整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の すべての特性曲線を求める効率的な方法

An Efficient Method for Finding All Characteristic Curves of Piecewise-Linear Resistive Circuits Using Integer Programming

電気電子情報通信工学専攻　　倉本　拓実
Takumi　KURAMOTO

あらまし　整数計画ソルバー CPLEX を用いた区分的線形抵抗回路のすべての特性曲線を求める効率的な方法を提案する．この方法は複雑なプログラミングを必要としないため実装が容易で，かつ非常に効率が良い．

1.　まえがき

集積回路の設計において，直流回路に対する駆動点特性曲線や伝達特性曲線などの特性曲線を求めることは，回路の性質を調べるうえで重要となる．特性曲線を求める方法としては，一連の解曲線追跡法が知られている [1]〜[3]．しかし特性曲線の数は一般に一つとは限らず，実際には複数個の特性曲線が存在することも多い．信頼性の高い回路を設計するためには，シミュレーション段階でそれらすべてを求めておくことが必要となるが，解曲線追跡法で探索できる特性曲線は一般にそれらの内の一つだけである．

この問題に対し，線形計画法などを用いた区分的線形抵抗回路のすべての特性曲線を求めるアルゴリズムが提案されてきた [4]〜[7]．しかしこれらのアルゴリズムはインプリメンテーションの際に高度な専門的知識と複雑なプログラミングを必要とするため，初心者や非専門家にとっては必ずしも実装容易性に優れた方法ではなかった．

ところで近年，整数計画法の分野の飛躍的な発展により，10 年前まではNP 困難という呪縛から「絶対に」解けないと考えられていた大規模な整数計画問題を実用的な計算時間で解けるようになり，現代社会に大きな影響を与えている [8]．本研究室では，このような整数計画法の飛躍的な発展に着目し，連続系の問題，特に非線形回路の全解探索問題に対する整数計画ソルバー IBM ILOG CPLEX（略して CPLEX）の応用に関する研究を行ってきた [9]〜[12]．特に文献 [9] では，混合整数計画問題を CPLEX で 1 回解くだけで区分的線形回路のすべての解（直流動作点）が得られることを示した．この方法は複雑なプログラミングを必要としないため実装が容易で，かつ効率が良い．またこの方法は区分的線形抵抗回路のすべての特性曲線を求める方法にも拡張された [10], [11]．更に，この方法によりすべての特性曲線を確実に得られることが，CPLEX で使われているアルゴリズムの原著論文と CPLEX のマニュアルから証明された [12]．

本研究では，文献 [10], [11] の方法を改良することにより，区分的線形抵抗回路のすべての特性曲線を求める効率的な方法を提案する．

2.　従来法

図 1 のような，n 個の区分的線形抵抗を含む 1 ポート区分的線形抵抗回路の駆動点特性曲線を求める問題を考

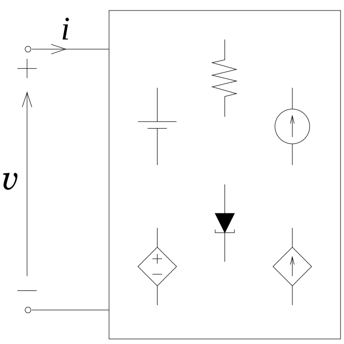

図 1　1 ポート区分的線形抵抗回路

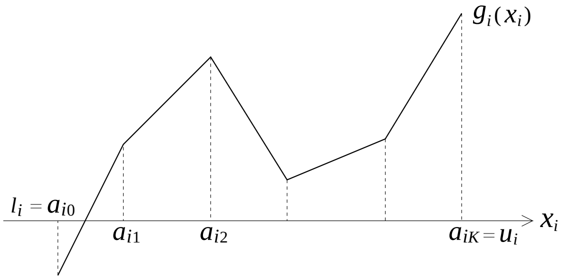

図 2　区分的線形関数

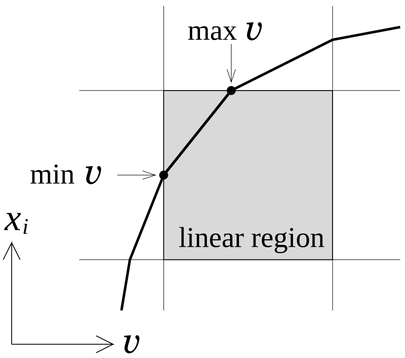

図 3　式 (2) の最適解と特性曲線の関係

える．図 1 の回路は次の式で記述できる [7], [9]．

$$f(x) \triangleq P \begin{bmatrix} g_1(x_1) \\ \vdots \\ g_n(x_n) \\ i \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ v \end{bmatrix} - r = 0 \qquad (1)$$

ただし，$(x_1, \cdots, x_n, v, i)^T \in \mathbb{R}^{n+2}$ は変数ベクトル，P と Q は $(n+1)\times(n+1)$ 係数行列, $r = (r_1, \cdots, r_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ は定数ベクトル，$g_i(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は図 2 に示すような区分的線形関数である．式 (1) が線形方程式となるような領域を線形領域と呼ぶことにする．

文献 [9] では，連続変数 δ_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ \ j = 1, 2, \ldots, K)$ と 0–1 変数 μ_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, K-1)$ を導入することにより，式 (1) を線形等式と線形不等式で表現できることが示されている．ここで，これらの線形等式・線形不等式の制約のもとで目的関数 v を最大化・最小化する次のような混合整数計画問題を考える [10], [11]．

最大化/最小化 v

制約条件：

$$\begin{aligned}
& P \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ i \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ v \end{bmatrix} - r = 0 \\
& x_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \delta_{ij} \\
& y_i = b_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \frac{b_{ij} - b_{ij-1}}{a_{ij} - a_{ij-1}} \delta_{ij} \\
& \Delta_{i1}\mu_{i1} \le \delta_{i1} \le \Delta_{i1} \\
& \qquad \vdots \\
& \Delta_{ij-1}\mu_{ij-1} \le \delta_{ij-1} \le \Delta_{ij-1}\mu_{ij-2} \\
& \Delta_{ij}\mu_{ij} \le \delta_{ij} \le \Delta_{ij}\mu_{ij-1} \\
& \Delta_{ij+1}\mu_{ij+1} \le \delta_{ij+1} \le \Delta_{ij+1}\mu_{ij} \\
& \qquad \vdots \\
& 0 \le \delta_{iK} \le \Delta_{iK}\mu_{iK-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned} \qquad (2)$$

式 (2) の制約条件と式 (1) が等価であることは容易に確認できる．すなわち，式 (2) の実行可能領域が求めるべき特性曲線の集合となる．また，制約条件を満たす 0–1 変数 μ_{ij} の組合せと線形領域の間には 1 対 1 対応が存在する．

従来法では，CPLEX の解プール機能を用いて式 (2) を最大化・最小化の 2 回解く．このとき、パラメータ `SolnPoolGap` を非常に大きな値に設定する (`SolnPoolGap` のデフォルト値は $1.0\mathrm{e}+75$ なので，デフォルト値に設定すればよい)．

上記のようなパラメータ設定を行うことにより，図 3 のように特性曲線（折れ線の集合）のすべての折れ点を求めることができる [12]．したがって，これらの折れ点を結ぶことにより，全ての特性曲線を求めることができる．

3. 提案手法

従来法では混合整数計画問題を 2 回解く必要がある．しかし，従来法には二つの不必要な計算が存在する．一つ目は，分枝限定法の探索時に行われる最大化・最小化計算である．二つ目は，最大化・最小化を行う線形緩和問題の制約条件が等しいことにより同じ計算が 2 回行われるシンプレックス法のフェーズ I である．

そのため提案手法では，まず最初に，目的関数を任意の定数とした次のような混合整数計画問題を CPLEX の解プール機能を用いて解くことにする．

最大化（任意の定数）

制約条件：

$$
\begin{aligned}
&P\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ i \end{bmatrix} + Q\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ v \end{bmatrix} - r = 0 \\
&x_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{K}\delta_{ij} \\
&y_i = b_{i0} + \sum_{j=1}^{K}\frac{b_{ij}-b_{ij-1}}{a_{ij}-a_{ij-1}}\delta_{ij} \\
&\Delta_{i1}\mu_{i1} \le \delta_{i1} \le \Delta_{i1} \\
&\qquad\vdots \\
&\Delta_{ij-1}\mu_{ij-1} \le \delta_{ij-1} \le \Delta_{ij-1}\mu_{ij-2} \\
&\Delta_{ij}\mu_{ij} \le \delta_{ij} \le \Delta_{ij}\mu_{ij-1} \\
&\Delta_{ij+1}\mu_{ij+1} \le \delta_{ij+1} \le \Delta_{ij+1}\mu_{ij} \\
&\qquad\vdots \\
&0 \le \delta_{iK} \le \Delta_{iK}\mu_{iK-1}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

この場合，目的関数を定数にしたことで最大化・最小化計算が行われず，式 (3) を 1 回解くだけで解を含むすべての線形領域に対し特性曲線の一部である線分のどちらか片方の折れ点を得ることができる [12]．

残りの折れ点を得るためには連立一次方程式を解くだけでよい．たとえば，CPLEX により得られた端点 A が図 4 のように $x_i = a_{ij}$ である場合，$x_i = a_{ij-1}$ を式 (1) に代入してできる連立一次方程式を解き端点 C を求める．その後，線分 AC 上で端点 A に一番近い交点 B を計算することによってもう片方の折れ点を得ることができる．したがって，シンプレックス法を用いる必要がない．以上より，これらの折れ点を結ぶことで，全ての特性曲線を求めることができる．

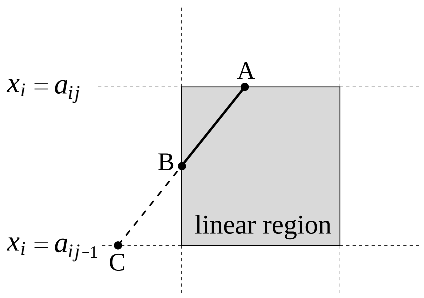

図 4　提案手法における特性曲線の求め方

表 1　計算時間の比較（秒）

数値例	従来法	提案手法
例 1	0.35	0.17
例 2	1.52	0.60
例 3	2.57	1.02

4.　数値例

本章ではいくつかの数値例を示す．なお使用計算機は Lenovo ThinkStation P920 (CPU: Intel Xeon Gold 6230 Processor, 2.10 GHz) で，整数計画ソルバーとしては CPLEX 20.1.0.0 を使用した．

例 1：文献 [10] の Fig. 18 の回路に対し，区分的線形関数の線分数を $K = 50$ として提案手法を適用した結果を図 5 に示す．計算時間は 0.17 秒だった．また特性曲線を構成する線分の数は 241 であった．

例 2：文献 [6] の Fig. 8 の回路に対し，$K = 30$ として提案手法を適用した結果を図 6 に示す．計算時間は 0.60 秒，特性曲線を構成する線分の数は 545 であった．

例 3：文献 [6] の Fig. 9 の回路に対し，$K = 50$ として提案手法を適用した結果を図 7 に示す．計算時間は 1.02 秒，特性曲線を構成する線分の数は 897 であった．

表 1 に従来法と提案手法の計算時間を示す．表 1 より，提案手法は従来法と比べすべての数値例において 2 倍以上速いことがわかる．

5.　むすび

本研究では，整数計画ソルバー CPLEX を用いた区分的線形抵抗回路のすべての特性曲線を求める効率的な方法を提案した．提案手法はインプリメンテーションが容易で，混合整数計画問題に CPLEX を 1 回適用するだけで全ての特性曲線を効率良く求めることができる．

謝辞　文献 [8] を謹呈して頂き，整数計画法の驚異的発展について御教示頂きました東京工業大学名誉教授の今野浩先生に心から御礼申し上げます．また数理計画法について多くの御教示を頂きました東京工業大学の松井知己教授に深く御礼申し上げます．

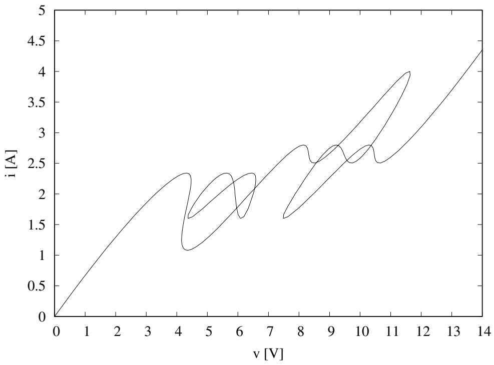

図 5　例 1 の特性曲線

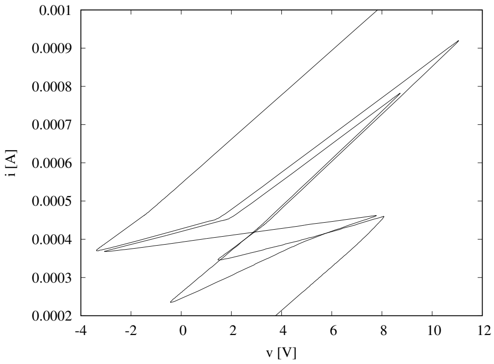

図 6　例 2 の特性曲線

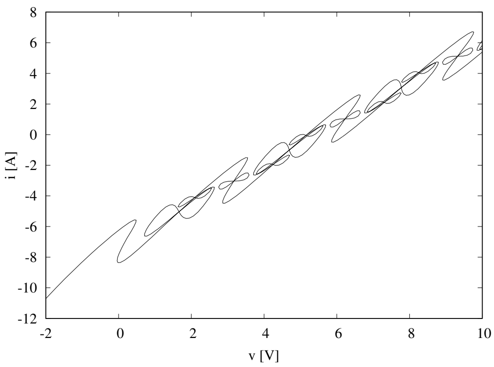

図 7　例 3 の特性曲線

参考文献

[1] A. Ushida and L. O. Chua, "Tracing solution curves of non-linear equations with sharp turning points," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 12, no. 1, pp. 1–21, Jan. 1984.

[2] K. Yamamura and K. Horiuchi, "A globally and quadratically convergent algorithm for solving nonlinear resistive networks," *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.*, vol. 9, no. 5, pp. 487–499, May 1990.

[3] K. Yamamura, "Simple algorithms for tracing solution curves," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 40, no. 8, pp. 537–541, Aug. 1993.

[4] L. Vandenberghe, B. L. De Moor, and J. Vandewalle, "The generalized linear complementarity problem applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 36, no. 11, pp. 1382–1391, Nov. 1989.

[5] S. Pastore and A. Premoli, "Capturing all branches of any one-port characteristic in piecewise-linear resistive circuits," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 43, no. 1, pp. 26–33, Jan. 1996.

[6] K. Yamamura and T. Ohshima, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using linear programming," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 45, pp. 434–445, Apr. 1998.

[7] K. Yamamura and S. Tanaka, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the dual simplex method," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 30, no. 6, pp. 567–586, Nov. 2002.

[8] 今野　浩，役に立つ一次式—整数計画法「気まぐれな王女」の 50 年，日本評論社，2005.

[9] K. Yamamura and N. Tamura, "Finding all solutions of separable systems of piecewise-linear equations using integer programming," *J. Computational and Applied Mathematics*, vol. 236, no. 11, pp. 2844–2852, May. 2012.

[10] K. Yamamura and S. Ishiguro, "Finding all solution sets of piecewise-linear interval equations using integer programming," *Reliable Computing*, vol. 23 (Special issue in honor of Ray Moore, 1929–2015), pp.73–96, Jul. 2016.

[11] K. Yamamura and R. Watanabe, "A simple method for finding all characteristic curves of piecewise-linear resistive circuits using an integer programming solver," *Proc. IEEE Asia Pacific Conf. Circuits Syst.*, Jeju, Korea, pp. 224–227, Oct. 2016.

[12] K. Yamamura, "Finding all solution sets of piecewise-linear interval equations using an integer programming solver," *J. Computational and Applied Mathematics*, vol. 372, Article 112616, Jul. 2020.

研究業績

[1] T. Kuramoto and K. Yamamura, "An efficient method for finding all characteristic curves of piecewise-linear resistive circuits using integer programming," in *Proc. IEEE Asia Pacific Conf. Post Graduate Research in Microelectronics and Electronics*, Bangkok, Thailand, pp. 41–44, Nov. 2019.

[2] T. Kuramoto and K. Yamamura, "Finding all characteristic curves of piecewise-linear resistive circuits using an integer programming solver" *Proc. IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks*, Tokushima, Japan, pp. 79–82, Dec. 2019.