

論文の内容と論文審査の結果の要旨

杉山佑樹氏の学位請求論文

On volume functions of special flow polytopes associated to the root system of type A and On equivariant index of a generalized Bott manifold

では、二つのテーマが扱われている。それらは内容的には独立であるが、問題意識は共通であり、いずれもリー群の作用をもつ多様体の同変指数に関連する。具体的には、第 I 部は組み合わせ的側面からのアプローチ、第 II 部は幾何学的側面からのアプローチになっている。これらの内容は、杉山氏がこれまで行ってきた研究の集大成と呼ぶにふさわしいものである。以下、本論文の内容を背景とともに解説し、適宜評価を加える。

まず第 I 部（第 1 章～第 3 章）では、水の流れをモデルにして定義される **flow polytope** とよばれる高次元の凸多面体について格子点の個数や体積を調べる、という比較的古典的な問題が扱われている。より正確には、A 型のルート系に重みを与えてベクトル分割関数やベクトル体積関数を考えることになる。

第 2 章で詳しく述べられているように、**Baldoni-Vergne** らの先行研究によって、上記の関数を反復留数を用いて表示する公式が知られている。しかしながら、階数が一般の場合にこれらを明示的な形で記述することは難しいとされてきた。一方で、変数が **nice chamber** とよばれる領域に属す場合が基本的かつ重要であるということも認識されていた。本論文ではこの場合の **flow polytope** を **special flow polytope** と呼び、その体積関数の性質を深く考察している。

第 I 部の主結果は第 3 章で与えられている。それは、

- **special flow polytope** の体積関数がある偏微分方程式系によって特徴づけ (Theorem 3.0.1 および Theorem 3.0.4)、
- A 型ルート系の階数に関する漸化式を与える (Theorem 3.0.6)

というものである。このような結果はこれまではないタイプのものであり、その視点の独自性が高く評価される。また、体積関数を具体的に求めるアルゴリズムとしても優れており、今後の応用が期待される。

なお、主結果の証明には数学的帰納法などの緻密な議論が必要であり、杉山氏の力量が大いに発揮されている。

続く第 II 部（第 4 章～第 6 章）では、一般 **Bott** 多様体の同変指数に関する理論が構築されている。

複素多様体上のいくつかの複素直線束の直和を射影化すると新たな複素多様体を得られるが、一点から始めてこの操作を繰り返して得られる多様体を一般 **Bott** 多様体という。

一般 Bott 多様体は、定義により射影空間束の塔の構造をもち、かつトーリック多様体の構造ももつという点で、非常に興味深いクラスを成しており、多方面から活発な研究がなされている。

最も基本的なのは射影直線束の塔の場合であり、この場合は Bott 多様体とよばれる。Bott 多様体については、Schubert 多様体や Bott-Samelson 多様体との関連から、以前より多くの研究がなされている。特に、1997年に Grossberg-Karshon は、Bott 多様体（とその上の複素直線束の対）に対して twisted cube（ねじれ立方体）という図形を導入し、Bott 多様体の同変指数と twisted cube 内の格子点が密接に関連することを示した。またその結果を用いて、いわゆる Demazure 加群に対する Demazure 指標公式を証明することができる。

さて、Grossberg-Karshon の結果を一般 Bott 多様体の場合に一般化することは、慎重な議論が必要とされており、長らく未解決のままであった。本論文で杉山氏は見事にそれを成し遂げている。すなわち、

- 第5章で、独自のアイデアに基づき generalized twisted cube（一般ねじれ立方体）という概念を導入し（定義 5.3.1）、
- 第6章第1節で、同変指数の重複度が $-1, 0, 1$ のいずれかであることを証明し (Theorem 6.1.1)、
- 第6章第2節で、同変指数に対する Demazure 型の指標公式を証明している (Theorem 6.2.2)。

このような杉山氏の精密な議論は高く評価される。さらに第6章（したがって本論文）の最後の部分 (Remark 6.2.7) では、Atiyah-Bott-Lefschetz の固定点定理を用いて得られる、Hattori-Masuda による同変指数の別の表示との比較も論じられており、本論文の内容が今後より深い発展につながることも期待される。

一方、一般 Bott 多様体がどのような文脈で現れるのかは実はあまりわかっていない。唯一、ある種のウェイト多様体（トーラス作用に関する旗多様体のシンプレクティック商として得られる多様体）に一般 Bott 多様体の構造が入るのではないかという (Guillemin-Lerman-Sternberg の結果等に基づく) 観察がある程度である。なお、このウェイト多様体には、第I部で論じられた special flow polytope が付随する。このことは、第I部と第II部の内容を統合する知見が将来得られることを示唆するものである。同時に、本論文第II部の結果と表現論等の関連についても、解明されるべき今後の課題として残されている。

以上のように、本論文には杉山佑樹氏のこれまでの研究が見事に結実しており、学術的に高度で意義のある結果が導かれている。またそれらを基礎として、今後更に研究が発展することも十分に期待される。したがって本論文は、博士（理学）の学位を授与するに十分なものであると判断する。