

SPH 法による砥粒流動加工の数値シミュレーション

Numerical simulation of abrasive flow machining by the SPH method

精密工学専攻 16号 加藤 亮馬

Ryoma Kato

1. はじめに

近年, 設置スペースの削減, 軽量化, ために, 工業製品の小型化, 精密化 が急速に発展している. それに伴い 精密 部品に対応した高精度かつ高効率の加工技術が求められている.

Fig.1 に示す 砥粒流動加工 (abrasive flow machining, AFM) は 流体内に砥粒を混練した粘弾性の研磨剤を被加工材表面に流すことで面研磨などを行う加工技術である. AFM は流体の流速, 粘性や砥粒のサイズ, 形状, 混合率を調整することで被加工材の除去量を細かく調整することができる. また, 流体であるため自由局面の研磨にも対応可能であり, 研磨面に垂直な力が加わらないので材料に与えるダメージが非常に小さいという特徴を持っている. これらの要素から AFM は精密部品の加工に非常に適している.

AFM では研磨流体の流体特性や砥粒の形状, 混合率などの様々なパラメータによって研磨除去量が決定されるため, 理想の研磨を行うためには各被加工材ごとにこれらのパラメータをそれぞれ決定する必要がある. パラメータを決定するにあたって, 実験的なアプローチでは必要なパラメータが多いため時間と費用が掛かりすぎる点, オペレーターのトライアンドエラーに頼る部分が多い点などの課題が挙げられる. そこで, AFM の数値解析を行うことで, パラメータの決定に大きく貢献することができ, これらの課題点を解決できると考えた.

AFM を対象とした数値解析に関する研究はいくつか行われているが, そのほとんどが研磨流体が被加工材に与える力に着目しており, 被加工材と研磨流体の相互干渉を表現したものはない.

以上のことを踏まえて, 本研究では, 粒子法による砥粒流動加工の解析手法を構築し, 研磨現象をシミュレーションにより表現することを目的とする.

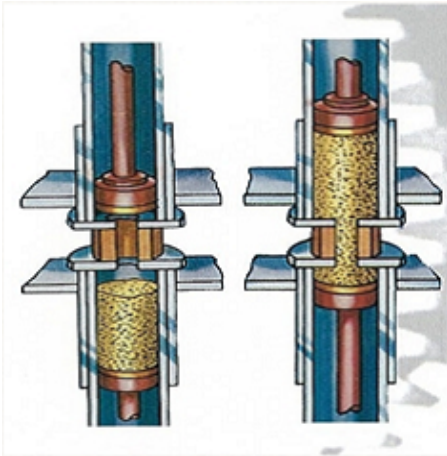


Fig.1 Abrasive flow machining⁽¹⁾

2. 基礎方程式

2.1 流体の支配方程式

現象を 2 次元とする. 計算において扱う水を, 弱い圧縮性をもつニュートン流体とする. 流れの支配方程式は, 連続の方程式

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (1)$$

と運動方程式

$$\frac{Dv^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + f^\alpha \quad (2)$$

そして, 状態方程式

$$p = p_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (3)$$

である. ここで, t は時間, ρ は密度, x^α は直角座標 ($\alpha = 1, 2$), v^α は速度の x^α 成分, p は圧力, $\sigma^{\alpha\beta}$ は応力テンソルの成分, f^α は外力の x^α 成分を表す. p_0 と ρ_0 は基準状態の圧力と密度である. また D/Dt はラグランジュ微分演算子である. γ は圧縮性の度合いを表すパラメータで, 本研究では Monaghan⁽²⁾ を参考に $\gamma = 7$ とする. 物理量の上付き添字 α, β に対しては総和規約を適用する. 応力テンソルの成分 $\sigma^{\alpha\beta}$ は,

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \mu \left(\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\gamma} \delta^{\alpha\beta} \right) \quad (4)$$

で表される. ここで $\delta^{\alpha\beta}$ はクロネッカのデルタである. μ は流体の粘性係数を表す.

2.2 固体の支配方程式

被加工材は 2 次元線形弾性体とする. 被加工材の運動と変形に対する支配方程式は, 連続の方程式 (1) と運動方程式 (2) そして, フックの法則を表す状態方程式

$$p = K\eta = K \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \quad (5)$$

である. ここで, K は体積弾性率, η は体積ひずみである. 固体の応力テンソルの成分 $\sigma^{\alpha\beta}$ は, 圧力 p と偏差応力テンソルの成分 $s^{\alpha\beta}$ を用いて次のように表される.

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta} \quad (6)$$

変形時の物体の回転を考慮した Jaumann stress rate⁽³⁾ を用いると, 偏差応力の時間変化率 $Ds^{\alpha\beta}/Dt$ が

$$\frac{Ds^{\alpha\beta}}{Dt} = 2G \left(\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta^{\alpha\beta} \dot{\varepsilon}^{\gamma\gamma} \right) + s^{\alpha\gamma} \omega^{\beta\gamma} + s^{\gamma\beta} \omega^{\alpha\gamma} \quad (7)$$

で与えられる. ここで, G は横弾性係数である. $\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ はひずみテンソルの成分の時間変化率, $\omega^{\alpha\beta}$ は回転テンソルの成分であり, それぞれ

$$\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \right), \quad \omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \quad (8)$$

で定義される.

3. SPH 法による離散化

3.1 SPH 法の概要

SPH 法は連続体を粒子の集合とみなし、この粒子上で任意の時間における物理量を計算する方法である。方法の概要を以下にまとめる。

空間内の任意の位置 \mathbf{r} での物理量 $\phi(\mathbf{r})$ は積分表現

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (9)$$

で与えられる。ここで $\delta(\mathbf{r})$ はディラックのデルタ関数である。ディラックのデルタ関数のような不連続関数は数値計算には適さないため、SPH 法ではデルタ関数の代わりに内挿カーネルと呼ぶ連続関数 W を用いる。本研究では、次のカーネル関数を用いる。

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \frac{1}{h^2} f\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{h}\right) \quad (10)$$

ここに、 h はカーネルの広がりを表すパラメータである。関数 f は

$$f(s) = \begin{cases} \frac{10}{7\pi} \left(1 - \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{4}s^3\right) & 0 \leq s < 1 \\ \frac{5}{14\pi} (2-s)^3 & 1 \leq s < 2 \\ 0 & s \geq 2 \end{cases} \quad (11)$$

のような 3 次のスプライン関数⁽²⁾ で与える。ディラックのデルタ関数を内挿カーネル W で置き換えると、 $\phi(\mathbf{r})$ に対する近似 $\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle$ が

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \int \phi(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' \quad (12)$$

のように与えられる。連続体を N 個の粒子の集合体と考えると、式 (12) は

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N \phi_j \frac{m_j}{\rho_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \quad (13)$$

のように離散化される。ここに、 m_j 、 ρ_j 、 \mathbf{r}_j はそれぞれ j 番目の粒子の質量、密度、位置ベクトルを表し、 $\phi_j = \langle \phi(\mathbf{r}_j) \rangle$ である。前節で示した支配方程式を離散化するために、物理量の微分形が必要となる。物理量 ϕ の勾配 $\partial\phi/\partial x^\alpha$ は、カーネルの勾配を計算することで得られる。すなわち、式 (13) より

$$\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}(\mathbf{r}) \right\rangle = \sum_{j=1}^N \phi_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h)] \quad (14)$$

となる。さらに、式 (13)、(14) において $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ として両式を粒子 i の位置に適用すると、

$$\phi_i = \langle \phi(\mathbf{r}_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \phi_j \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij} \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \right)_i = \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}(\mathbf{r}_i) \right\rangle = \sum_{j=1}^N \phi_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (16)$$

となる。ここに、 $W_{ij} = W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$ である。式 (15) と (16) の総和計算は全粒子について行うのではなく、Fig. に示すように、粒子 i を中心とする半径 R の円 (これを影響円と呼ぶ) の内部に含まれる粒子のみを対象とする。本研究では $R = 2h$ とする。

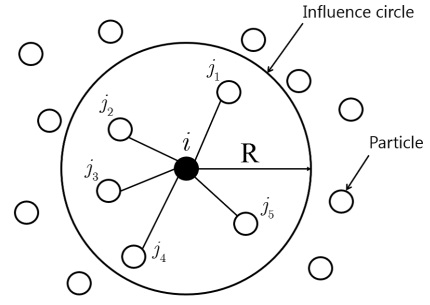


Fig.2 Particles and influence circle

3.2 離散化

連続の方程式 (1) を離散化した式は

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (17)$$

となる。ここに、 $v_{ij}^\alpha = v_i^\alpha - v_j^\alpha$ である。この式に、圧力の数値振動を抑える効果があるとされる人工拡散項⁽⁴⁾ を加えて、式 (17) を

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \delta h c_0 \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \psi_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (18)$$

$$\psi_{ij}^\alpha = 2(\rho_i - \rho_j) \frac{x_{ij}^\alpha}{x_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha + \lambda h_{ij}^2} - \left[\langle \nabla \rho \rangle_i^\alpha - \langle \nabla \rho \rangle_j^\alpha \right] \quad (19)$$

で置き換える。ここで、 c_0 は音速、 δ は人工拡散項の大きさを調整するパラメータであり、本研究では $\delta = 0.1$ としている。 $x_{ij}^\alpha = x_i^\alpha - x_j^\alpha$ である。 $\langle \nabla \rho \rangle^\alpha$ は再正規化した密度勾配で次のように定義される。

$$\langle \nabla \rho \rangle_i^\alpha = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (\rho_j - \rho_i) L_i^{\alpha\beta} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (20)$$

ここに、 $L_i^{\alpha\beta}$ は次式の行列 \mathbf{L}_i の α 行 β 列の成分である。

$$\mathbf{L}_i = \left[\sum_{j=1}^N (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \otimes \nabla_i W(x_j^\alpha) dV_j \right]^{-1} \quad (21)$$

運動方程式 (2) を離散化した式は

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} - \delta^{\alpha\beta} \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + f_i^\alpha \quad (22)$$

となる。ここで Π_{ij} は人工粘性⁽⁵⁾ を表し、圧力の数値振動と粒子同士のスリ抜けを防ぐ効果を持ち、次式で表される。

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{A \bar{c}_{ij} \theta_{ij} + B \theta_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha < 0 \\ 0 & v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha \geq 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\theta_{ij} = \frac{h_{ij} v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha}{x_{ij}^\beta x_{ij}^\beta + 0.01 h_{ij}^2} \quad (24)$$

ここで \bar{c}_{ij} 、 \bar{h}_{ij} はそれぞれ粒子 i と粒子 j の音速とカーネルの大きさの平均を表す。 A 、 B は人工粘性の大きさを調整するパ

ラメータであり、本研究では小野ら⁽⁶⁾を参考に $A = B = 1.0$ としている。

固体の運動方程式には、張力の不安定性を取り除く人工応力項⁽³⁾ $R_{ij}^{\alpha\beta} F_{ij}^n$ を付加し、式 (22) を

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = & \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} - \delta^{\alpha\beta} \Pi_{ij} \right. \\ & \left. + R_{ij}^{\alpha\beta} F_{ij}^n \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + f_i^\alpha \end{aligned} \quad (25)$$

とする。ここで F_{ij}^n は

$$F_{ij}^n = \left(\frac{W(r_{ij})}{W(d_0)} \right)^n \quad (26)$$

と定義される。 $r_{ij} = r_i - r_j$ であり、 d_0 は粒子間距離の初期値を表す。 n は、人工応力の大きさを調整するパラメータである。 $R_{ij}^{\alpha\beta}$ は粒子の主応力で計算されるパラメータである。

4. 計算技法

4.1 壁粒子の導入

本研究では、変形を考慮しない剛体を表現するとき剛体粒子⁽⁷⁾を用いている。AFM では Fig.1 のピストン部と研磨剤を覆うシリンダー壁に該当する。

剛体に接する流体粒子に対しては、境界条件としてすべり無し条件を課し、流体粒子から剛体粒子へ圧力の補間計算を行う。剛体粒子の速度成分と圧力はそれぞれ次式で計算される。

$$\tilde{v}_{w-f}^\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^\alpha W_{wi}}{\sum_{i=1}^N W_{wi}} \quad (27)$$

$$v_{w-f}^\alpha = 2v_w^\alpha - \tilde{v}_{w-f}^\alpha \quad (28)$$

$$p_{w-f} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i W_{wi} + (g^\alpha - a_w^\alpha) \cdot \sum_{i=1}^N \rho_i x_{wi}^\alpha W_{wi}}{\sum_{i=1}^N W_{wi}} \quad (29)$$

ここに下付き添字 $w-f$ は注目する壁粒子が流体粒子に対して持つ量であることを意味し、下付き添字 i は、その壁粒子を中心とする影響円内に含まれる流体粒子に関する量であることを意味する。 N は影響円内の粒子の数を表す。また、 g^α は重力加速度の x^α 成分、 v_w^α 、 a_w^α は剛体粒子が実際に持つ速度と加速度である。 $W_{wi} = W(r_w - r_i, h)$ 、 $x_{wi}^\alpha = x_w^\alpha - x_i^\alpha$ である。剛体に接する固体粒子について、剛体粒子の速度 v_{w-s} 、圧力 p_{w-s} も流体粒子同様、式 (27)-(29) を用いて計算する。ここに下付き添字 $w-s$ は注目する。剛体粒子が固体粒子に対して持つ量であることを意味する。剛体の密度 ρ_{w-f} 、 ρ_{w-f} は流体、弾性体密度の初期値とする。

4.2 時間積分法

連続の方程式 (1)、運動方程式 (2)、偏差応力 $s_i^{\alpha\beta}$ の発展方程式 (7)、そして粒子の位置を更新するための式 $Dx_i^\alpha/Dt = v_i^\alpha$ を時間積分する方法は次のとおりである。

速度成分 v_i^α 、応力テンソルの成分 $\sigma_i^{\alpha\beta}$ 、密度 ρ_i 、粒子座標 x_i^α を記号 ϕ で代表させて、これらの式を、

$$\frac{D\phi}{Dt} = F(\phi) \quad (30)$$

のように表す。時間増分を Δt として、時刻 $t^n = n\Delta t$ の値 ϕ^n を知って時刻 $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ の値 ϕ^{n+1} を求めるために、次の2段階の計算を行う。

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} F(\phi^n) \quad (31)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t F(\phi^{n+\frac{1}{2}}) \quad (32)$$

5. 計算結果

5.1 液柱崩壊による弾性板変形

流体、固の相互干渉の計算精度を検証するため液中崩壊によって弾性平板が変形する様子の計算を行った。Fig.3 に計算モデルと計算結果、Fig.4 に弾性平板の垂直、水平方向の変位を実験値⁽⁸⁾と比較したグラフを示す。流体は水を想定し、弾性平板は密度 $\rho = 1100\text{kg/m}^3$ 、ヤング率 $E = 1.2\text{MPa}$ 、ポアソン比を 0.4 とする。Fig.3 から液柱崩壊によって弾性平板が変形する様子を再現できていることがわかる。また、Fig.4 から実験値とほぼ同じように弾性平板が変形していることが確認できるため、流体、固体の相互干渉の計算は正しく計算ができていると考えられる。

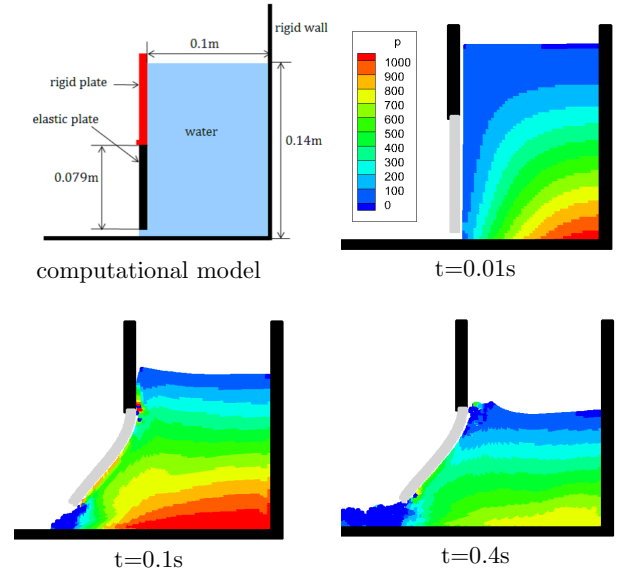


Fig.3 Deformation of an Elastic plate due to liquid column collapse

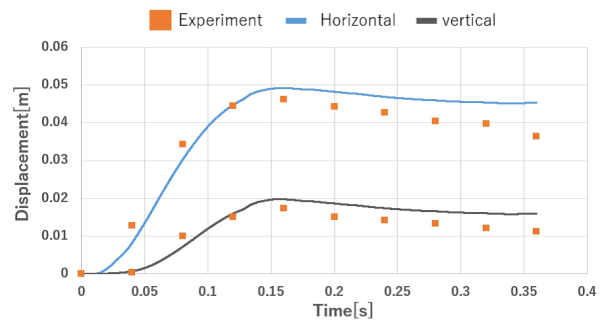


Fig.4 Time histories of the displacement of the free end of an elastic plate

5.2 砥粒流動加工のシミュレーション

Fig.5 に AFM の研磨現象を模した計算モデルと計算結果を示す。カラーコンタは圧力の分布を示す。上下のピストンを動かすことで、研磨剤を流動させて両端灰色部の被加工材を研磨する。1 サイクルにおけるピストン速度変化を Fig.6 に示す。上方向への速度を正として、このサイクルを繰り返す。研磨剤は砥粒と水を複合した混合相として流体で表し、密度 $\rho = 1300\text{kg/m}^3$ 、粘性係数 $\mu = 1.307 \times 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$ とする。被切削材は木材を想定し、密度 $\rho = 830\text{kg/m}^3$ 、体積弾性率 $K = 59\text{MPa}$ 、せん断係数 $G = 17.6\text{MPa}$ とする。流体粒子数は 1525 個、弾性体粒子数は 192 個、剛体粒子数は 1236 個とする。また、研磨剤が被切削材に及ぼす力は摩擦力のみと仮定し、摩擦力 f_i を

$$f_i^\alpha = \frac{\mu_A}{m_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} p_j d_j \frac{v_{ij}^\alpha}{|\mathbf{v}_{ij}|} W_{ij} \quad (33)$$

で表す。 μ_A は砥粒の摩擦係数、 \mathbf{v}_{ij} は流体粒子の弾性体粒子に対する相対速度である。この摩擦力を式 (22)(25) の外力項に付加する。Fig.5 からピストンの挙動に合わせて研磨剤が流動し、ピストン付近の圧力が高くなっているのがわかる。 $t = 0.70 - 1.65\text{s}$ はピストンの切り替えしにあたるが、ピストンの挙動に合わせて圧力分布も大きく変化していることがわかる。以上のことから研磨剤の挙動は正しく計算できていると考えられる。また、 $t = 3.9\text{s}$ において Fig.7 のように研磨剤によって弾性体表面の粒子が研磨されたかのように剥離している様子も確認することができた。クーロン摩擦の影響により、流体粒子と接する弾性体粒子の応力が高くなり、弾性体表面の一部粒子が剥離したと考えられる。

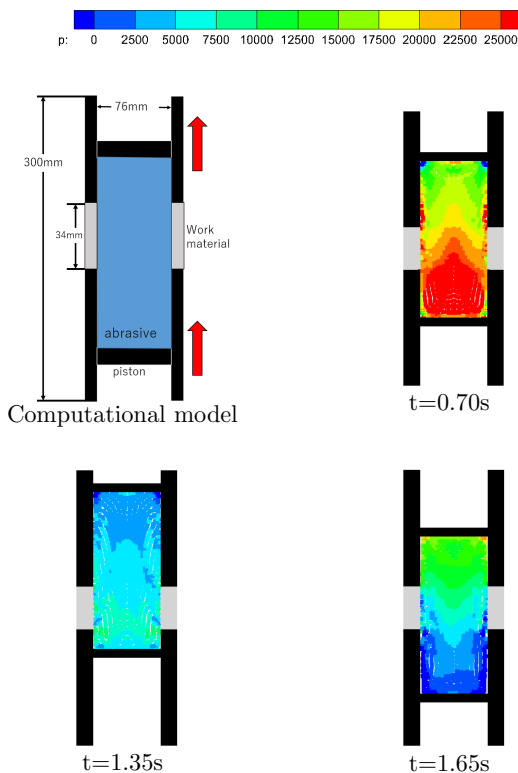


Fig.5 Simulation of abrasive flow machining

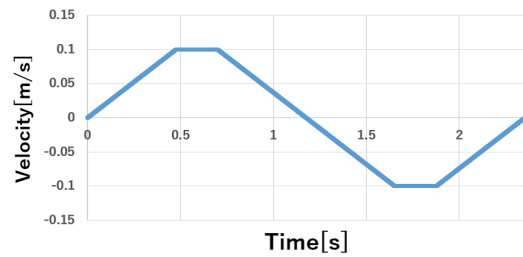


Fig.6 Velocity of piston

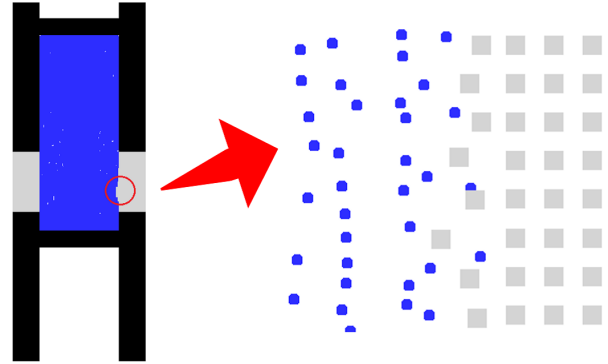


Fig.7 Enlargement of the surface of a work material

4. おわりに

SPH 法を用いた砥粒流動加工の数値解析手法を構築した。初めに、流体と固体の相互作用の精度検証として、液柱崩壊による弾性平板の変形計算を行い、実験値と比較して良好な結果を得ることができた。次に実際の研磨機器を模した計算モデルを用いて、砥粒流動加工シミュレーションを行った。ピストンにより研磨剤が流動し、研磨剤-弾性体間の摩擦により、弾性体表面が剥離する様子を確認するとともに、研磨剤の応力分布を確認した。

参考文献

- (1) <https://askacompany.co.jp/maintenance-service/abrasive-grain-flow/>
- (2) Monaghan J.J., Simulating Free surface flows with SPH, Journal of Computational Physics, **110** (1994) pp.6641-6662.
- (3) Gray J.P., Monaghan J.J., and Swift R.P., SPH elastic dynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **190** (2001) pp.6641-6662.
- (4) S.Marrone., M.Antuono., A.Colagross., δ -SPH model for simulating violent impact flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **200** (2011) pp.1526-1542.
- (5) G. R. Liu and M. B. Liu, Smoothed Particle Hydrodynamics : a meshfree particle method, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., Singapore (2003).
- (6) 小野祐輔, 西田真悟, 清野純史, SPH 法による土構造物の弾塑性解析, 応用力学論文集, Vol.9, pp.717-723
- (7) S.Adami., X.Y.Hu., N.A.Adams., A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics, Journal of Computational Physics, **231** (2012) pp.7057-7075.
- (8) C. Antoci, M. Gallati, S. Sibilla, Numerical simulation of fluid-structure interaction by SPH, Computers and Structures, **85** (2007) pp.878-890.