

有限要素法によるダイラタント流体の流れの数値解析

Numerical Analysis of Dilatant Fluid Flow by FEM

精密工学専攻 5号 伊東 亘
Wataru Ito

1. 序論

流体のせん断ひずみが増加するとき粘性応力が加速度的に増加する現象をダイラタンシーという。身近な例として砂浜を歩いたとき、足の周りが乾いたように感じられる現象はダイラタンシーの効果である。ダイラタンシーを起こす流体はダイラタント流体 (Shear Thickening Fluid) と呼ばれ、コーンスターチの水溶液がよく取り上げられる。この流体を強く握ると個体のように硬化して流動性を失う。握力を緩めると再び液体のように流れ出す。この性質は飛散物からの防御や複合素材に利用する研究が行われており⁽¹⁾、既に自動車のヘッドレストなどに利用されている。ダイラタント流体の解析にあたっては、液体を浸透させた繊維に弾丸を打ち込む様子を観察するなどの実験的手法がとられてきた。このような手法は、実験に危険が伴い、また評価対象とする液体の環境を一定に保つことが難しい。ダイラタント流体の産業利用に際して、数理モデルに基づいた数値解析が有効といえる。ダイラタント流体の性質はせん断ひずみ速度と粘性応力の関係で表現される。これらの間の関係はレオロジーまたは流動学と呼ばれる学問で扱われる。レオメータと呼ばれる装置で得られる実験値に基づいた複数の数理モデルが提唱されている。その中から本研究ではひずみ速度と粘性応力が Fig.1 に示すような特性を持つ、べき乗則モデルを採用する。このモデルはべき乗則指数 n を変化させることにより、非ニュートン流体およびニュートン流体を表現することができ

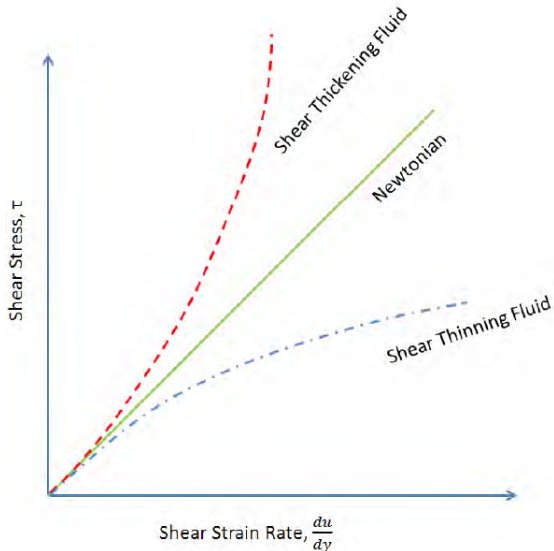


Fig.1 Relationship between shear stress and shear strain rate

る。この特徴は後述する混相流の解析に対して有利である。ダイラタント流体に対しては $n=1.01\sim 2.5$ 程度の値が用いられている⁽²⁾。ダイラタント流体は非ニュートン流体であり、数値解析において粘性応力の計算をする際に速度が未知であることが

解析を困難にしている。本研究では、べき乗則モデルと SMAC 法 (Simplified Marker And Cell Method) を用いる。ダイラタント流体の数値解析手法を構築する事を目的とする。

2. 支配方程式

2.1 流体の支配方程式

流れの支配方程式は次式で表されるコーシーの運動方程式

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

と連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

である。ここで ρ は密度、 g は重力加速度を表す。 $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ は応力テンソルの成分で、応力テンソル τ と変形速度テンソル \mathbf{D} の間には次式の関係がある。

$$\tau = 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D} \quad (4)$$

ここで関数 $\eta(\dot{\gamma})$ は応力と変形速度とを結びつける粘度である。本研究ではこれにべき乗則モデルと呼ばれるモデルを採用する。

2.2 べき乗則モデル

前項で述べた関数 $\eta(\dot{\gamma})$ はダイラタント流体を表現するために用いる計算モデルである。この関数は次式で定義される。

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \sqrt{2tr\mathbf{D}^2} \\ &= \sqrt{2(\dot{\gamma}_{xx}^2 + 2\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yy}^2)} \\ &= \sqrt{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

ここに K は粘性係数に相当するコンシステンシー、 n は流体の特性を決める流体に固有の値でべき乗則指数 (Power-law Index) とよばれる。 n の値は次のように流体の特性に対応する。

$$\begin{cases} \text{ダイラタント流体 (Shear Thickening)} & (n > 1) \\ \text{ニュートン流体 (Newtonian)} & (n = 1) \\ \text{疑塑性流体 (Shear Thinning)} & (n < 1) \end{cases} \quad (7)$$

3. 離散化

3.1 空間方向の離散化

空間方向への離散化には有限要素法を用いる。有限要素は三角形要素とする。Fig.3 のように、要素を4つの小三角形に分割

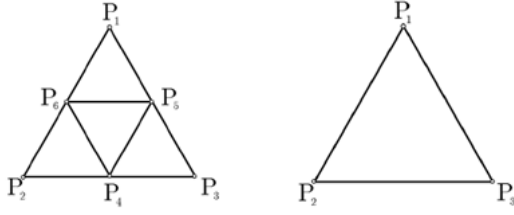


Fig.2 Bercovier-Pironneau elements

し、各小三角形内で速度とマスク関数を x, y の 1 次多項式で近似する。圧力は要素全体で x, y の 1 次多項式で近似する。

速度が x, y の 1 次多項式で表されるとき、その偏微分で計算される η の値はスカラーになる。速度は小三角形について定義されるが、 η の値は三角形要素で一定とする。式 (1)-(3) を離散化すると次のようになる。

$$\bar{M} \frac{dU}{dt} + A(U, V)U - H_x P + DU - F(\hat{U}_b - U) - G_x = 0 \quad (8)$$

$$\bar{M} \frac{dV}{dt} + A(U, V)V - H_y P + DV - F(\hat{V}_b - V) - G_y = 0 \quad (9)$$

$$H_x^T U + H_y^T V = 0 \quad (10)$$

式中の行列およびベクトルについて、 \bar{M} は集中化された質量行列、 U, V は速度ベクトル、 $A(U, V)$ は速度ベクトルを変数に持つ移流項、 D は拡散項、 P は圧力ベクトルを表す。

3.2 時間方向の離散化と時間進行法

時間方向に離散化した支配方程式は次式のようにになる。

$$\bar{M} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + A(U^n, V^n)U^n - H_x P^{n+1} + DU - F(\hat{U}_b - U) - G_x = 0 \quad (11)$$

$$\bar{M} \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} + A(U^n, V^n)V^n - H_y P^{n+1} + DV - F(\hat{V}_b - V) - G_y = 0 \quad (12)$$

$$H_x^T U^{n+1} + H_y^T V^{n+1} = 0 \quad (13)$$

この式において、時刻 t^{n+1} における圧力は未知量であるため、時刻 t^n における圧力で置き換えることで未知量を速度のみとし、時刻 t^{n+1} における速度の予測値を計算すると次式を得る。

$$\bar{M} \frac{U^* - U^n}{\Delta t} + A(U^n, V^n)U^n - H_x P^n + DU - F(\hat{U}_b - U) - G_x = 0 \quad (14)$$

$$\bar{M} \frac{V^* - V^n}{\Delta t} + A(U^n, V^n)V^n - H_y P^n + DV - F(\hat{V}_b - V) - G_y = 0 \quad (15)$$

予測子 U^*, V^* は連続の方程式を満たすとは限らないため、連続の方程式を満足するように予測子に修正を加える。式 (14) か

ら式 (17)、式 (15) から式 (18) を辺々引き算すると次式を得る。

$$\bar{M} \frac{U^{n+1} - U^*}{\Delta t} = H_x (P^{n+1} - P^n) \quad (16)$$

$$\bar{M} \frac{V^{n+1} - V^*}{\Delta t} = H_y (P^{n+1} - P^n) \quad (17)$$

ここで圧力増分ベクトル ϕ を次のように定義する。

$$\phi = P^{n+1} - P^n \quad (18)$$

この修正のために与える値を修正子と呼ぶ。式 (19),(20) の両辺に左から $H^T \bar{M}^{-1}$ をかけて辺々を足し合わせ、式 (16) を考慮すると次式のように圧力の修正量 ϕ を用いたポアソン方程式 (Poisson's equation) が得られる。

$$(H_x^T \bar{M}^{-1} H_x + H_y^T \bar{M}^{-1} H_y) \phi = -\frac{1}{\Delta t} (H_x^T U^* + H_y^T V^*) \quad (19)$$

ポアソン方程式を解くことで速度の予測値から圧力の修正量が得られる。この方程式の求解には全体行列を必要としないマトリックスフリー共役勾配法を用いる。

4. 計算方法

4.1 ダイラタント流体の評価方法

ダイラタント流体の耐衝撃性能を評価するための計算モデルを提示する。固体の着水問題に対する計算モデルを Fig.3 に示す。Fig.3 において Γ_1, Γ_2 は壁面境界、 Γ_3 は開放境界である。

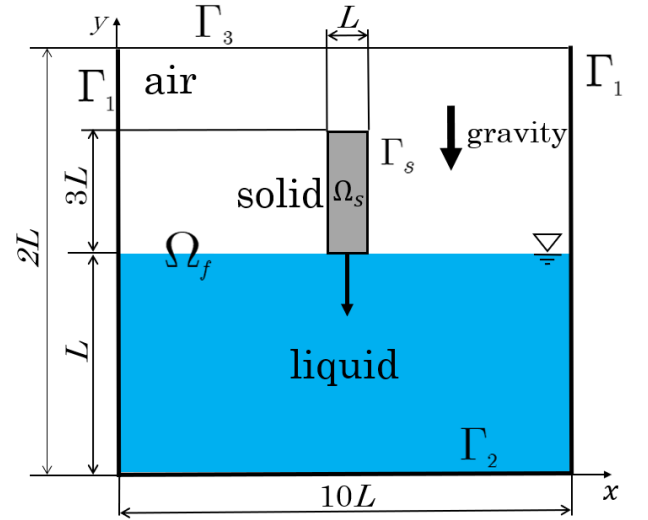


Fig.3 Computational model

水槽の内部には液体としてダイラタント流体が、気体として空気が収められている。物体ははじめ気体中に存在しその後、初速度をもって液体に着水する。この計算の解析対象は水槽の底面に設置する観測点における圧力である。ダイラタント流体はせん断増粘の性質を持つため、物体の着水直後は物体の付近で粘性が大きくなると考えられる。その結果、観測点における圧力は高い値をもつ事が予想される。この計算によりダイラタント流体の耐衝撃性能を評価する。

4.2 連成手法

気液 2 相の識別を行うための手法として VOF 法を用いる。VOF 法では要素内における液体の体積比率を示す VOF 関数

$$\phi = \begin{cases} 0 & (\text{気体}) \\ 1 & (\text{液体}) \end{cases} \quad (20)$$

を用いる。 $0 < \phi < 1$ のとき、その要素内に自由表面が存在することを意味する。VOF 関数 ϕ を用いて密度 ρ と粘性係数 μ は次式で決定される。

$$\rho(\phi) = \rho_g(1 - \phi) + \rho_l\phi \quad (21)$$

$$\mu(\phi) = \mu_g(1 - \phi) + \mu_l\phi \quad (22)$$

ここで ρ_g, ρ_l は順に気体、液体の密度であり、 μ_g, μ_l は順に気体、液体の粘性係数を示す。VOF 関数 ϕ は移流方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi = 0 \quad (23)$$

に従って変化する。式 (13) の解法には特性曲線法⁽⁵⁾を用いる。2.2 節で述べたべき乗則モデルにおける n の値は VOF 関数 ϕ の値を用いて切り替えを行う。切り替えに用いる閾値には $\phi = 0.5$ を使用する。

固体と流体の識別には Penalization 法を用いる。この手法では物体の占める領域を仮想的な流体で置き換え、この仮想流体に $u = \hat{u}_b, v = \hat{v}_b$ という条件を課す。マスク関数 χ を次式で定義する。

$$\chi = \begin{cases} 0 & (\Omega_f \text{内}) \\ 1 & (\Omega_s \text{内}) \end{cases} \quad (24)$$

これらを用いてペナルティ項 $\rho\lambda\chi(\hat{u}_b - u), \rho\lambda\chi(\hat{v}_b - v)$ を式 (1), (2) に組み込む。 λ はペナルティ係数である。ペナルティ項はマスク関数 χ により Ω_s 内でのみはたらき、 Ω_s 内で $u \neq \hat{u}_b, v \neq \hat{v}_b$ の場合には固体外部の流体に対する外力として作用する。したがって仮想的に固体が存在することになる。よってペナルティ項を組み込んだ式 (1), (2) と式 (3) を Ω_s と Ω_f を合わせた領域で解く。これにより計算領域全域を流体領域をみなすことができ、固体の移動によるメッシュの変更を必要としない。そのため計算コストが大きくなる利点がある。

気液固 3 相流の計算手順を以下に示す

1. 物体領域内の節点を調べ、各節点におけるマスク関数 χ の値を定める。
2. VOF 関数の分布から要素ごとに物性値を求める。
3. 初期条件として時刻 n における速度と圧力を与え、粘性応力と、速度と圧力の予測子を求める。このとき物性値により粘性項の計算式を切り替える。
4. Poisson 方程式を SCG 法で求解し圧力の増分を求める。
5. 時刻 n における速度、圧力を求める。
6. VOF 関数の移流方程式を解き、新たな分布を求める。
7. 物体の流体力を求め、運動方程式を解いて速度と位置を更新する。
8. 時刻を Δt だけ進め、手順 1 へ戻る。

5. 計算結果

5.1 ポアズイユ流れの実験結果

ダイラタント流体の耐衝撃性能を評価する前に、2.2 節で述べたべき乗則モデルが正しく作用している事を確認する。計算モデルは 2 次元におけるポアズイユ流れである。ポアズイユ流れの計算モデルを Fig.4 に示す。

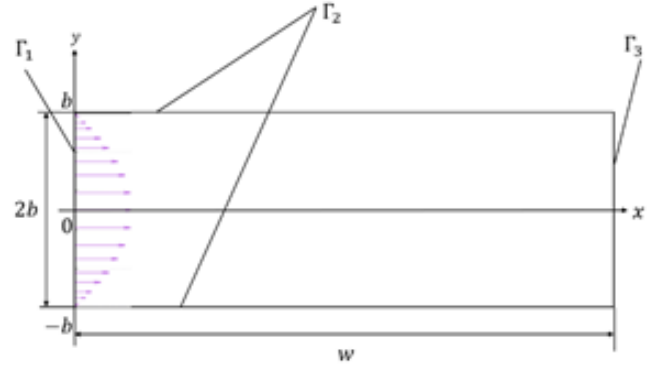


Fig.4 Computational model for poiseuille flow

$w = 6\text{m}$, $b = 1\text{m}$ である。ここで Γ_1 は流入境界、 Γ_2 は壁境界、 Γ_3 は流出境界である。 Γ_1 においては Fig.3 に示すように放物線状の流速分布を与える。十分に時間が経過したときの、下流域における流速分布を解析対象とする。ダイラタント流体においてはこの流速分布は流入境界で与えた分布よりも先の尖った形状になることが知られている。コンシステンシーの値を $K = 1.31 \times 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$ 、べき乗則指数の値を $n = 2$ とした場合のポアズイユ流れの計算結果を Fig.5 に示す。時間増分は $\Delta t = 10^{-5}\text{s}$ である。

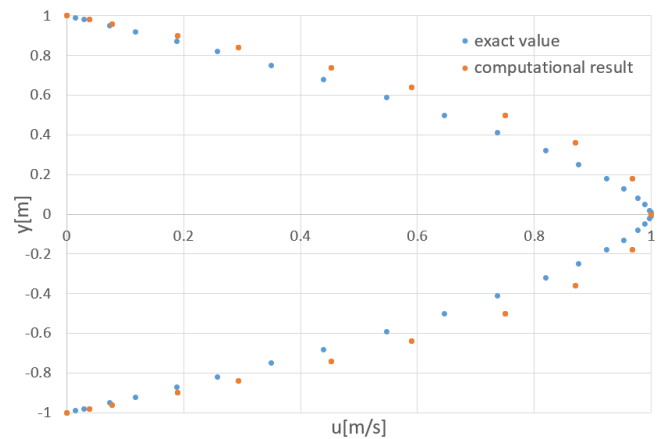


Fig.5 Velocity distribution of Poiseuille flow at $t = 1\text{s}$

結果では、 $t = 1.0\text{s}$ における計算結果と厳密解を表示している。厳密解と比較するとやや広がりのある形状の速度分布がみられるが、定性的には近い計算結果を得られたといえる。計算は 10000 ステップまで行い、最後まで安定して計算できることが確認された。ポアズイユ流れの解析によりべき乗則モデルの作用が確認された。

5.2 矩形物体の着水問題の実験結果

4.1 節で述べた矩形物体の着水問題の計算結果を時刻ごとに Fig.6 に示す。Fig.3 の計算モデルにおいて $L = 0.08\text{m}$ とした。計算に用いたコンシステンシーの値は $K = 1.31 \times 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$ 、べき乗則指数の値は $n = 2$ である。物体の質量は 10.22kg とし、初速度 0.33m/s で鉛直下方向に落下させた。気体は空気とし、密度は 1.21kg/m^3 、粘性係数は $1.81 \times 10^{-5}\text{Pa}\cdot\text{s}$ である。時間増分は $\Delta t = 10^{-5}\text{s}$ とした。

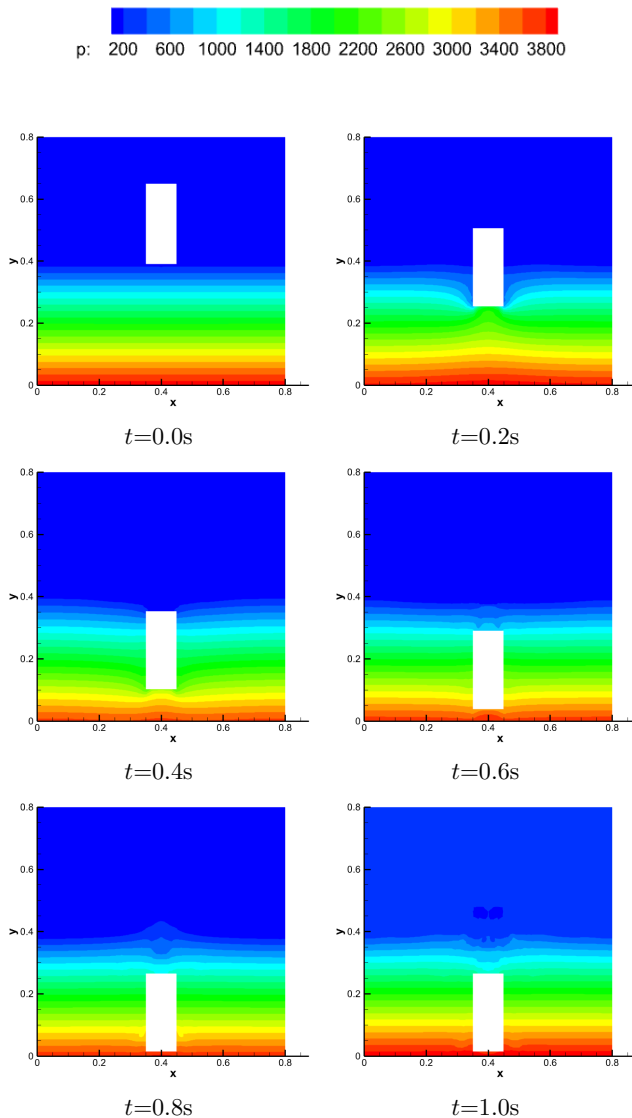


Fig.6 Pressure change due to water landing by a object

Fig.6 より $t = 0.2\text{s}$ 以降で物体底面の圧力が周囲より高い値になっていることが確認できる。また物体の上面においては周囲より低い圧力になっている事が確認できる。計算は 100000 ステップ実行し、最後まで安定して計算する事ができた。Fig.7 に $n = 2.0$ とした場合の水槽の底面における圧力の時間変化を示す。Fig.7 から物体の着水直後において水槽の底面における圧力が急激に上昇している事が確認出来る。水などのニュートン流体と比較を行いたい所であったが、べき乗則指数の値を $n = 1$

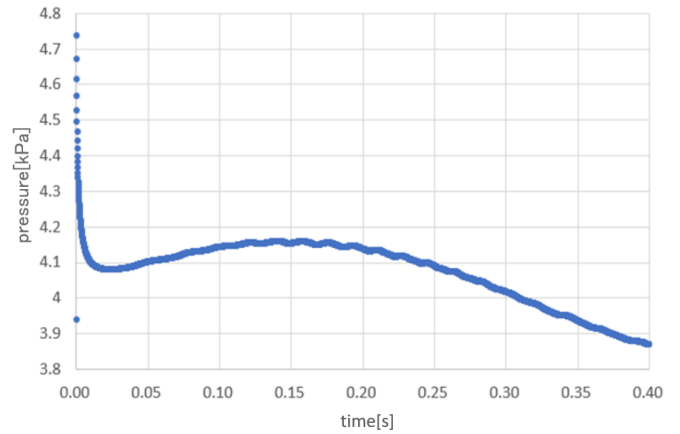


Fig.7 Time change in pressure at the bottom of the tank

とした場合の計算は安定しなかった。 $n = 1$ とした場合には支配方程式はナビエ・ストークス方程式なるが、これを数値計算する際には人口粘性項を用いる場合が多い。本研究ではべき乗則モデルによりダイラタント流体のせん断増粘を表現するため人口粘性を導入していないことが $n = 1$ とした場合に計算が安定しないとして挙げられる。

6. 結論

本研究では、ダイラタント流体の耐衝撃性能を評価するために必要な非ニュートン流体の計算手法を、べき乗則モデルを用いて構築した。その結果、ポアズイユ流れの計算によりダイラタント流体 ($n > 1$) の領域においてべき乗則モデルの作用を確認できた。また矩形物体の着水問題の解析を行った。ダイラタント流体が他の流体と比較して衝撃を吸収したり飛散物の進行を抑制する効果を示すためには、液体の種類をニュートン流体とした場合の計算が安定しない問題をを解決する必要がある。またより実際の利用環境に近い数値計算を行うため、弾性体の内部にダイラタント流体が収められた状態を想定して、弾性体との連成計算手法を構築する事が課題である。

参考文献

- (1) <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.990.2102rep=rep1type=pdf>.
- (2) R. G. Egres Jr., M. J. Decker, C. J. Halbach, Y. S. Lee, J. E. Kirkwood, K. M. Kirkwood, N. J. Wagner, E. D. Wetzel, Forced convective heat transfer between assemblages of spherical particles and power - law non - Newtonian liquids with velocity slip at the interface, Transformational Science and Technology for the Current and Future Force, (2006), pp. 264-271 .
- (3) Dong Zhaoxia, Li Yahua, Lin Meiqin and Li Mingyuan, Rheological properties of polymer micro-gel dispersions, Petroleum Science 6 (2009), pp.294-298.
- (4) 中山司, 流体力学—非圧縮性流体の流れ学—, 森北出版, 2013.
- (5) 内記大輔, VOF 法と Penalization 法を併用した多相連成解析, 2018.