修士論文要旨（2021 年度）

導体平板上の方形溝による平面波の回折：Wiener-Hopf 法による解析

Wiener-Hopf Analysis of the Plane Wave Diffraction by a Trough on the Ground

電気電子情報通信工学専攻　出口　優一

1.　はじめに

近年，レーダによる物体の形状認識の分野において，物体の特徴ある形状が散乱・回折に関する解析において重要なのは，物体のレーダ断面積（Radar Cross Section ; RCS）の予測・低減であり，これはレーダによる航空機等の形状認識に貢献する．

RCS の問題に関しては多くの報告がなされてきたが，その中で多数を占める高周波漸近解法，数値解析を用いた報告には周波数，寸法，入射角，観測角に対する制限がある．しかし，波動の散乱・回折問題に対する代表的な厳密解法である，Wiener-Hopf 法を用いた報告では，散乱体の寸法があまり小さくない限り有効となる解が得られている．無限平板上の方形溝に関しても多くの報告がなされている[1][2]．文献[2]では導体平板上に設けられた 2 次元方形溝を考え、その方形溝に平面電磁波が入射した場合の散乱問題について Kobayashi および Nomura の方法（小林ポテンシャル法）を用いて解析がなされている．本研究では，文献[2]と同じ問題を Wiener-Hopf 法により厳密に解析し散乱界の表現を解析的に導出している．時間因子は $e^{-i\omega t}$ と仮定し，以下において全ての記述から省略する．

2.　変換波動方程式.

図 2.1 に示すような無限平面上の方形溝による平面 H 波の散乱問題を解析する．方形溝を構成する平板は完全導体で y 軸方向に一様であり方形溝内の比誘電率は ε_r，比透磁率は μ_r である．

入射界 $\phi^i\left(\equiv H_y^i\right)$ は次式で与えられる．

$$\phi^i(x,z) = e^{-ik(x\sin\theta_0 + z\cos\theta_0)},$$
$$k = \omega(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}, \quad 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{3.1}$$

全磁界 $\phi^t(\equiv H_y^t)$ を，

$$\begin{aligned}\phi^t(x,z) &= \phi^i(x,z) + \phi^r(x,z) + \phi(x,z), \quad x>0,\\ &= \phi(x,z), \quad -b<x<0\end{aligned} \tag{3.2}$$

で定義する．但し，$\phi^r(x,z)$ は無限導体平板からの反射界を表し，

$$\phi^r(x,z) = e^{ik(x\sin\theta_0 - z\cos\theta_0)} \tag{3.3}$$

により定義される．このとき全磁界 ϕ^t は，以下に示す 2 次元波動方程式を満足する．

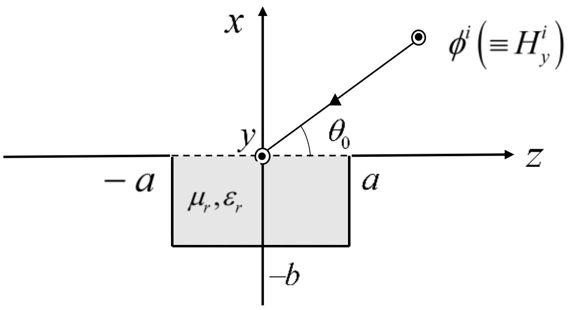

図 2.1.　無限平面上の方形溝

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu(x,z)\varepsilon(x,z)k^2\right]\cdot\phi^t(x,z) = 0. \tag{2.1}$$

また，零でない電磁界成分については次式に示すような関係が成り立つ．

$$(H_y^t, E_x^t, E_z^t) = \left(\phi^t, \frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\partial\phi^t}{\partial z}, \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\partial\phi^t}{\partial x}\right). \tag{2.2}$$

また，Fourier 積分を

$$\Phi_\pm(x,\alpha) = \pm(2\pi)^{-1/2}\cdot\int_{\pm a}^{\pm\infty}\phi(x,z)e^{i\alpha(z\mp a)}dz, \tag{2.3}$$

$$\Phi_1(x,\alpha) = (2\pi)^{-1/2}\cdot\int_{-a}^{a}\phi(x,z)e^{i\alpha z}dz \tag{2.4}$$

により導入する．次に，変換波動方程式を導出する．

(i)領域 $x>0$

波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\phi(x,z) = 0 \tag{2.5}$$

に Fourier 変換を施すと，

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \gamma^2\right)\Phi(x,\alpha) = 0\ , |\tau| < k_2\cos\theta_0 \tag{2.6}$$

を得る．式(2.6)は領域 $x>0$ における変換波動方程式である．

但し，

$$\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}, \tag{2.7}$$

であり，γ の分岐は $\gamma\big|_{\alpha=0} = -ik$ なるものを採用する．

(ii)領域 $-b<x<0$

この領域での波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_r{}^2\right)\phi(x,z) = 0,\ k_r = (\mu_r\varepsilon_r)^{1/2}k \tag{2.8}$$

の両辺に $(2\pi)^{-1/2}e^{i\alpha z}$ を掛け，$a<z<-a$ の範囲で積

分し整理すると，次式が得られる．

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\Gamma^2\right)\Phi(x,\alpha)=e^{i\alpha a}f(x)-e^{-i\alpha a}g(x). \quad (2.9)$$

但し，

$$\Gamma=(\alpha^2-k_r{}^2)^{-1/2}, \quad (2.10)$$

$$f(x)=(2\pi)^{-1/2}i\alpha\phi(x,a-0), \quad (2.11)$$

$$g(x)=(2\pi)^{-1/2}i\alpha\phi(x,-a+0). \quad (2.12)$$

式(2.9)は領域 $-b<x<0$ における変換波動方程式である．

3. $x=0$ における境界条件

まず，方形溝開口面における境界条件について考察する．次の各式が得られる．

$$\frac{\partial\phi(+0,z)}{\partial z}=0, \quad |z|>a, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial\phi(+0,z)}{\partial x}=\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial\phi(-0,z)}{\partial x}, \quad |z|<a, \quad (3.2)$$

$$\phi(+0,z)-\phi(-0,z)=-2e^{-ikz\cos\theta_0}, \quad |z|<a. \quad (3.3)$$

式(3.1)，(3.2)，(3.3)は実空間での，における境界条件である．

次に，式(3.1)，(3.2)，(3.3)の Fourier 変換領域における表現を導くと，次の各式が得られる．

$$\Phi_{\pm}'(+0,\alpha)=0, \quad (3.4)$$

$$\Phi_1'(+0,\alpha)=\frac{1}{\varepsilon_r}\Phi_1'(-0,\alpha), \quad (3.5)$$

$$\Phi_1(+0,\alpha)-\Phi_1(-0,\alpha)=\frac{Ae^{-i\alpha a}-Be^{i\alpha a}}{\alpha-k\cos\theta_0}. \quad (3.6)$$

但し，

$$A=\frac{2e^{ika\cos\theta_0}}{(2\pi)^{1/2}}, \qquad B=\frac{2e^{-ika\cos\theta_0}}{(2\pi)^{1/2}}. \quad (3.7)$$

式(3.4)，(3.5)，(3.6)は Fourier 変換領域での $x=0$ における境界条件である．

4. 散乱界の表現

(i)領域 $x>0$

式(2.6)の解を x で微分して $x=+0$ と置き，式(3.4)を考慮すると，

$$\Phi(x,\alpha)=-\gamma^{-1}\Phi_1'(+0,\alpha)e^{-\gamma x} \quad (4.1)$$

を得る．

(ii)領域 $-b<x<0$

式(2.9)を便宜上

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\Gamma^2\right)\Phi(x,\alpha)=h(x,\alpha) \quad (4.2)$$

と書く．但し，

$$h(x,\alpha)=e^{i\alpha a}f(x)-e^{-i\alpha a}g(x). \quad (4.3)$$

式(4.2)の解を求め境界条件を考慮し積分を評価すると以下の式が得られる．

$$\Phi(x,\alpha)=\Phi_1'(-0,\alpha)\frac{\cosh\Gamma(x+b)}{\Gamma\sinh\Gamma b} -\frac{2}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\frac{e^{i\alpha a}f_n-e^{-i\alpha a}g_n}{\alpha^2+\Gamma_n^2}\cos\frac{n\pi}{b}x. \quad (4.4)$$

但し，

$$f_n=\int_{-b}^{0}f(x)\cos\frac{n\pi}{b}xdx, \quad -b<x<0, \quad (4.5)$$

$$g_n=\int_{-b}^{0}g(x)\cos\frac{n\pi}{b}xdx, \quad -b<x<0. \quad (4.6)$$

式(4.1)，(4.4)は，Fourier 変換領域における散乱界の表現であり，帯状領域 $|\tau|<k_2\cos\theta_0$ で成り立つものである．

5. Wiener-Hopf 方程式

式(4.1)，(4.4)をそれぞれ $x=+0,-0$ とおき，差をとり式(3.5)，(3.6)を考慮すると，

$$\frac{\Phi_1'(+0,\alpha)}{N(\alpha)}=e^{-i\alpha a}U_-(\alpha)+e^{i\alpha a}U_{(+)}(\alpha) -\frac{2}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\frac{e^{i\alpha a}f_n-e^{-i\alpha a}g_n}{\alpha^2+\Gamma_n^2}, \quad (5.1)$$

を得る．但し，

$$N(\alpha)=\frac{\sinh\Gamma b}{\frac{1}{\gamma}\sinh\Gamma b-\frac{\varepsilon_r}{\Gamma}\cosh\Gamma b}, \quad (5.2)$$

$$U_-(\alpha)=\Phi_-(+0,\alpha)+\frac{A}{\alpha-k\cos\theta_0}, \quad (5.3)$$

$$U_{(+)}(\alpha)=\Phi_+(+0,\alpha)-\frac{B}{\alpha-k\cos\theta_0}. \quad (5.4)$$

式(5.1)は Wiener-Hopf 方程式であり，帯状領域 $-k_2<\tau<k_2\cos\theta_0$ において成り立つ．なお，式中に現れる $N(\alpha)$ は，この問題の核関数である．

6. 核関数の分解

核関数 $N(\alpha)$ の分解関数の導出を行う．便宜上，次の関数

$$N^{(1)}(\alpha)=\frac{e^{-\gamma b}\sinh\Gamma b}{\Gamma}, \quad (6.1)$$

$$N^{(2)}(\alpha)=\frac{\frac{1}{\gamma}\sinh\Gamma b-\frac{\varepsilon_r}{\Gamma}\cosh\Gamma b}{\Gamma e^{\gamma b}} \quad (6.2)$$

を導入すれば，$N(\alpha)$ は

$$N(\alpha)=\frac{N^{(1)}(\alpha)}{N^{(2)}(\alpha)} \quad (6.3)$$

と書くことができる．

このうち $N^{(1)}(\alpha)$ の因数分解は，小林らの方法[4][5]と同様に遂行することができ，以下のようになる．

$$N_+^{(1)}(\alpha)=\left(\frac{\sin k_r b}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\mu_r}\right)k_r}\right)^{1/2}$$
$$\cdot\exp\left\{\left(\frac{i\alpha b}{\pi}\right)\left[1-C+\ln\left(\frac{2\pi}{kb}\right)+i\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$
$$\cdot\exp\left\{\left(\frac{ib\gamma}{\pi}\ln\frac{\alpha-\gamma}{k}\right)\right.$$
$$\left.\cdot\prod_{n=2,even}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha}{i\Gamma_n}\right)e^{2i\alpha b/n\pi}\right\}. \quad (6.4)$$

但し,

$$\Gamma_n=\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2-k_r{}^2\right\}^{1/2}. \quad (6.5)$$

$N^{(2)}(\alpha)$ の因数分解を Bates and Mittra[5]-[7]の手法に基づいて実行すると以下の結果が得られる.

$$N_+^{(2)}(\alpha)=\sqrt{N^{(2)}(0)}\exp\left[\tilde{N}_+^{(2)}(\alpha)\right] \quad (6.6)$$

但し,

$$\tilde{N}_+^{(2)}(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{N^{(2)\prime}(\beta)}{N^{(2)}(\beta)}\ln\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)d\beta. \quad (6.7)$$

式(6.7)の被積分関数が上半値平面 $\mathrm{Im}\beta>-k_2$ に持つ特異点は, 第 1 式については $K^{(2)}(\beta)$ の零点 $\beta=\alpha_n^c(n=1,2,\cdots,N_c)$, 及び分岐点 $\beta=k$, 第 2 式については $N^{(2)}(\beta)$ の零点 $\beta=\alpha_n^s(n=1,2,\cdots,N_s)$, 及び分岐点 $\beta=-k$ である. さらに式の被積分関数は $O(\beta^{-1})$ なる次数で零に漸近するから, 積分路を上半平面で閉じることにより, 以下の各式が導かれる.

$$N_+{}^{(2)}(\alpha)=\sqrt{N^{(2)}(\alpha)}\exp\left\{\left[-v_s(\alpha)\right]\right.$$
$$\left.\cdot\prod_{n=1}^{N_s}\left(\frac{\alpha_n^s+\alpha}{\alpha_n^s-\alpha}\right)^{1/2}\right\}. \quad (6.8)$$

但し,

$$v_s(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\ln\left[\frac{\left\{(kb)^2-t^2\right\}^{1/2}+\alpha b}{\left\{(kb)^2-t^2\right\}^{1/2}-\alpha b}\right]$$
$$\cdot\left\{1-\frac{1}{2\varepsilon_r}\frac{2t^2+\left(t_r-\frac{t^2}{t_r}\right)\sin 2t_r}{t^2\sin^2 t_r+\left(\frac{t_r}{\varepsilon_r}\right)^2\cos^2 t_r}\right\}dt. \quad (6.9)$$

$$t=wb,\quad t_r=\sqrt{t^2+(\varepsilon_r\mu_r-1)(kb)^2}. \quad (6.10)$$

式(6.4), (6.8)を結合すれば, 分解関数 $N_+(\alpha)$ の具体形は, 次式で与えられることが判明する.

$$N_+(\alpha)=\left\{\frac{\Gamma e^{\gamma b}\sin k_r b}{k_r\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\Gamma\cosh\Gamma b+\gamma\sinh\Gamma b\right)}\right\}^{1/2}$$
$$\cdot\exp\left(\frac{ib\gamma}{\pi}\ln\frac{\alpha-\gamma}{k}\right)$$
$$\cdot\exp\left\{\frac{i\alpha b}{\pi}\left(1-C+\ln\frac{2\pi}{kb}+i\frac{\pi}{2}\right)+v_s(\alpha)\right\}. \quad (6.11)$$

7. 形式解

核関数 $N(\alpha)$ に積形式の分解を施し Wiener-Hopf 方程式(5.1)に対し, 帯状領域 $|\tau|<k_2\cos\theta_0$ で分解操作を施し式の両辺は Liouville の定理より恒等的に零となることが知られている. 両式の右辺, 左辺を零と置き, 整理することで式が得られる. これらは, 2 個の未知関数 $U_-(\alpha), U_{(+)}(\alpha)$ の解を満足する連立積分方程式である. これらの式に現れる積分を評価すると式(7.1), (7.2), (7.3), (7.4)が得られる.

$$N_-(\alpha)U_-(\alpha)+\frac{1}{2\pi i}\int_k^{k+i\infty}\frac{e^{2i\beta a}S(\beta)U_{(+)}(\beta)}{N_+(\beta)(\beta-\alpha)}d\beta$$
$$+\frac{AN(k\cos\theta_0)}{N_+(k\cos\theta_0)(\alpha-k\cos\theta_0)}+\sum_{n=1}^{N_s}\mathrm{Res}(\alpha_n^s)$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\pi}{b^2}\frac{1}{\alpha+i\Gamma_n}\left(\frac{N_-(\alpha)(e^{2i\alpha a}f_n-g_n)}{\alpha-i\Gamma_n}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{N_+(i\Gamma_n)(e^{2a\Gamma_n}f_n-g_n)}{2i\Gamma_n}\right)\right\}=0, \quad (7.1)$$

$$N_+(\alpha)U_{(+)}(\alpha)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_k^{k+i\infty}\frac{e^{2i\beta a}S(\beta)U_-(-\beta)}{N_+(\beta)(\beta+\alpha)}d\beta-\frac{BN_+(k\cos\theta_0)}{\alpha-k\cos\theta_0}$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\pi}{b^2}\frac{1}{\alpha+i\Gamma_n}\left(\frac{N_-(\alpha)(e^{2i\alpha a}f_n-g_n)}{\alpha-i\Gamma_n}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{N_+(i\Gamma_n)(e^{2a\Gamma_n}f_n-g_n)}{2i\Gamma_n}\right)\right\}$$
$$=0, \quad (7.2)$$

$$\frac{e^{i\alpha a}\Phi_1'(0,\alpha)}{N_+(\alpha)}+e^{2i\alpha a}N_-(\alpha)U_{(+)}(\alpha)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_k^{k+i\infty}\frac{e^{2i\beta a}S(\beta)U_{(+)}(\beta)}{N_+(\beta)(\beta-\alpha)}d\beta$$
$$+\frac{AN(k\cos\theta_0)}{N_+(k\cos\theta_0)(\alpha-k\cos\theta_0)}$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{b^2}\frac{N_+(i\Gamma_n)(e^{2a\Gamma_n}f_n-g_n)}{2i\Gamma_n(\alpha+i\Gamma_n)}$$
$$=0, \quad (7.3)$$

$$\frac{e^{-i\alpha a}\Phi_1'(0,\alpha)}{N_-(\alpha)}+e^{-2i\alpha a}N_+(\alpha)U_-(\alpha)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_k^{k+i\infty}\frac{e^{2i\beta a}S(\beta)U_-(-\beta)}{N_+(\beta)(\beta+\alpha)}d\beta-\frac{BN_+(k\cos\theta_0)}{\alpha-k\cos\theta_0}$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{b^2}\frac{N_+(i\Gamma_n)\left(f_n-e^{2a\Gamma_n}g_n\right)}{2i\Gamma_n(\alpha-i\Gamma_n)}$$
$$=0. \tag{7.4}$$

但し，

$$S(\beta)=2\sinh\left\{\left(\beta^2-k_r{}^2\right)^{1/2}b\right\}$$
$$\cdot\left[\left(\beta^2-k^2\right)^{-1/2}\sinh\left\{\left(\beta^2-k_r{}^2\right)^{1/2}b\right\}\right. \tag{7.5}$$
$$\left.+\varepsilon_r\left(\beta^2-k_r{}^2\right)^{-1/2}\cosh\left\{\left(\beta^2-k_r{}^2\right)^{1/2}b\right\}\right]^{-1}.$$

式(7.1)，(7.2)，(7.3)，(7.4)は Wiener-Hopf 方程式(5.1)に対する厳密解であり，Wiener-Hopf 方程式に対する解 $U_-(\alpha), U_{(+)}(\alpha), \Phi_1'(0,\alpha)$ の具体形を与える．ところが，式中には未知関数を被積分関数にもつ無限積分並びに無限個の未知数を一般項に持つ無限級数が含まれているため，これらは形式解である．

分岐切断に沿う積分については，開口幅 $2a$ が波長に比べて十分大きいとの条件の下で高周波漸近展開を施す．また，無限級数に含まれる未知数については端点条件を厳密に考慮して漸近的振る舞いを導出する．このようにして，未知数を含む有限次元の連立方程式を導出できる．この連立方程式を数値的に解くことにより，Wiener-Hopf 方程式の近似解が求められる．

8.　散乱界

方形溝内部の実空間における散乱界は，式(4.4)に対し，Fourier 逆変換を施すことによって得られる．

$$\phi^t(x,\alpha)$$
$$=(2\pi)^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{b\Gamma_n}\cos\frac{n\pi}{b}x\left(f_ne^{-\Gamma_n(z-a)}-g_ne^{\Gamma_n(z+a)}\right)\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos\frac{n\pi}{b}x\cdot\left(T_{1n}e^{-\Gamma_n(z-a)}-T_{2n}e^{\Gamma_n(z+a)}\right)\right\} \tag{8.1}$$

式(8.1)は方形溝内部への透過界を表し，方形溝内の TM モードとなっている．

また，方形溝から十分離れた遠方における散乱界の漸近表現を導出する方形溝から十分離れた遠方では，領域 $-b<x<0$ の存在は無視しうるから，この微小領域における散乱遠方界はあまり重要ではない．故に，以下においては領域 $x>0$ における散乱遠方界の導出のみ行うこととする．

$$\phi(\rho,\theta)\sim\Phi_1(0,-k\cos\theta)k\sin|\theta|\frac{e^{i(k\rho-\pi/4)}}{(k\rho)^{1/2}},$$
$$-\pi<\theta<\pi \tag{8.2}$$

を得る．式(8.2)は方形溝外部の散乱遠方界である．

9.　結論

本研究では，無限平板上の方形溝による散乱問題を取り上げ，Wiener-Hopf 法を用いて厳密に解析した．

Wiener-Hopf 方程式を解くことにより厳密解(形式解)を導出し，Fourier 逆変換により方形溝内部及び外部の散乱界を得た．特に，方形溝外部の散乱界は鞍部点法を適用し，散乱遠方界を導出した．

本研究では H 波について解析を行ったが，同様に E 波を扱い導体平板上の方形溝による平面波の散乱界の導出を既に行っている．現在，これらの結果から数値計算を行っている．また，先行研究と比較し精度を確かめる予定である．

参考文献

[1] A. Buyukaksoy, F. Birbir, and E. Erdogan, "Scattering characteristics of a rectangular groove in a reactive surface", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 43, No. 12, December 1995.

[2] 白井宏，佐藤亮一，“導体平板上のギャップによる平面電磁波の散乱”，電子情報通信学会論文誌. Vol. J80-C-I, No. 5, pp.179-185, 1997 年 5 月

[3] 小林一哉，“電磁波(光)伝送系における散乱・回折に関する解析的研究”，早稲田大学博士論文，1982.

[4] K. Kobayashi, “Diffraction of a plane electromagnetic wave by a rectangular conducting rod (I) - Rigorous solution by the Wiener-Hopf technique -,” *Bull. Fac. Sci. Eng., Chuo Univ.,* Vol. 25, pp. 229-261, 1982.

[5] K. Kobayashi, “Diffraction of a plane electromagnetic wave by a rectangular conducting rod (II) - High frequency asymptotic expansions of the diffracted field,” *Bull. Fac. Sci. Eng., Chuo Univ.,* Vol. 25, pp. 262-282, 1982.

[6] B. Noble, *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations,* Pergamon, London, 1958.

[7] R. Mitta and S. W. Lee, *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves,* Macmillan, New York, 1971.