べき乗ガウス型分布族に基づく確率的劣化モデルと形状関数の経験的推定に関する研究

Stochastic Degradation Models Based on the Family of Powered Inverse Gaussian Distributions and Empirical Estimation of the Shape Function

中央大学大学院　理工学研究科
経営システム工学専攻　長塚研究室
20N7100020H　伏原 卓哉

1　研究背景

物や製品は時間が経つことによって劣化が進み，品質が低下することで故障が生じる．事前に故障を防ぐためには対象物の寿命を予測し，適切なタイミングにおける交換やメンテナンスを行うことが必要である．劣化データは故障データに比べ 1 サンプルから多くのデータが取得でき，近年 IoT の進歩やセンサリング技術の向上によって取得できる機会が増えた．そのため，劣化データに関する研究が近年盛んに進められており劣化データに当てはめるためのモデル「劣化モデル」が多く提案されている．

劣化は時間の経過により発生しランダム性を伴うため確率過程 $\{Y(t); t \geq 0\}$ によってモデル化され，Lévy 過程が劣化現象を説明するのによく用いられる．Lévy 過程に基づく劣化モデルは Wiener, Gamma, Inverse Gaussian (IG) 劣化モデル [1],[4],[7] などが該当するが 3 つほどしかない．そのため，観測時間が得られた下で Lévy 過程である場合を考えることで多様なモデルを考慮に入れることが可能となり，Generalized Inverse Gaussian (GIG) 劣化モデル [9] などが提案された．GIG 劣化モデルは Wiener, Gamma, IG 過程の尤度関数の一般化になっているため劣化現象を表すモデルとしての妥当性を与えている．このように観測時間が得られた下で Lévy 過程である劣化モデルを考え，従来劣化モデルの研究に用いられてきた分布を拡張した分布で劣化モデルを構築することにより汎用的な劣化モデルになるのではないかと考えられる．

そこで本研究の一つ目の提案として，IG 分布および GIG 分布に従う確率変数をべき乗変換して得られる一般化分布である「Powered Inverse Gaussian (PIG) 分布，Powered Generalized Inverse Gaussian (PGIG) 分布の 2 つの分布に基づく劣化モデル」について提案する．この提案は [2] にも掲載している．

次に，本研究の二つ目の提案として，劣化モデルにおける形状関数の経験的推定に関する提案を行う．劣化モデルの研究では形状関数 $\Lambda(t)$ をモデルに組み込むことによって，増分の従う分布の時間による変化をなくし，定常性を保つようにしており， 形状関数は $\Lambda(0) = 0$ となる単調非減少関数という性質を持つ．形状関数は [10] で紹介された $t, t^{\gamma}, \exp(\gamma t) - 1$ などがよく用いられている．これらの形状関数を解析者がトライ&エラーによりベストな関数を決定するため，形状関数の妥当性に関しては研究もあまりされていない．そこで，本研究の 2 つ目の提案として「形状関数の経験的推定法」について述べる．

2　提案モデル・手法

2.1　PIG 劣化モデル

Powered Inverse Gaussian (PIG) 分布は [3] で提案された確率分布である．PIG 分布は対数正規分布なども包含している．

一方，n 個の観測時間 $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$ が得られたもとで，次の性質を持つ確率過程 $\{Y(t)|t \geq 0\}$ を PIG 劣化モデルとする．

- $Y(0) = 0 \quad a.s.$
- $Y(t_i) - Y(t_{i-1})$ $(i = 1, \ldots, n)$ は独立である
- $Y(t_i) - Y(t_{i-1}) \sim$
$$PIG(\mu\Delta\Lambda(t_{i-1}, t_i), \sigma(\Delta\Lambda(t_{i-1}, t_i))^2, \alpha)$$

2.2　PGIG 劣化モデル

Powered Generalized Inverse Gaussian (PGIG) 分布は GIG 分布を拡張した分布であり，[5] の中でも示されている，PGIG 分布は一般化ガンマ分布なども包含している．

一方，n 個の観測時間 $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$ が得られたもとで，次の性質を持つ確率過程 $\{Y(t)|t \geq 0\}$ を PGIG 劣化モデルとする．

表 1: レーザーデータにおける AIC

劣化モデル	$\Lambda(t)=t$
Gamma [4]	-135.22
IG [7]	-146.07
GIG [9]	-145.03
PIG (Proposed)	$\mathbf{-147.62}$
PGIG (Proposed)	-145.82

表 2: クラックデータ 1 における AIC

劣化モデル	$\Lambda(t)=t^\gamma$	$\Lambda(t)=e^{\gamma t}-1$
Gamma [4]	123.39	100.06
IG [7]	105.69	88.99
GIG [9]	105.74	91.20
PIG (Proposed)	99.04	**84.36**
PGIG (Proposed)	**87.96**	90.10

- $Y(0)=0 \quad a.s.$
- $Y(t_i)-Y(t_{i-1})$ $(i=1,\ldots,n)$ は独立である
- $Y(t_i)-Y(t_{i-1})\sim$

$$PGIG(\lambda\Delta\Lambda(t_{i-1},t_i),\chi(\Delta\Lambda(t_{i-1},t_i))^2,\psi,\alpha)$$

2.3　形状関数推定に用いる手法

データから形状関数を推定するために候補に上がる手法は様々考えられる．本研究では以下の手法に焦点を絞り評価を行った．

- ガウス過程回帰 (以降，GPR)
- 3 次平滑化スプライン (以降，CSS)
- 3 次多項式回帰 (以降，CPR)

これらの手法を取り上げた理由，推定手順，ハイパーパラメータの設定は本論に記載している．

3　実データによる適合度評価

実データとして，レーザーデータ [6], クラックデータ 1[11], クラックデータ 2[6], クラックデータ 3[8] の 4 種類のデータを用いた．使用する劣化データはどれもデータ数が少なく，汎化性能の評価を行えないと判断し適合度のみを評価する．

表 3: クラックデータ 2 における AIC

劣化モデル	$\Lambda(t)=t^\gamma$	$\Lambda(t)=e^{\gamma t}-1$
Gamma [4]	-1156.33	-1194.46
IG [7]	-1166.85	-1202.12
GIG [9]	-1164.13	-1196.16
PIG (Proposed)	-1165.60	-1201.18
PGIG (Proposed)	$\mathbf{-1179.40}$	$\mathbf{-1225.07}$

3.1　PIG, PGIG 劣化モデルの結果

比較するモデルとして Gamma[4], IG[7], GIG[9] 劣化モデルを取り上げ，PIG，PGIG 劣化モデルとの比較を行なった．評価指標として AIC を用いてモデルの評価を行う．各データで使用した形状関数は過去の研究に基づいて使用している．

表 1 よりレーザーデータにおいて AIC では PIG 劣化モデルが最良であり，表 2 からクラックデータ 1 において $\Lambda(t)=t^\gamma$ では PGIG 劣化モデルが，$\Lambda(t)=\exp(\gamma t)-1$ では PIG 劣化モデルが AIC の観点から最も良い結果となった．次に，表 3,4 からクラックデータ 2.3 ではどちらの形状関数の場合も PGIG 劣化モデルが AIC としては最も良くなった．

これらの結果から，PGIG 劣化モデルは AIC の観点では多くのデータに対して従来の劣化モデルよりも良い適合結果を示すことがわかる．また，PIG 劣化モデルは PGIG 劣化モデルとの比較では多くの場合 AIC で劣るが，一部のデータでは PGIG 劣化モデル以上の AIC を示した．

3.2　形状関数の比較

提案した形状関数推定法により推定した形状関数と従来の形状関数の性能を IG 劣化モデルと Gamma 劣化モデルに当てはめ比較を行う．ここでは評価指標として対数尤度 (Log-Likelihood; LL) を使用した．

IG 劣化モデルにおける形状関数ごとの対数尤度の結果を表 5 に示す．ここで，$\hat{\Lambda}^1(t),\hat{\Lambda}^2(t),\hat{\Lambda}^3(t)$ はそれぞれ $\Lambda(t)=t,t^\gamma,\exp(\gamma t)-1$ において推定した形状関数，

表 4: クラックデータ 3 における AIC

劣化モデル	$\Lambda(t)=t^\gamma$	$\Lambda(t)=e^{\gamma t}-1$
Gamma [4]	-429.83	-429.92
IG [7]	-436.21	-436.40
GIG [9]	-434.44	-434.62
PIG (Proposed)	-436.48	-436.66
PGIG (Proposed)	$\mathbf{-448.82}$	$\mathbf{-453.45}$

表 5: IG 劣化モデルでの各形状関数の対数尤度

形状関数	Laser	Crack1	Crack2	Crack3
$\hat{\Lambda}^1(t)$	75.03	-101.73	540.33	221.06
$\hat{\Lambda}^2(t)$	75.04	-49.85	586.42	221.11
$\hat{\Lambda}^3(t)$	75.03	**-41.49**	**603.06**	221.20
$\hat{\Lambda}^G(t)$	74.85	-46.91	596.26	220.90
$\hat{\Lambda}^P(t)$	74.89	-47.80	596.90	221.56
$\hat{\Lambda}^S(t)$	**77.79**	-45.18	599.19	**225.74**

表 6: Gamma 劣化モデルでの各形状関数の対数尤度

形状関数	Laser	Crack1	Crack2	Crack3
$\hat{\Lambda}^1(t)$	69.61	-111.15	529.49	217.89
$\hat{\Lambda}^2(t)$	69.62	-58.69	581.17	217.91
$\hat{\Lambda}^3(t)$	69.61	-47.03	600.23	217.96
$\hat{\Lambda}^G(t)$	69.38	-46.73	599.00	217.80
$\hat{\Lambda}^P(t)$	69.42	-48.22	598.93	218.31
$\hat{\Lambda}^S(t)$	**72.99**	**-46.09**	**601.27**	**221.91**

$\hat{\Lambda}^G(t), \hat{\Lambda}^P(t), \hat{\Lambda}^S(t)$ はそれぞれ GPR，CPR，CSS によって推定した形状関数を示している．また，表中の Laser はレーザーデータ，Crack1 はクラックデータ 1，Crack2 はクラックデータ 2，Crack3 はクラックデータ 3 を指している．表 5 から，レーザーデータとクラックデータ 3 では CSS によって推定した形状関数が，クラックデータ 1,2 では $\exp(\gamma t) - 1$ の形状関数が対数尤度として最も良くなった．

次に，Gamma 劣化モデルにおける形状関数ごとの対数尤度の結果を表 6 に示す．全てのデータセットにおいて CSS が最も対数尤度が高い結果となった．

表 4,5 ともに CSS が高い性能を上げているが，GPR, CPR も既存の形状関数と同等もしくは同等以上の結果を示している．このことから提案した推定手法を使うことで従来のような形状関数の関数形を選択せずとも従来以上の性能を上げることがわかる．表 4.3.1, 4.3.2 ともに CSS が特に高いパフォーマンスを上げているが，GPR, CPR も既存の形状関数と同等もしくは同等以上の結果を示している．このことから提案した推定手法を使うことで従来の形状関数である $\Lambda(t) = t, t^\gamma, \exp(\gamma t) - 1$ の中から関数を選択せずとも同等以上のパフォーマンスを上げれることがわかる．

4　シミュレーション

4.1　PIG, PGIG 劣化モデルの推定精度

PIG，PGIG 劣化モデル従来の劣化モデルよりパラメータ数が多く推定精度が悪くなると考えられる．そのため，IG, GIG, PIG, PGIG 劣化モデルの推定精度を比較を行う．各劣化モデルで 10,000 回分のシミュレーションを行い，その推定値の Bias, MSE などを求めて推定精度を評価する．結果としては，PIG 劣化モデルは IG,GIG 劣化モデルと比べ推定精度はあまり変わらなかったが，PGIG 劣化モデルは異常な推定値が出やすいためサンプル数を多く確保する必要がある．具体的なシミュレーションの条件，手順，結果は本論を参照されたい．

4.2　形状関数ごとの予測精度の比較

既存の形状関数と提案した推定手法から推定した形状関数の予測精度の比較を IG 劣化モデルと Gamma 劣化モデルのシミュレーションデータを用いて行う．各形状関数ごとにシミュレーションを 1000 回行い，1 シミュレーションごとのユニット（サンプル）数 n は 25, データの観測時間は $t = 0.5, \ldots, 10$ の 0.5 刻みとし,$t = 11, 12$ における予測を行い，評価指標として MSE を用いて予測精度を評価する．シミュレーションデータを発生させる際，真の形状関数として以下の 4 つを使う．

$$\Lambda_{s_1}(t) = at + bt^2 + ct^3 \tag{1}$$

$$\Lambda_{s_2}(t) = \exp(ct^b) - 1 \tag{2}$$

$$\Lambda_{s_3}(t) = \log(1 + t) \tag{3}$$

$$\Lambda_{s_4}(t) = K\left(\frac{1}{1 + be^{-ct}} - \frac{1}{1 + b}\right) \tag{4}$$

これら真の形状関数のパラメータ値は本論の表 5.2.1, 表 5.2.2 の中に記載している．

増分が従う真の分布を IG 劣化モデルの場合は，$Y(t) - Y(s) \sim IG(0.1\Delta\Lambda_s(s,t), (\Delta\Lambda_s(s,t))^2)$ とし，Gamma 劣化モデルの場合は $Y(t) - Y(s) \sim Gamma(\Delta\Lambda_s(s,t), 1)$ としてシミュレーションデータを発生させる．$\Lambda_s(t)$ には，上で定義した $\Lambda_{s_1}(t), \ldots, \Lambda_{s_4}(t)$ のいずれかが用いられる．

これらの条件の下で求めた結果の一部が表 7 である．結果が多いため抄録では参考として IG 劣化モデルにおける $\Lambda_{s_2}(t)$ の場合の結果のみを示す．その他の結果は本論を参照されたい．

結果の要約としては，$\Lambda_{s_1}(t)$ の時は既存の形状関数 $\Lambda(t) = t^\gamma$ が最もよくなっていたが，それ以外の

表 7: IG 劣化モデルのシミュレーションにおける各形状関数の $t=11,12$ の MSE の平均

$n=25$, $\Lambda_{s_2}(t)=\exp(0.01t^2)-1$		
形状関数	MSE($t=11$)	MSE($t=12$)
$\hat{\Lambda}^1(t)$	2.80×10^{-3}	1.49×10^{-2}
$\hat{\Lambda}^2(t)$	4.64×10^{4}	2.06×10^{5}
$\hat{\Lambda}^3(t)$	5.02×10^{5}	3.06×10^{6}
$\hat{\Lambda}^G(t)$	$\mathbf{7.39\times10^{-4}}$	5.68×10^{-3}
$\hat{\Lambda}^P(t)$	9.18×10^{-4}	8.42×10^{-3}
$\hat{\Lambda}^S(t)$	7.57×10^{-4}	$\mathbf{5.45\times10^{-3}}$

$\Lambda_{s_2}(t),\Lambda_{s_3}(t),\Lambda_{s_4}(t)$ では，推定した形状関数を使用した方が結果は良くなった．

5 結論と今後の課題

本研究では，一つ目の提案として IG 分布および GIG 分布に従う確率変数をべき乗変換して得られる一般化分布である PIG 分布，PGIG 分布の 2 つの分布に基づく劣化モデルについて提案した．提案モデルと既存のモデルを 4 つの実データによって比較を行い，PIG, PGIG 劣化モデルは良い当てはまりを示した．また，提案モデルの推定精度について検証し，特に PGIG 劣化モデルはパラメータが多く推定が不安定になりがちなので，サンプル数を多く必要なことに留意すべきである．

二つ目の提案として形状関数を経験的に推定する方法について提案した．推定手法にはガウス過程回帰，多項式回帰，3 次平滑化スプラインを採用した．第 4 章では，実データを使用し IG 劣化モデル，Gamma 劣化モデルそれぞれにおいて既存の形状関数と 3 つの手法で推定した形状関数の適合度の比較を行い，第 5 章ではシミュレーションデータを用いて予測精度を測った．推定手法の中では，第 4 章では特に 3 次平滑化スプラインがよい結果を示したものの，第 4, 5 章ともにどの形状関数推定手法においても過去の形状関数と同等もしくは同等以上の適合度と汎化性能となり，従来のような形状関数の選択の議論をせずとも高い性能を出せることを示せた．

本研究では 4 つの実際の劣化データを使用したが，どれも古いデータセットもしくはサンプル数の少ないデータセットであったため新しいデータセットにも当てはまるか検証が必要である．

PGIG 分布に関しては [5] で簡単に言及されているのみで深くは研究されていないため，PGIG 分布の統計的性質について研究する余地があるだろう．また，PIG, PGIG 劣化モデルは高い適合度を示したものの汎化性能の評価は本研究では行っておらず，実学上有効であるかは示せていないので，これらの提案モデルの汎化性能を評価する必要性がある．

劣化モデルにおける形状関数の推定に関しては，Wiener 劣化モデルでの検証も必要である．また，ガウス過程回帰の平均関数に 3 次平滑化スプラインを用いて推定することで，より性能の高いを上げることができると考えられる．

参考文献

[1] Doksum, K. A. and Hóyland, A. (1992). ”Models for variable stress accelerated life testing experiments based on Wiener process and the inverse Gaussian distribution”. *Technometrics*, Vol.34, pp.74-82

[2] Fushihara, T., and Nagatsuka, H. (2022). ”New Stochastic Degradation Models Based on the Family of Powered Inverse Gaussian Distributions”. *Total Quality Science*, (to appear).

[3] Iwase, K., and Hirano, K. (1990), “Power inverse Gaussian distribution and its applications ”, *Applied Statistics*, Vol.19, pp.163-176

[4] Bagdonavičius, V. and Nikulin, M.S. (2000), “Estimation in Degradation Models with Explanatory Variables ”, *Lifetime Data Analysis*, Vol.7, pp.85-103

[5] Masuda, H. (2002), “Analysis of GIG distribution and GH distribution”, *Statistical Mathematics*, Vol.50, pp.165-199

[6] Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998),“Statistical Methods for Reliability Data ”, *John Wiley & Sons, New York*

[7] Peng, C. Y. (2015),“Inverse Gaussian Processes with Random Effects and Explanatory Variables for Degradation Data ”, *Technometrics*, Vol.57, pp.100-111

[8] Rodríguez‐Picón, L. A., and Rodríguez‐Picón, A. P., et al (2017),“Degradation modeling based on gamma process models with random effects”, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Vol.47, pp.1796-1810

[9] Tamaru, L. and Nagatsuka, H. (2019),“On a Stochastic Degradation Model based on the Generalized Inverse Gaussian distribution ”, *Asian Journal of Management Science and Applications*, Vol.4, pp.49-58

[10] Wu, S. J. and Shao, J. (1999). Reliability analysis using the least squares method in nonlinear mixed-effect degradation models. *Statistica Sinica*, Vol.9, pp.855-877.

[11] Wu, W. F. and Ni, C. C. (2003),“A Study of Stochastic Fatigue Crack Growth Modeling Through Experimental Data ”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.18, pp.107-118