五層媒質装荷半無限平行平板導波管による平面波の回折

Plane Wave Diffraction by a Semi-Infinite Parallel-Plate Waveguide with Five-Layer Material Loading

電気電子情報通信工学専攻　張　洞天
Dongtian ZHANG

1. はじめに

レーダによる形式認識の分野において，開口端平行平板導波管キャビティによる散乱・回折に関する解析は，レーダ断面積(RCS)研究の分野において基本的かつ重要な課題である．これまでに，導波管キャビティによる回折問題が，主に数値解法あるいは高周波漸近解法を用いて解析され，数多くの研究報告がある[1][2] [3]．しかし，これらの手法により得られた解は任意のキャビティの寸法に対し，一様に有効でないと考えられる．

一方，Wiener-Hopf 法[4]は散乱問題に対する厳密解法であり，キャビティの回折問題に有効に適用できることが知られている．文献[5][6]においては,有限長平行平板導波管から構成される 2-D material-loaded キャビティによる平面波の回折問題が Wiener-Hopf 法により厳密に解析され,キャビティの長さが波長と同程度以上であれば有効となる近似解が得られている.文献[5][6]の一般化として,文献[7][8]では,五層媒質装荷半無限平行平板導波管による平面波の回折問題が Wiener-Hopf 法により解析され,任意のキャビティの寸法に対し,有効な解が導出されている.

本研究では，キャビティを構成しうる形状として五層媒質装荷半無限平行平板導波管を取り上げ，平面波の回折問題を Wiener-Hopf 法と変形留数解析法[4][9]を併用した手法により解析する．過去にこの問題の Wiener-Hopf 解析[10][11]がなされているが，解析の見直しと改良，及び数値計算精度の改善を行う必要がある．

なお，本論文では電磁界の時間因子を $e^{-i\omega t}$ とし，全て記述から省略する．

2. Wiener-Hopf 法による散乱問題の解析

図 1 に示すように，五種の異なる媒質が層状に装荷された半無限平行平板導波管に平面 E 波が z 軸と角度 θ_0 をなして入射したときの散乱問題を，Wiener-Hopf 法により解析する．導波管を構成する 2 枚の平板は無限に薄い完全導体で，y 軸方向に一様である．導波管内の領域 I, II, III, IV, V に装荷された媒質の比誘電率は各々 $\varepsilon_{r1},\varepsilon_{r2},\varepsilon_{r3},\varepsilon_{r4},\varepsilon_{r5}$，比透磁率は各々 $\mu_{r1},\mu_{r2},\mu_{r3},\mu_{r4},\mu_{r5}$ である．

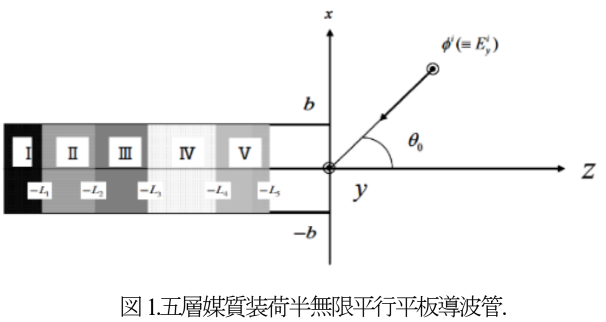

図 1.五層媒質装荷半無限平行平板導波管.

全電界 $\phi^t(x,z)[\equiv E_y{}^t(x,z)]$ は次式で定義する．

$$\phi^t(x,z)=\phi^i(x,z)+\phi(x,z) \tag{1}$$

但し，$\phi^i(x,z)$ は入射界で，次式で定義される．

$$\phi^i(x,z)=e^{-ik(x\sin\theta_0+z\cos\theta_0)},\quad 0<\theta_0<\pi/2. \tag{2}$$

また，$k\,[=\omega(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}]$ は自由空間の波数である．全電界 $\phi^t(x,z)$ は 2 次元波動方程式

$$\left[\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2+\mu(x,z)\varepsilon(x,z)k^2\right]\phi^t(x,z)=0 \tag{3}$$

を満足する．但し,

$$\mu(x,z)=\begin{cases}1（領域 \text{I} \sim \text{V} 以外）,\\ \mu_{r1}（領域 \text{I}）,\\ \mu_{r2}（領域 \text{II}）,\\ \mu_{r3}（領域 \text{III}）,\\ \mu_{r4}（領域 \text{IV}）,\\ \mu_{r5}（領域 \text{V}）,\end{cases}\qquad \varepsilon(x,z)=\begin{cases}1（領域 \text{I} \sim \text{V} 以外）,\\ \varepsilon_{r1}（領域 \text{I}）,\\ \varepsilon_{r2}（領域 \text{II}）,\\ \varepsilon_{r3}（領域 \text{III}）,\\ \varepsilon_{r4}（領域 \text{IV}）,\\ \varepsilon_{r5}（領域 \text{V}）.\end{cases} \tag{4}$$

零でない電磁界成分は次式から求められる．

$$(E_y^t,H_x^t,H_z^t)=\left[\phi^t,\frac{i}{\omega\mu_0\mu(x,z)}\frac{\partial\phi^t}{\partial z},\frac{1}{i\omega\mu_0\mu(x,z)}\frac{\partial\phi^t}{\partial x}\right]. \tag{5}$$

解析の便宜上，媒質に微小損失を導入し，$k=k_1+ik_2(0<k_2\ll k_1)$ とすると，放射条件により，式(1)における未知の散乱界 $\phi(x,z)$ は任意の x に対し，次の漸近的振舞いを示すことが分かる．

$$\phi(x,z)=\begin{cases}O(e^{-k_2 z}),\quad z\to\infty,\\ O(e^{k_2 z\cos\theta_0}),z\to-\infty.\end{cases} \tag{6}$$

散乱界の z に関する Fourier 変換を

$$\Phi(x,\alpha)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,z)e^{i\alpha z}dz,\quad \alpha(\equiv\operatorname{Re}\alpha+i\operatorname{Im}\alpha)=\sigma+i\tau \tag{7}$$

で定義すると，式(6)より $\Phi(x,\alpha)$ は複素 α 平面上の帯状領域 $-k_2<\tau<k_2\cos\theta_0$ において正則であることが示される．次に，散乱界の z に関する Fourier 積分を

$$\Phi_+(x,\alpha)=(2\pi)^{-1/2}\int_0^{\infty}\phi(x,z)e^{i\alpha z}dz, \tag{8}$$

$$\Phi_-(x,\alpha)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{-L_1}\phi^t(x,z)e^{i\alpha z}dz, \tag{9}$$

$$\Phi_m^r(x,\alpha)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-L_m}^{-L_{m+1}}\phi^t(x,z)e^{i\alpha z}dz,\quad m=1,2,3,4, \tag{10}$$

$$\Phi_1^0(x,\alpha)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-L_5}^{0}\phi^t(x,z)e^{i\alpha z}dz \tag{11}$$

で定義すると，式(11)は次のように表現できる．

$$\Phi(x,\alpha)=\tilde{\Phi}_-(x,\alpha)+\Psi_{(+)}(x,\alpha). \tag{12}$$

但し,

$$\tilde{\Phi}_-(x,\alpha)=\sum_{m=1}^{4}\Phi_m^r(x,\alpha)+\Phi_1^0(x,\alpha)+\Phi_-(x,\alpha), \tag{13}$$

$$\Psi_{(+)}(x,\alpha)=\Phi_+(x,\alpha)-A\frac{e^{-ikx\sin\theta_0}}{\alpha-k\cos\theta_0},\quad A=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}i}. \tag{14}$$

式(3)の Fourier 変換を取って得られる変換波動方程式を解くことにより，Fourier 変換領域における散乱界は次のように表現することができる(紙面の制約上，定義の多くは省略).

$$\Phi(x,\alpha)=\begin{cases}\Psi_{(+)}(b,\alpha)e^{-\gamma(x-b)}, \quad x>b,\\ \Psi_{(+)}(-b,\alpha)e^{\gamma(x+b)}, \quad x<-b,\\ \Psi_{(+)}(b,\alpha)\dfrac{\sinh\gamma(x+b)}{\sinh 2\gamma b}\\ -\Psi_{(+)}(-b,\alpha)\dfrac{\sinh\gamma(x-b)}{\sinh 2\gamma b}\\ +\dfrac{1}{b}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[-\frac{e^{-i\alpha L_5}C_{5n}^{+}(\alpha)}{\alpha^2+\gamma_n^2}+\frac{e^{-i\alpha L_1}C_{1n}^{-}(\alpha)}{\alpha^2+\Gamma_{1n}^2}\\ +\dfrac{e^{-i\alpha L_2}C_{2n}^{-}(\alpha)-e^{-i\alpha L_1}C_{1n}^{+}(\alpha)}{\alpha^2+\Gamma_{2n}^2}\\ +\dfrac{e^{-i\alpha L_3}C_{3n}^{-}(\alpha)-e^{-i\alpha L_2}C_{2n}^{+}(\alpha)}{\alpha^2+\Gamma_{3n}^2}\\ +\dfrac{e^{-i\alpha L_4}C_{4n}^{-}(\alpha)-e^{-i\alpha L_3}C_{3n}^{+}(\alpha)}{\alpha^2+\Gamma_{4n}^2}\\ +\dfrac{e^{-i\alpha L_5}C_{5n}^{-}(\alpha)-e^{-i\alpha L_4}C_{4n}^{+}(\alpha)}{\alpha^2+\Gamma_{5n}^2}\Bigg]\\ \sin\dfrac{n\pi}{2b}(x+b), \quad |x|>b.\end{cases} \tag{15}$$

但し，$\gamma=(\alpha^2-k^2)^{1/2}$ として，

$$\left.\begin{aligned}\gamma_n&=[(n\pi/2b)^2-k^2]^{1/2};\\ \Gamma_{mn}&=[(n\pi/2b)^2-k_{rm}^2]^{1/2},\\ k_{rm}&=(\varepsilon_{rm}\mu_{rm})^{1/2}k,\ m=1,2,3,4,5.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

式(15)は Fourier 変換領域における散乱界である．式(15)に含まれる $\Psi_{(+)}(\pm b,\alpha)$ は未知関数で，Wiener-Hopf 方程式の解 $U_{(+)}(\alpha), V_{(+)}(\alpha)$ と

$$\Psi_{(+)}(\pm b,\alpha)=(1/2)\left[U_{(+)}(\alpha)\pm V_{(+)}(\alpha)\right] \tag{17}$$

なる関係にある．但し，

$$U_{(+)}(\alpha)=-M_+(\alpha)\left[\frac{2A\cos(kb\sin\theta_0)}{M_+(k\cos\theta_0)(\alpha-k\cos\theta_0)}-\sum_{n=1,odd}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2\frac{\delta_n M_+(i\gamma_n)U_{(+)}(i\gamma_n)}{bi\gamma_n(\alpha+i\gamma_n)}\right], \tag{18}$$

$$V_{(+)}(\alpha)=N_+(\alpha)\left[\frac{2iA\sin(kb\sin\theta_0)}{N_+(k\cos\theta_0)(\alpha-k\cos\theta_0)}+\sum_{n=2,even}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2\frac{\delta_n N_+(i\gamma_n)V_{(+)}(i\gamma_n)}{bi\gamma_n(\alpha+i\gamma_n)}\right]. \tag{19}$$

式(18)(19)に含まれる各種係数は以下のように定義される．

$$\rho_{4n}=\frac{(\mu_{r5}/\mu_{r4})\Gamma_{4n}-\delta_{3n}\Gamma_{5n}}{(\mu_{r5}/\mu_{r4})\Gamma_{4n}+\delta_{3n}\Gamma_{5n}},\quad \delta_{4n}=\frac{\mu_{r5}\gamma_n-\Gamma_{5n}}{\mu_{r5}\gamma_n+\Gamma_{5n}}, \tag{21}$$

$$\delta_{3n}=\frac{1-\rho_{3n}e^{-2\Gamma_{4n}(L_3-L_4)}}{1+\rho_{3n}e^{-2\Gamma_{4n}(L_3-L_4)}},\quad \rho_{3n}=\frac{(\mu_{r4}/\mu_{r3})\Gamma_{3n}-\delta_{2n}\Gamma_{4n}}{(\mu_{r4}/\mu_{r3})\Gamma_{3n}+\delta_{2n}\Gamma_{4n}}, \tag{22}$$

$$\delta_{2n}=\frac{1-\rho_{2n}e^{-2\Gamma_{3n}(L_2-L_3)}}{1+\rho_{2n}e^{-2\Gamma_{3n}(L_2-L_3)}},\quad \rho_{2n}=\frac{(\mu_{r3}/\mu_{r2})\Gamma_{2n}-\delta_{1n}\Gamma_{3n}}{(\mu_{r3}/\mu_{r2})\Gamma_{2n}+\delta_{1n}\Gamma_{3n}}, \tag{23}$$

$$\delta_{1n}=\frac{1-\rho_{1n}e^{-2\Gamma_{2n}(L_1-L_2)}}{1+\rho_{1n}e^{-2\Gamma_{2n}(L_1-L_2)}},\quad \rho_{1n}=\frac{(\mu_{r2}/\mu_{r1})\Gamma_{1n}-\Gamma_{2n}}{(\mu_{r2}/\mu_{r1})\Gamma_{1n}+\Gamma_{2n}}, \tag{24}$$

但し，$C=0.57721566\cdots$ を Euler 定数として，

$$\begin{aligned}M_+(\alpha)=&(\cos kb)^{1/2}e^{i\pi/4}(k+\alpha)^{-1/2}\\ &\exp\{(i\gamma b/\pi)\ln[(\alpha-\gamma)/k]\}\\ &\cdot\exp\{(i\alpha b/\pi)[1-C+\ln(\pi/2kb)+i\pi/2]\}\\ &\prod_{n=1,odd}^{\infty}(1+\alpha/i\gamma_n)e^{2i\alpha b/n\pi},\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}N_+(\alpha)=&(\sin kb/k)^{1/2}\exp\{(i\gamma b/\pi)\ln[(\alpha-\gamma)/k]\}\\ &\cdot\exp\{(i\alpha b/\pi)[1-C+\ln(2\pi/kb)+i\pi/2]\}\\ &\prod_{n=2,even}^{\infty}(1+\alpha/i\gamma_n)e^{2i\alpha b/n\pi}.\end{aligned} \tag{26}$$

3. 変形留数解析法による解の構成

式(18)(19)より，$U_{(+)}(\alpha)$ は以下に示す解析的性質を満足することが分かる

$(U1)$ $U_{(+)}(-i\gamma_n)-\delta_n U_{(+)}(i\gamma_n)=0,\quad n=1,3,5\cdots.$

$(U2)$ $U_{(+)}(\alpha)$ は分岐点 $\alpha=-k$ を持つ.

$(U3)$ $U_{(+)}(\alpha)$ は1位の極 $\alpha=k\cos\theta_0$ を持ち，次の関係を満足する.

$$\mathrm{Res}\ U_{(+)}(k\cos\theta_0)=-2A\cos(kb\sin\theta_0).$$

$(U4)$ $U_{(+)}(\alpha)=O(\alpha^{-3/2}),\quad \alpha\to\infty\ (\tau>-k_2).$

便宜上, 次の関数を導入する.

$$U'_{(+)}(\alpha)=-\frac{2A\cos(kb\sin\theta_0)}{M_+(k\cos\theta_0)}\frac{M_+(\alpha)}{\alpha-k\cos\theta_0}. \tag{27}$$

式(26)(27)より，$\tilde{U}_{(+)}(\alpha)$ は次の性質を満たすことが分かる.

$(U'1)$ $U'_{(+)}(\alpha)$ は 1 位の零点 $\alpha=-i\gamma_n(n=1,3,5\cdots)$ を持つ.

$(U'2)$ $U'_{(+)}(\alpha)$ は分岐点 $\alpha=-k$ を持つ.

$(U'3)$ $U'_{(+)}(\alpha)$ は 1 位の極 $\alpha=k\cos\theta_0$ を持ち，次の関係を満足する.

$$\mathrm{Res}\ U'_{(+)}(k\cos\theta_0)=-2A\cos(kb\sin\theta_0).$$

$(U'4)$ $U'_{(+)}(\alpha)=O(\alpha^{-3/2}),\quad \alpha\to\infty\ (\tau>-k_2).$

$U_{(+)}(\alpha)$ と $U'_{(+)}(\alpha)$ の持つ解析的性質に関する基本的な差異は，条件 $(U1)$ と $(U'1)$ を比較して分かるように零点である. そこで, 条件 $(U1)$ は $U_{(+)}(\alpha)$ の零点を定義する方程式であると考え，$U_{(+)}(\alpha)$ を以下のように表現する.

$$U_{(+)}(\alpha)=U'_{(+)}(\alpha)p(\alpha)q_u(\alpha). \tag{28}$$

ここで $p(\alpha)$ は零点を持たない整関数である．また，$q_u(\alpha)$ は $U'_{(+)}(\alpha)$ の零点 $-i\gamma_n(n=1,3,5,\cdots)$ を消去するために導入したものであり，次式で定義される.

$$q_u(\alpha)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+\alpha/i\Gamma_{2n-1}^u}{1+\alpha/i\gamma_{2n-1}}. \tag{29}$$

但し,

$$\Gamma_{2n-1}^u=\gamma_{2n-1}+\Delta_n^u,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{30}$$

式(30)における Δ_n^u は $i\gamma_{2n-1}$ からの零点の移動量を表し,現段階では未知であるが,これらは条件 $(U1)$ から決定されるべきものである.以上の考察より,残された作業は整関数 $p(\alpha)$ の決定と零点の移動量 Δ_n^u を求めるための具体的な方法の確立となる. Δ_n^u が以下に示す極限を持つと仮定する.

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n^u=\frac{\pi\Delta_u}{b}. \tag{31}$$

ここで,式(29)より以下のようにおくことができる.

$$\begin{aligned}q_u(\alpha)&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+\alpha/i\Gamma_{2n-1}^u}{1+\alpha/i\gamma_{2n-1}}\\&=\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+(-i\alpha)/\Gamma_{2n-1}^u\right]e^{i\alpha b/n\pi}}{\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+(-i\alpha)/\gamma_{2n-1}\right]e^{i\alpha b/n\pi}}\\&\equiv\frac{q_{u1}(\alpha)}{q_{u2}(\alpha)}.\end{aligned} \tag{32}$$

この $q_{u1}(\alpha)$ について考える.式(16)より, $n\to\infty$ において,

$$\gamma_n=\left[\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2-k^2\right]^{1/2}=\frac{n\pi}{2b}+O(n^{-1}). \tag{33}$$

式(30),(31),(33),より, Γ_{2n-1}^u の $2n-1\to\infty$ における漸近形は,

$$\begin{aligned}\Gamma_{2n-1}^u&=\frac{2n-1}{2b}\pi+\frac{\pi\Delta_u}{b}+O(n^{-1})\\&=\frac{\pi}{b}n+\frac{\pi}{2b}(2\Delta_u-1)+O(n^{-1}).\end{aligned} \tag{34}$$

従って,無限乗積の漸近的振る舞いより $q_{u1}(\alpha)$ は $\alpha\to\infty$ において,

$$\begin{aligned}q_{u1}(\alpha)&\sim 2^{-1/2}K_{p1}(-i\alpha)^{-1/2-(2\Delta_u-1)/2}\\&\quad\cdot\exp\left[\frac{-i\alpha b}{\pi}\left(1-C-\ln\frac{-i\alpha b}{\pi}\right)\right]\\&=2^{-1/2}K_{p1}(-i\alpha)^{-\Delta_u}\exp\left[\frac{-i\alpha b}{\pi}\left(1-C-\ln\frac{-i\alpha b}{\pi}\right)\right],\\&\sim -2^{-1/2}K_{p1}(i\alpha)^{-\Delta_u}\sin\left\{b\left[-i\alpha+\frac{\pi}{2b}(2\Delta_u-1)\right]\right\}\\&\quad\cdot\exp\left[\frac{-i\alpha b}{\pi}\left(1-C-\ln\frac{-i\alpha b}{\pi}\right)\right].\end{aligned} \tag{35}$$

但し,

$$\begin{aligned}K_{p1}&=\frac{(\pi/b)^{\Delta_u}\Gamma(1+\Delta_u-1/2)}{\pi^{1/2}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n/b+\pi/2b(2\Delta_u-1)}{\Gamma_{2n-1}^u}\\&=\pi^{-1/2}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\Delta_u}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\Delta_u\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2b}\frac{2n+2\Delta_u-1}{\Gamma_{2n-1}^u}.\end{aligned} \tag{36}$$

次に $q_{u2}(\alpha)$ についても同様に,

$$\begin{aligned}\gamma_{2n-1}&=\frac{2n-1}{2b}\pi+O(n^{-1})\\&=\frac{\pi}{b}n-\frac{\pi}{2b}+O(n^{-1}),(2n-1\to\infty).\end{aligned} \tag{37}$$

式(37)より,無限乗積の漸近的振る舞いを用いて,

$$\begin{aligned}q_{u2}(\alpha)&\sim 2^{-1/2}K_{p2}(-i\alpha)^{-1/2+1/2}\\&\quad\cdot\exp\left[\frac{-i\alpha b}{\pi}\left(1-C-\ln\frac{-i\alpha b}{\pi}\right)\right]\\&=2^{-1/2}K_{p2}\exp\left[\frac{-i\alpha b}{\pi}\left(1-C-\ln\frac{-i\alpha b}{\pi}\right)\right],\\&\sim -2^{-1/2}K_{p2}\sin\left\{b\left[-i\alpha-\frac{\pi}{2b}\right]\right\}\\&\quad\cdot\exp\left[\frac{-i\alpha b}{\pi}\left(1-C-\ln\frac{-i\alpha b}{\pi}\right)\right].\end{aligned} \tag{38}$$

但し,

$$\begin{aligned}K_{p2}&=\frac{(\pi/b)^{1/2-1/2}\Gamma(1-1/2)}{\pi^{1/2}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n/b-\pi/2b}{\gamma_{2n-1}}\\&=\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2b}\frac{2n-1}{\gamma_{2n-1}}.\end{aligned} \tag{39}$$

式(35),(38)を式(32)に適用すると, $q_u(\alpha)$ は $\alpha\to\infty$ において,

$$\begin{aligned}q_u(\alpha)&\sim 2^{-1/2}K_{q1}(-i\alpha)^{-\Delta_u}\\&\quad\cdot\exp\left[\frac{-i\alpha b}{\pi}\left(1-C-\ln\frac{-i\alpha b}{\pi}\right)\right]\\&\quad/2^{-1/2}K_{q2}\exp\left[\frac{-i\alpha b}{\pi}\left(1-C-\ln\frac{-i\alpha b}{\pi}\right)\right]\\&=\frac{K_{q1}}{K_{q2}}(-i\alpha)^{-\Delta_u}\\&=K_q(-i\alpha)^{-\Delta_u},(-\pi/2<\arg\alpha<3\pi/2),\\q_u(\alpha)&\sim 2^{-1/2}K_{q1}(-i\alpha)^{-\Delta_u}\sin\left[-ib\alpha+\frac{\pi}{2}(2\Delta_u-1)\right]\\&\quad\cdot\exp\left[\frac{-i\alpha b}{\pi}\left(1-C-\ln\frac{-i\alpha b}{\pi}\right)\right]\\&\quad/2^{-1/2}K_{q2}\sin\left[-ib\alpha-\frac{\pi}{2}\right]\\&\quad\cdot\exp\left[\frac{-i\alpha b}{\pi}\left(1-C-\ln\frac{-i\alpha b}{\pi}\right)\right]\\&=\frac{K_{q1}}{K_{q2}}(i\alpha)^{-\Delta_u}\frac{\sin(-ib\alpha-\pi/2+\pi\Delta_u)}{\sin(-ib\alpha-\pi/2)}\\&=K_q(i\alpha)^{-\Delta_u}\frac{\sin(ib\alpha-\pi\Delta_u+\pi/2)}{-\sin(ib\alpha+\pi/2)}\\&=K_q(i\alpha)^{-\Delta_u}\frac{\cos(ib\alpha-\pi\Delta_u)}{\cos(ib\alpha)},(\arg\alpha=-\pi/2).\end{aligned} \tag{40}$$

但し,

$$\begin{aligned}K_q&=\frac{K_{q1}}{K_{q2}}=\pi^{-1/2}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\Delta_u}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\Delta_u\right)\\&\quad\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1+2\Delta_u)\gamma_{2n-1}}{(2n-1)\Gamma_{2n-1}^u}.\end{aligned} \tag{41}$$

条件$(U'4)$と式(40)を式(28)に適用すれば，$U_{(+)}(\alpha)$の$\tau > -k_2$における漸近的振舞いを導くことができる．すなわち，

$$U_{(+)}(\alpha) = O\left\{p(\alpha)\alpha^{-3/2-\Delta_u}\right\}, (\alpha \to \infty). \tag{42}$$

$U_{(+)}(\alpha)$は条件$(U4)$を満足しなければならないから，式(41)より直ちに次式が結論される．

$$p(\alpha) = O\left(\alpha^{\Delta_u}\right), (\alpha \to \infty). \tag{43}$$

$p(\alpha)$は零点を持たない整関数があったから，Liouville の定理とその拡張により，

$$p(\alpha) \equiv p_0(\text{定数}) \tag{44}$$

であることがわかる．このとき，同時にΔ_uの値を決定することができ，

$$\Delta_u = 0 \tag{45}$$

を得る．式(43)を式(28)に代入し，条件$(U3)$，$(U'3)$を考慮すれば，$U_{(+)}(\alpha)$のより具体的な表現を導くことができる．すなわち，

$$U_{(+)}(\alpha) = U'_{(+)}(\alpha)\frac{q_u(\alpha)}{q_u(k\cos\theta_0)}. \tag{46}$$

また，式(46)には未知の零点$-i\Gamma^u_{2n-1}$，$(n = 1, 2, 3, \cdots)$が含まれているが，これらの決定方程式は，条件$(U1)$より次式となることが判明する．

$$\lim_{\alpha\to -i\gamma_n} U'_{(+)} q_u(\alpha) - \delta_n U'_{(+)}\left(i\gamma_n\right) q_u\left(i\gamma_n\right) = 0, \quad n = 1, 3, 5, \cdots. \tag{47}$$

式(46)で与えられる$U_{(+)}(\alpha)$は式(45),(47)を付帯的な性質としてもつ関数であり，前述の条件$(U1) \sim (U4)$をすべて満足する．

式(19)についても上と同様の議論を展開することができ，

$$V_{(+)}(\alpha) = V'_{(+)}(\alpha)\frac{q_v(\alpha)}{q_v(k\cos\theta_0)} \tag{48}$$

を得る．但し，

$$V'_{(+)}(\alpha) = \frac{2iA\sin(kb\sin\theta_0)}{N_+(k\cos\theta_0)}\frac{N_{(+)}(\alpha)}{\alpha - k\cos\theta_0}, \tag{49}$$

$$q_v(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1 + \alpha / i\Gamma^v_{2n}}{1 + \alpha / i\gamma_{2n}}, \tag{50}$$

$$\Gamma^v_{2n} = \gamma_{2n} + \Delta^v_n, n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{51}$$

ここで$-i\Gamma^v_n, (n = 2, 4, 6, \cdots)$は$V_{(+)}(\alpha)$の零点，$\Delta^v_n$は$-i\gamma_{2n}$から$-i\Gamma^v_{2n}$への零点の移動量を表す.式(50)の$\alpha \to \infty$における漸近的振舞いを考察することにより，$\Delta^v_n$は次の極限を持つことが示される．

$$\lim_{n\to\infty}\Delta^v_n = 0. \tag{52}$$

また，$V_{(+)}(\alpha)$の零点の決定方程式は次式で与えられる．

$$\lim_{\alpha\to -i\gamma_n} V'_{(+)}(\alpha)q_v(\alpha) - \delta_n V'_{(+)}\left(i\gamma_n\right)q_v\left(i\gamma_n\right) = 0, \quad n = 2, 4, 6, \cdots \tag{53}$$

以上，変形留数解析法に基づいて$U_{(+)}(\alpha)$，$V_{(+)}(\alpha)$を数値計算上便利な形式に構成したが，実は式(27), (49)で定義される$U'_{(+)}(\alpha)$，$V'_{(+)}(\alpha)$は，平行平板導波管による回折問題に対する厳密解を表すことが示される.従って,式(29), (50)なる$q_u(\alpha)$，$q_v(\alpha)$は，領域$|x| \le b$，$z \le 0$を完全導体で満たしたことによる補正関数を表すものと解釈される.本項での議論展開からわかるように，変形留数解析法は厳密解が得られるような規範的問題の解に対し,零点の移動なる概念を用いて本来の問題の解を近似的に構成するものである．

$U_{(+)}(\alpha)$，$V_{(+)}(\alpha)$のもつ零点の決定方程式はおのおの，式(47), (53)で与えられるが，これらは共に無限連立方程式であり，未知数が無限乗積の中に含まれるため，このままの形式では不都合である．これらの零点は反復法により，効率良く求めることができる．

4. 結論

式(22)(23)は過去の研究で得られた結果[11]とは異なり，導波管内の異種媒質の境界面間の多重散乱を直観的に理解しやすい形式に表現している．更に，本研究の結果は導波管内媒質を完全導体，真空等の特別の場合に極限移行することが容易であるという利点を持っている．以上より，本研究で得た解は文献[11]の結果に比べて優れている．本要旨で展開した解析は E 波入射の場合であるが，H 波入射の場合についても Wiener-Hopf 法と変形留数解析法を併用して同様に解析できる[12]. また，研究成果は文献[12]において発表予定である．

謝辞

本論文を作成するにあたり，ご指導を頂いた修士論文指導教員の小林一哉教授に心より感謝致します．長坂崇史助教には，本論文の作成にあたり，適切なご助言を賜りました．感謝申し上げます．また，日常の議論を通じて多くの知識や示唆を頂戴したしました小林研究室の皆様に深く感謝致します．

文　献

[1] Stone, W. R., Ed., Radar Cross Sections of Complex Objects, IEEE Press, New York, 1990.

[2] Bhattacharyya, A. K. and D. L. Sengupta, Radar Cross Section Analysis and Control, Artech House, Boston, 1991.

[3] Lee, S.-W. and H. Ling, "Data book for cavity RCS: Version 1", Tech. Rep., No. SWL 89-1, Univ. Illinois, Urbana, 1989.

[4] Kobayashi, K., "Wiener-Hopf and modified residue calculus techniques", in Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems, Chap. 8, Yamashita, E. Ed., Artech House, Boston, 1990.

[5] Koshikawa, S. and K. Kobayashi, "Diffraction by a terminated, semi-infinite parallel-plate waveguide with three-layer material loading: the case of H polarization", Electromagnetic Waves & Electronic Systems, vol. 5, no. 1, pp. 13-23, 2000.

[6] Koshikawa, S. and K. Kobayashi, "Diffraction by a terminated, semi-infinite parallel-plate waveguide with three-layer material loading", IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 45, no. 6, pp. 949-959, 1997.

[7] Koshikawa, S., K. Ikeda, and K. Kobayashi, "Diffraction by a semi-infinite parallel-plate waveguide with five different material loading: the case of H polarization", Tech. Rep., IEE Japan, no. EMT-96-22, 1996.

[8] Koshikawa, S. and K. Kobayashi, "Diffraction by a semi-infinite parallel-plate waveguide with five different material loading: the case of E polarization", Tech. Rep., IEE Japan, no. EMT-96-85, 1996.

[9] Mittra, R. and S. W. Lee, Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, Macmillan, New York, 1971.

[10] 池田幸司，"五層媒質装荷半無限平行平板導波管による平面 H 波の回折"，中央大学修士論文，1996 年 3 月．

[11] 兼子隆太郎，"五層媒質装荷半無限平行平板導波管による平面波の回折"，中央大学修士論文，2012 年 2 月．

[12] K. W. He, D. T. Zhang, and K. Kobayashi, "Diffraction by a semi-infinite parallel-plate waveguide with five-layer material loading: the case of H polarization", PIERS 2022 Hangzhou, April 25-29, 2022, Hangzhou, China (accepted for presentation).