Penalization 法によるトンネル内を走行する高速鉄道車両まわりの流れの数値解析

Numerical analysis of the flow around a high-speed train running in a tunnel
by using the penelization method

精密工学専攻　56 号　松田晃尚
Akihisa Matsuda

1. はじめに

鉄道は，技術の進化に伴い高速化が進み，現在新幹線の最高営業速度は 320km/h にまで達している．このような技術の発展により，鉄道はより高速化していくことが予測される．しかし，速度が向上すると，高速鉄道車両は様々な空気力学的問題を抱えることとなる． 本研究では，その中でも，トンネル周辺の環境に深刻な問題をもたらすトンネル微気圧波を取り上げる．トンネル微気圧波発生のメカニズムを Fig.1[1] に示す．列車が高速でトンネル内に進入すると，車両先端で圧力が上昇し，圧力波が形成される．この圧力波がトンネル内をほぼ音速で伝播し，トンネル出口でそのエネルギの一部がパルス状に放出される．この圧縮波のことをトンネル微気圧波という．この圧力波が大きくなると，トンネルの出口で衝撃音が聞こえたり，近隣の住宅の家屋をがたつかせたりするなどの問題が生じる．そのため，トンネル微気圧波は高速鉄道を運用する上で解決すべき課題となっている．

トンネル微気圧波は圧縮波に関する現象であるから，正確に捉えるためには圧縮性流れでの流れ計算が必要である．そのため，先行研究として，釼持 [2] は車両回りの圧縮性流れの解析を行った．その結果，トンネルの長さによって計算が不安定になって計算できない場合が生じてしまった．これは圧縮性流れの計算における数値的な不安定が原因と考えられる．列車がトンネルに進入するときのトンネル内の密度変化は衝撃波が発生するほど強いものではない．そこで，本研究では稲垣ら [3] の考案した密度変化が微小であると仮定する弱い圧縮性に基づく流れの支配方程式を用いることを検討する．まずは 2 次元解析を行って計算手法の検証を行い，続いて 3 次元解析へ拡張する．

Fig. 1　Tunnel boom[1]

2. 支配方程式

本研究で扱う流れは, 弱い圧縮性を考慮した層流とする．流れの支配方程式はナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_j u_{i,j} = \sigma_{ji,j} + \lambda\chi(\hat{u}_{bi} - u_i) \tag{1}$$

と連続の方程式

$$Ma^2\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_i p_{,i}\right) + u_{i,i} = 0 \tag{2}$$

である．ここに x_i は 2 次元の場合は $(i = 1, 2)$，3 次元の場合は $(i = 1, 2, 3)$ とする直交座標，u_i は無次元速度の x_i 成分，p は無次元圧力，t は無次元時間，Ma はマッハ数を表す．また，σ_{ij} は応力テンソルの成分で，

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{2}{3Re}\delta_{ij}u_{k,k} \tag{3}$$

で与えられる．

式 (1) の右辺第 2 項は，Penalization 法 [4][5] によるペナルティ項である．Penalization 法 [4][5] は，no-slip 境界条件を運動方程式の中にペナルティ項として組み込むため，未知量の増加がない上に運動方程式に通常の離散化を施すだけでよいので，簡便な計算手法として注目されている．このことから，本研究では有限要素法と Penalization 法 [4][5] を組み合わせて流れ計算を行う．Penalization 法 [4][5] では物体が占める領域を仮想的な流体で置き換え, この流体が列車の走行速度 $\hat{u}_{bi}$ と同じ速度をもつと考える．式 (1)，(2) において，λ はペナルティ係数，χ はマスク関数である．ペナルティパラメータは外力としての大きさを決定するものであり，この値が大きいほど外力として表現する物体が現実の物体に近いものとなる．マスク関数は次のように定義される．

$$\chi = \begin{cases} 0 & (\Omega_f \text{内}) \\ 1 & (\Omega_b \text{内}) \end{cases} \tag{4}$$

ここに，Ω_f は流体領域を，Ω_b は物体領域を示す．Fig.2 に示す計算領域において，流体領域 Ω_f の境界は，壁境界 Γ_1，流出境界 Γ_2，物体境界 Γ_3 に分けられる．なお，本研究の物体とは，移動する列車を表す．このとき，境界条件を以下のように設定する．

$$u_i = 0 \qquad (\Gamma_1 \text{上}) \tag{5}$$

$$\sigma_{ji}n_j = 0 \qquad (\Gamma_2 \text{上}) \tag{6}$$

$$u_i = \hat{u}_{bi} \qquad (\Gamma_3 \text{上}) \tag{7}$$

ここに，n_i は境界上に立てた外向きベクトルを表し，$\hat{u}_{bi}$ は車両の走行速度を表す．

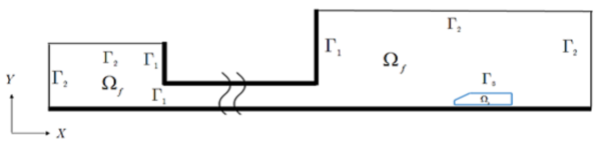


Fig. 2　Computational model

3. 支配方程式の離散化

3.1 空間方向の離散化

空間方向の離散化には有限要素法を用いる．式 (1)，(2) の弱形式を導き，流体領域 Ω_f における体積積分を離散化すると，

$$\overline{\mathbf{M}}_v \frac{d\mathbf{U}}{dt} + (\mathbf{A}_v + \mathbf{D} + \mathbf{E})\mathbf{U} - \mathbf{HP} - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{U}) = \mathbf{0} \tag{8}$$

$$Ma^2(\mathbf{M}_p \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{A}_p\mathbf{P}) + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{9}$$

を得る．ここに，$\mathbf{U}$ は速度ベクトル，$\mathbf{P}$ は圧力ベクトル，$\overline{\mathbf{M}}_v$ は速度に対応する質量行列を置き換えた集中化行列，$\mathbf{M}_p$ は圧力に対応する質量行列を表し，$\mathbf{A}_v$ は移流項，$\mathbf{D}$ は粘性項，$\mathbf{E}$ は第 2 粘性項，$\mathbf{H}$ は圧力項，$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{U})$ はペナルティ項を表す．

3.2 時間方向の離散化

時間方向の離散化には差分法を用いる．時間軸を一定の長さ Δt の小区間に分割し，時刻 $t^n = n\Delta t$ と $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ に挟まれた代表的な区間に注目する．物理量の時刻 t^n を知り，時刻 t^{n+1} の値を求めるものとして，式 (8)，(9) を次のように時間方向に離散化する．

$$\overline{\mathbf{M}}_v \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + (\mathbf{A}_v + \mathbf{D} + \mathbf{E})\mathbf{U}^n - \mathbf{HP}^{n+1} - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{U}^n) = \mathbf{0} \tag{10}$$

$$Ma^2(\mathbf{M}_p \frac{\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}^n}{\Delta t} + \mathbf{A}_p\mathbf{P}^n) + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{0} \tag{11}$$

そして，式 (10)，(11) は次のように整理される．

$$\frac{\overline{\mathbf{M}}_v}{\Delta t}\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{HP}^{n+1} = \mathbf{Q} \tag{12}$$

$$\frac{Ma^2}{\Delta t}\mathbf{M}_p\mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{n+1} = \frac{Ma^2}{\Delta t}\mathbf{M}_p\mathbf{P}^n - Ma^2\mathbf{A}_p\mathbf{P}^n \tag{13}$$

ここに，

$$\mathbf{Q} = \frac{\overline{\mathbf{M}}_v}{\Delta t}\mathbf{U}^n - [(\mathbf{A}_v + \mathbf{D} + \mathbf{E})\mathbf{U}^n - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{U})] \tag{14}$$

である．式 (12) を $\mathbf{U}^{n+1}$ について解き，それを式 (13) に代入すると，$\mathbf{P}^{n+1}$ の連立一次代数方程式

$$(\Delta t\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{M}}_v^{-1}\mathbf{H} + \frac{Ma^2}{\Delta t}\mathbf{M}_p)\mathbf{P}^{n+1} = Ma^2(\frac{\mathbf{M}_p}{\Delta t} - \mathbf{A}_p)\mathbf{P}^n - \Delta t\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{M}}_v^{-1}\mathbf{Q} \tag{15}$$

を得る．式 (15) を解いて，$\mathbf{P}^{n+1}$ を求め，その結果を式 (12) に代入して $\mathbf{U}^{n+1}$ を求める．式 (15) の求解にはマトリックスフリー共役勾配法を用いる．そこで，式 (15) を簡単のために

$$\mathbf{Gx} = \mathbf{R} \tag{16}$$

とおく．ここに，

$$\mathbf{G} = \Delta t\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{M}}_v^{-1}\mathbf{H} + \frac{Ma^2}{\Delta t}\mathbf{M}_p \tag{17}$$

$$\mathbf{R} = Ma^2(\frac{\mathbf{M}_p}{\Delta t} - \mathbf{A}_p)\mathbf{P}^n - \Delta t\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{M}}_v^{-1}\mathbf{Q} \tag{18}$$

である．マトリックスフリー共役勾配法の求解手順は次のようにまとめられる．

1. 適当な初期値 $\mathbf{x}_0$ を示す．
2. 残差 $\mathbf{r}_0$ を次のように計算する．
$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{R} - \mathbf{Gx}_0 \tag{19}$$
3. 残差を次のようにコピーする．
$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{r}_0 \tag{20}$$
4. 修正係数を計算する．
$$\boldsymbol{\rho}_k = \frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k}{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{Gw}_k} \tag{21}$$
5. $(k+1)$ ステップ目の $\mathbf{x}$ を更新する．
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\rho}_k\mathbf{w}_k \tag{22}$$
6. 残差を更新する．
$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \boldsymbol{\rho}_k\mathbf{Gw}_k \tag{23}$$
7. $\|\mathbf{r}_{k+1}\|$ の値が 0 に近い閾値 $\boldsymbol{\epsilon}$ より小さければループを抜け，5 で求めた $\mathbf{x}_{k+1}$ を解とする．
8. $\boldsymbol{\lambda}_k$ を計算する．
$$\boldsymbol{\lambda}_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1} \cdot \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k} \tag{24}$$
9. $\mathbf{w}_{k+1}$ を次のように更新する．
$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \boldsymbol{\lambda}_k\mathbf{w}_k \tag{25}$$
10. 4 ～ 9 を $k = k+1$ に更新して，$\|\mathbf{r}_{k+1}\|$ の値が 0 に近い閾値 $\boldsymbol{\epsilon}$ より小さくなるまで計算を繰り返す．

この計算を式 (21)～(25) に適用すると，$(k+1)$ ステップ目の圧力 $\mathbf{P}^{n+1}$ が求められる．

4. 数値計算

4.1 2 次元解析

2 次元解析を行って計算手法の検証を行う．計算に用いるトンネルのモデルを Fig.3 に示す．寸法は車両高さ H = 4m を代表高さとして示す．このとき，トンネルの長

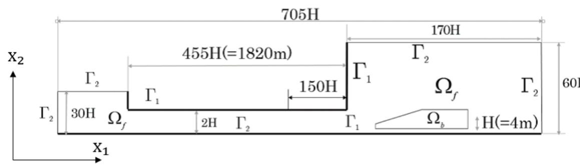


Fig. 3　2-dim. computational model

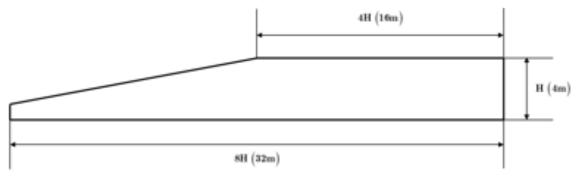


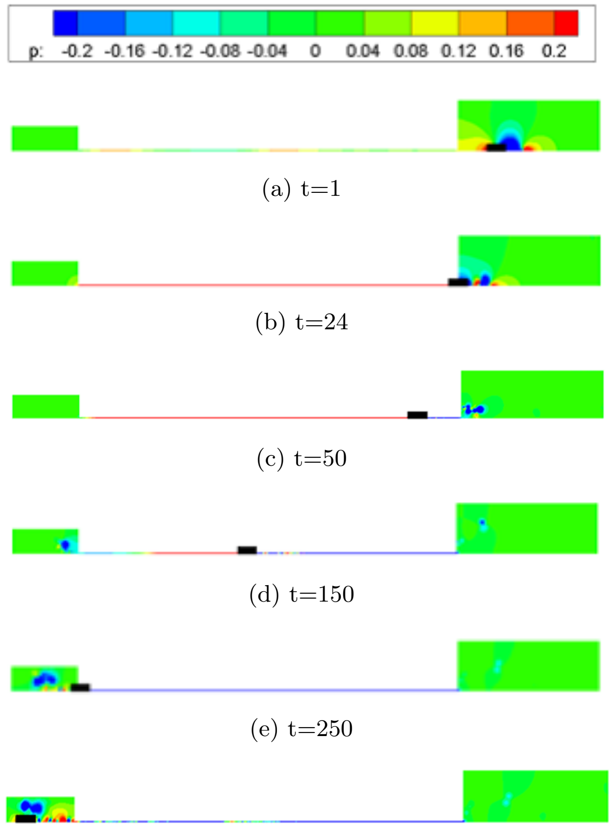
Fig. 4　2-dim. train model

さは 1820m である．また，列車のモデルを Fig.4 に示す．列車は 280km/h で x_1 軸負の方向に等速直線運動させる．

流れ計算におけるパラメータは，列車周りの温度を 20 ℃で 1atm とし，空気の粘性係数 $\mu = 1.82 \times 10^{-5}$Pa・s，空気の密度$\rho'_0 = 1.0$kg/m^3，音速 = 340m/s，ペナルティ係数 $a = 1000$s^{-1}，時間増分 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$s とする．CFL 条件とは数値解を求める際に用いる時間増分の値が実際の波動が隣り合う格子に到達するまでの時間よりも小さくする必要があるという条件である．これを満たすべく，本研究では $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$s とした．また，本研究では各物理量の無次元化を行っている．代表長さに列車高さ 4m，代表速さに列車速度 78m/s，代表密度に空気の密度 1.0kg/m^3 を用いる．このときマッハ数 $Ma = 0.23$，レイノルズ数 $Re = 1.71 \times 10^7$ である．Fig.3 のトンネルを用いた計算結果を Fig.5 に示す．

列車を走らせた直後は，前方で圧力値が上昇していることが分かる．これより，車両前方の流れを再現できていることが分かる．さらに，Fig.5 の (b) では，列車の前方で広がっていた正圧がトンネル出口で扇形状に広がっている様子が見られる．これの拡大図を Fig.6 に示す．これはトンネル微気圧波と考えられる．その後は，列車の前方では圧力値が上昇して，後方では低下していることが分かる．しかし，列車が進むにつれ，トンネル出口から車両前方に向けて，トンネル内部の圧力値は下降し始めた．これより，流体の弱い圧縮性が再現されていると考えられる． これにより，弱い圧縮性に基づく流れの支配方程式を用いることで，トンネルの長さによらず安定した計算ができたと考えられる．

Fig.7 に示すのは，Fig.3 のトンネルの入口から 600m 地点における本研究での圧力変動をと田中 (6) らの実測値のグラフである．時間は列車がトンネルに突入した時点を 0s としている．実測値と比較して，大まかな圧力変動は一致したが，列車がトンネルに突入する直後に急激な圧力の上昇が見られた．これは，計算領域が 2 次元であるため，列車の断面積とトンネルの断面積の面積比が現実と比べて大きく，車両領域が大きくなってしまったためだと考えられる．次に，有次元時間が約 7s のときに，計算結果と実測値は圧力がほぼ同時に下降し始めたが，計算結果の方が，圧力が下降する際の傾きが大きかった．そして，最後に圧力が下降してから圧力振動が起こらなかった．これらの原因は列車が 1 両で走行しているためだと考えられる．



(a) t=1

(b) t=24

(c) t=50

(d) t=150

(e) t=250

(f) t=280

Fig. 5　2-dim. distributions of pressure at different time instants

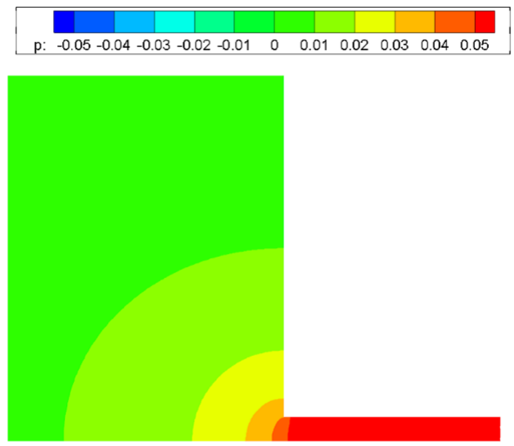


Fig. 6　Distribution of pressure at exit of tunnel

4.2 3 次元解析

計算に用いるトンネルのモデルを Fig.8 に示す．寸法は車両高さ H=3.2m を代表高さとして示す．このとき，トンネ

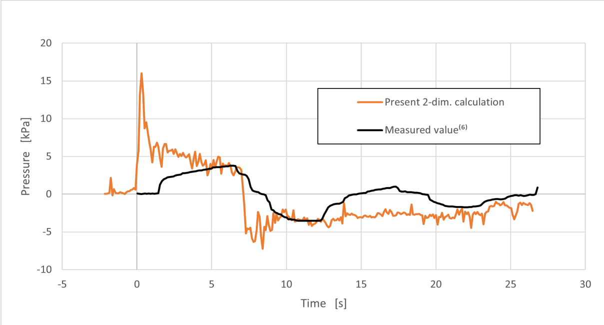


Fig. 7　Comparison of the time history of pressure

ネルの長さは 160m である．また，列車のモデルを Fig.9 に示す．列車は 2 次元と同じく，280km/h で x_1 軸負の方向に等速直線運動させる．

流れ計算におけるパラメータは，列車周りの温度を 20 ℃で 1atm とし，空気の粘性係数 $\mu = 1.82\times\ 10^{-5}\mathrm{Pa\cdot s}$，空気の密度 $\rho'_0 = 1.0\mathrm{kg/m^3}$，音速 $a = 340\mathrm{m/s}$，ペナルティ係数 $\lambda' = 1000\mathrm{s^{-1}}$，時間増分 $\Delta t = 1.0\times\ 10^{-3}\mathrm{s}$ とする．また，各物理量の無次元化により，代表長さに列車高さ 3.2m，代表速さに列車速度 78m/s，代表密度に空気の密度 $1.0\mathrm{kg/m^3}$ を用いる．このときマッハ数 $Ma = 0.23$，レイノルズ数 $Re = 1.37\times\ 10^7$ である．

列車がトンネルに進入するまでの Fig.8 のトンネルを用いた計算結果を Fig.10 に示す．ただし，Fig.10 は $x_2 = 37.5\mathrm{H}$ における x_1x_3 平面の結果である．列車を走らせた直後は，前方で圧力値が上昇していることが分かる．これより，車両前方の流れを再現できていることが分かる．その後は，列車の前方では圧力値が上昇していることが分かる．2 次元での数値計算とは異なり，トンネル出口から車両前方に向けて，トンネル内部の圧力値が下降し始める様子はまだ確認されていない．今後は，流体の弱い圧縮性が再現されていることを確認し，トンネル内部の圧力分布や圧力変動を調べ，2 次元の計算結果との比較を行う．

5. おわりに

本研究では，弱い圧縮性を考慮した流れの有限要素解析を行った．その結果，2 次元の有限要素解析を行うことができた．列車がトンネルに進入する際にトンネル微気圧波と見られる圧力波を再現することができた．2 次元の解析結果では，実測値とは異なる圧力変動が生じた．今後は，3 次元の有限要素解析を行うことができること，圧力波が再現されていることを確認し，2 次元の解析結果と比較して，より正確な数値解析を行うことが可能になったかを考察することが課題である．

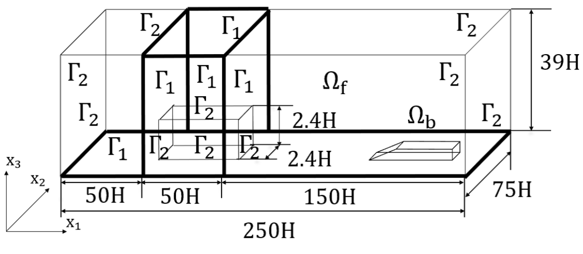


Fig. 8　3-dim. computational model

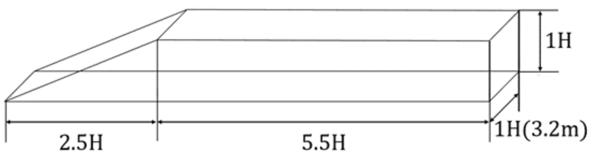
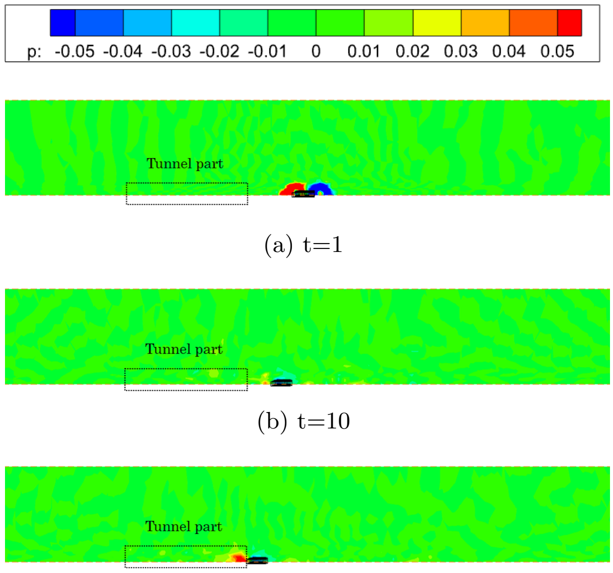


Fig. 9　3-dim. train model



(a) t=1

(b) t=10

(c) t=20

Fig. 10　3-dim. distributions of pressure at different time instants

参考文献

(1) 福田傑，斉藤実俊，列車のトンネル突入時の空気力学的現象を再現する，RRR ―Railway Research Review(2011)，公益財団法人鉄道総合技術研究所，pp.18-21.

(2) 釼持潤一，Penalization 法による高速鉄道車両のトンネル進入時の流れの解析，卒業論文，中央大学，2018.

(3) 稲垣昌英・他 3 名，流体共鳴音解析技術―ウィンドスロップ解析への適用―　豊田中央研究所 R&D レビュー　Vol.36　No.2 (2001) , pp.31-38.

(4) Philippe Angot , A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows, Numer. Math.,81(1999), pp.497-520.

(5) M.Bergman,A.Iollo,Modeling and simulation of fish-like swimming, Journal of Computational Physics, 230(2011), pp.329-348.

(6) 田中靖幸・他 3 名，列車のトンネル突入・退出時の坑口から放射される圧縮波の現地測定，日本機械学会論文集 (B 編)67 巻 622 号 (2001)，pp.82-89.