

## 波多野修也氏の学位論文 Extension of Olsen's inequality to Morrey-Lorentz spaces についての審査結果の要旨

本論文の主題は Lorentz Morrey 空間という Ragusa 氏によって 2012 年に提唱された関数空間における分数べき積分作用素の有界性の証明である。この論文では, averaging という技術とアトム分解を巧みに使い, ヘルダーの不等式を超越した分数べき積分作用素の有界性を示しており, 本論文の分野である調和解析の先駆的な技術の使用例といえる。論文は以下の 5 章からなる。1. 主要結果の記述, 2. 補助的な関数空間や作用素の不等式の確認, 3. Lorentz Morrey 空間の基礎的な性質および結果の重要性を与える尺度についての説明, 4. Lorentz Morrey 空間のアトム分解, 5. タイトルにある Olsen の不等式の証明で論文は構成されている。論文はカントールダストと関係しているフラクタルなどを使い, Morrey ノルムの違いなどを論じており, ほかの論文には見られない例を多く含んでいる論文である。Ragusa の原典も含め, 多くの論文では例を構成することが少ないためにこの論文の提供する具体例は重要である。論文では, ヘルダーの不等式と分数べき積分作用素の有界性を組み合わせるだけでは得られない結果をいかにして得るかという課題に挑戦しており, 実際に満足な結果が得られた。論文は包括的かつ自己完結的に書かれており, 明晰なものである。また, 波多野氏はこの学位論文を作成するにあたり, 3 編の共著と単著を参考に行っている。これら 3 編以外に, 人工知能の研究分野とも関連している 7 編の論文を書き, 国内外の多くの研究集会でこれらの 10 編の論文の内容を発表しており, 研究者としての実績は十二分である。また, 日本学術振興会の特別研究員に採択されている実績 (2021 年 4 月から 2023 年 3 月) もある。この論文の発表および審査は 2021 年 12 月 23 日に行われ, 質疑応答の結果, 波多野氏の十全な理解が確認できたため, 学位を授与するに十分であると判断した。

波多野修也氏の学位論文 Extension of Olsen's inequality to Morrey-Lorentz spaces の内容についての要旨

Olsen の不等式は P. Olsen により 1995 年に Communications in Partial Differential Equations より発表された不等式で、シュレーディンガー作用素の性質を議論するために考案された不等式である。この不等式は澤野、菅野、田中により、2011 年に精製され、不等式の成立限界も示された。さらに、2014 年には、飯田、澤野、田中により証明法が見直された。当該論文ではこの 2014 年の論文を Morrey-Lorentz 空間に拡張した。

Morrey-Lorentz 空間は 2012 年に A. Ragusa 氏により提案された、Morrey 空間と Lorentz 空間を統合する枠組みで、先行研究は少ない。しかしながら、これらの Morrey 空間と Lorentz 空間は作用素の解析において重要な空間であり、解析が急がれるものの一つである。波多野氏は分数べき積分作用素の性質を調べたが、Morrey 空間と Lorentz 空間はこの作用素の性質を調べる適切な空間であるために、Morrey-Lorentz 空間を解析することで、分数べき積分作用素の理解が深まったといえる。

以上のことを踏まえて、当該論文の内容について説明したい。当該論文ではまず関数空間の歴史を振り返りながら、Morrey-Lorentz 空間の定義を与えている。次に、Morrey 空間と Lorentz 空間などに関連する不等式を復習した。これらの基礎知識をもとに、Morrey-Lorentz 空間の性質を詳論した。その中で特に有用と思われるのは関数空間の多様性についての考察で、これはコントロールダストを用いた巧妙なものである。この関数空間には 3 つのパラメータが備わっているが、波多野氏の例がそれらの役割を解明した。また、近年の関数空間の解析の技術として重要なものとして分割理論が挙げられる。関数の分割理論とは関数を簡単な基本単位の線形和として表すことにより、作用素の有界性や関数空間同士の埋め込みの性質を議論する理論である。この理論を構成するにあたり、波多野氏は副産物としてハーディー・モレー空間の元の正則性について目覚ましい結果を得ることに成功した。以上のことから、波多野氏の Morrey-Lorentz 空間における分割理論は有意義で、現代の解析における貢献が大きいといえる。上述した Morrey-Lorentz 空間における分割理論を用いて、波多野氏はさらに averaging という技法をも織り交ぜながら、Olsen の不等式を Morrey-Lorentz 空間へと拡張している。論文は基本的に自己完結しており、明晰に書かれたものである。