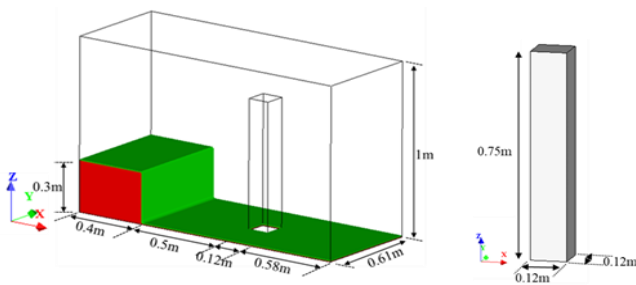


図-8 解析モデル

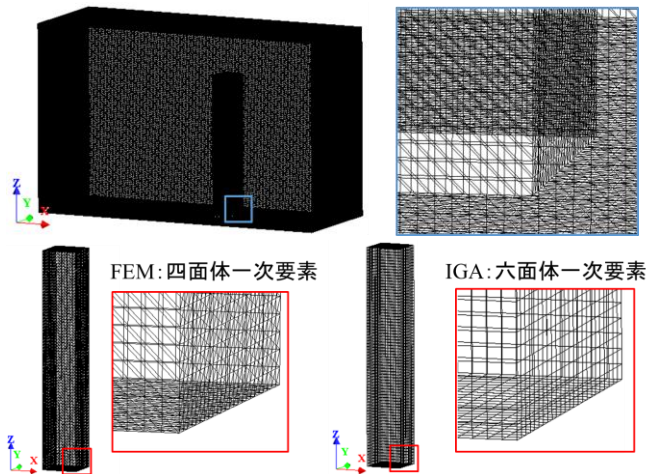


図-9 解析メッシュ

(2) 角柱を有する三次元ダムブレイク問題

図-8に示す解析モデル⁴⁾において、既往の研究⁷⁾で構築されたFEMによる解析結果と比較することで、IGAによる損傷を考慮した連成解析手法の妥当性を検証する。

a) 解析条件

図-9に解析メッシュと拡大図を示す。要素幅は流体領域、構造領域ともに0.005mである。既往の研究では構造解析に四面体一次要素を用いており、IGAでは一次のNURBS要素、六面体一次要素を用いている。

流体解析の境界条件には、壁面、底面及び構造物周りにSlip条件を適用する。また、液体と気体の密度と粘性係数は標準大気圧下で20°Cの値を用いる。

構造解析の境界条件は、構造物の底面における変位を全方向固定。また、構造物の材料定数は一般的なコンクリートの値を用いるが、破壊発生歪みの値を通常よりも 10^{-3} 小さく設定する。時間増分は流体解析、構造解析ともに 10^{-3} sとする。

b) 解析結果

図-10に各時刻における流体の挙動と角柱の損傷の様子を示す。図中のコンター図は損傷係数を示している。0.3s時点で流体が角柱に衝突し、角柱前面の下端が損傷。1.5s時点では角柱の裏側から流体が衝突することで、角柱底部に損傷が進展している様子が両手法で見られ、

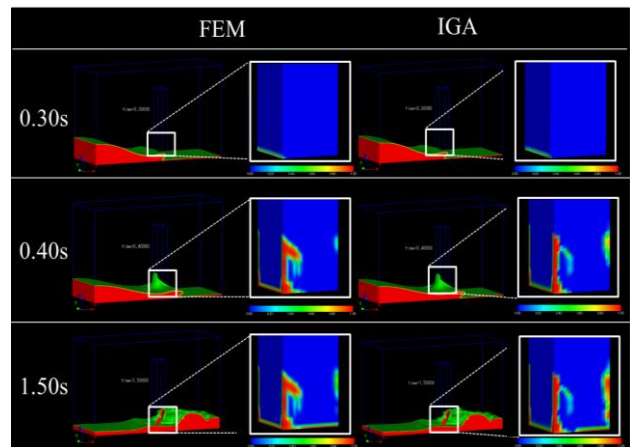


図-10 解析結果

IGAに基づいたFEMによるコンクリート構造物の損傷を考慮した流体-構造連成解析手法の妥当性を確認できた。

5. おわりに

本研究では、IGAに基づいたFEMによる構造解析の有効性の検証、及び損傷を考慮した流体-構造連成解析手法の妥当性の検証を行い、以下の結論を得た。

- IGAでは少ない要素で解析領域を表現し、高精度な解析を行うことが可能。
- 既往の研究による結果と概ねの定量的な一致を確認し、IGAに基づいたFEMによる損傷を考慮した流体-構造連成解析手法の妥当性を確認。

今後の課題として、実験解との比較による本手法の定量的な評価、及び複雑な曲面形状を有するコンクリート構造物での損傷を考慮した連成解析が挙げられる。

参考文献

- 1) 金澤功樹, 凌国明, 車谷麻緒, 樫山和男: 等方性損傷モデルを用いた三次元流体-構造連成解析手法の構築, 第47回土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集, I-19, 2020.
- 2) T.J.R.Hughes, J.A.Cottrell and Y.Bazilevs: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.
- 3) 車谷麻緒, 寺田賢二郎, 加藤準治, 京谷孝史, 樫山和男: コンクリートの破壊力学に基づく等方性損傷モデルの定式化とその性能評価, 日本計算工学会論文集, 13巻, 2013, No. 20130015.
- 4) M. Gomez and A. Dalrymple, Using a threedimensional smoothed particle hydrodynamics method for wave impact on a tall structure, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, Vol.130, pp.63-69, 2004.