BRASCAMP-LIEB 不等式と凸幾何学への応用

中村 昌平

大阪大学大学院理学研究科

Abstract

この講義録では，[2] のレクチャーノートに基づき，Brascamp-Lieb inequality が convex geometry の文脈でどのように応用されるか，特に凸集合の volume ratio estimate と逆向きの等周不等式への応用を紹介する．また，主題である Brascamp-Lieb inequality および，その reverse version の証明も与える．ここで用いる証明手法は F.Barthe による mass-transportation による手法を用いた証明である．

前書き

この講義録は中央大学で２０２１年に実施した集中講義の講義録である．積分に関係する不等式は基本的なものであり，多くの解析学の授業で扱う基本的なものである。その中の多くの不等式は定数が最良であり、改良の余地がないものが多い。さらには等号成立条件も詳細に調べられており，その等号成立条件が幅広い範囲で応用されていることは周知の事実である。しかしながら，背景となる測度空間が特殊な場合は不等式に現れる定数が改良されることは比較的よく知られており，１９７２年のヤングの不等式の定数などは非常に有名な定数である。これらがフーリエ変換と関連していることも興味深い。近年になって，偏微分方程式に現れる半群との関連が取りざたされて，幾何学，微分方程式など測度論以外の分野との関連が注目されるようになった。特に熱方程式を扱い，熱方程式からどのようにして不等式を導き出すのかに着眼していただきたい。本書では，基本となる不等式の背景にはどのようなものがあるかを考え，さらにそれが幾何学などの基本的な問題につながっているかを解説する。特に，面積が一定の図形の周の長さが最短になるような図形がどうして円周になるのかといった問題やその関連しているなどが，本書で書かれている不等式からどのように導かれるのかを見ていただけると幸いである。

2022年11月12日

澤野嘉宏

Contents

1　記号

この講義録で用いる記号のリストを与える．

- $\mathbb{S}^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^n : |\omega| = 1\}$ を単位球面とする．
- （ラドン変換）$(\omega, t) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ に対し，

$$\pi(\omega, t) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \omega = t\}$$

によって $n-1$ 次元平面が定まる．この対応で $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ と $n-1$ 次元平面全体の集合 $\mathcal{M}_{n-1,n}$ が一対一対応する．これを踏まえ，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ に対し，そのラドン変換を

$$\mathcal{R}f(\pi) = \mathcal{R}f(\omega, t) := \int_\pi f := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(x \cdot \omega - t)\, dx, \quad \pi \in \mathcal{M}_{n-1,n}$$

で定める．

- （Minkowski addition）$\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B := \{\lambda_1 x + \lambda_2 y \in \mathbb{R}^n : x \in A, y \in B\}.$$

- $1 \le p \le \infty$ に対し，

$$\mathbb{B}^n_p := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^p_{\ell^p} := \sum_{i=1}^n |x_i|^p \le 1\}.$$

特に $\mathbb{B}^n_2$ は通常の単位球で，$\mathbb{B}^n_\infty$ は単位立方体である．

- (測度) 通常の n 次元ルベーグ測度による体積を $|\star|_{\mathbb{R}^n}$ で表す．特に文脈から次元が明らかな場合は $|\star|$ と略記する．
- (Surface measure) 有界集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し，その表面積を

$$\mathrm{sur}\,(K) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|K + \varepsilon \mathbb{B}^n_2|_{\mathbb{R}^n} - |K|_{\mathbb{R}^n}}{\varepsilon}$$

で定める．この定義のもとで，

$$\mathrm{sur}\,(\mathbb{B}^n_2) = n|\mathbb{B}^n_2|_{\mathbb{R}^n} \tag{1.1}$$

の関係があることに注意する．

- Section 3では，convex bodies $K, \tilde{K}$ に対し，$\exists T$: affine map s.t. $\tilde{K} = T(K), |K| = |\tilde{K}|$ が成立するとき，K と $\tilde{K}$ を同一視する．この同一視の下での，surface measure を便宜的に

$$\mathrm{sur}_*(K) := \inf\{\mathrm{suf}\,(T(K)) : T : \text{affine transform s.t.}\ |T(K)| = |K|\} \tag{1.2}$$

で定める．

- $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ が ellipsoid であるとは,

$$\exists T : \text{affine map s.t.}\ \mathcal{E} = T(\mathbb{B}_2^n)$$

つまり，Euclidian ball の affine image として表される図形とする．

- $\mathcal{E}(K)$ が convex body K の maximal ellipsoid であるとは,

$$\mathcal{E}(K) \subset K, \quad |\mathcal{E}(K)|_{\mathbb{R}^n} = \max\{|\mathcal{E}|_{\mathbb{R}^n} : \mathcal{E}\text{: ellipsoid } \subset K\}$$

が成立することを言う．

- $K \subset \mathbb{R}^n$: convex body に対し，∂K で K の境界を表す．また，この maximal ellipsoid を用いて K の *volume ratio* を

$$\mathrm{vr}(K) := \frac{|K|_{\mathbb{R}^n}}{|\mathcal{E}(K)|_{\mathbb{R}^n}}$$

で定める．

- $u, v \in \mathbb{R}^n$ に対して，線形写像を

$$|u\rangle\langle v| : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto (v \cdot x)u$$

で定める．また，$|u\rangle$ と $\langle v|$ もそれぞれ線形写像

$$|u\rangle : \mathbb{R} \ni t \mapsto tu \in \mathbb{R}^n, \quad \langle v| : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto v \cdot x \in \mathbb{R}$$

として理解する．このとき，$L = \langle v|$ と明示的に書けば，その双対が

$$L^* = |v\rangle$$

になっていることが確認できる．

- 実 $n \times n$-行列 M に対し，quadratic form $Q = Q_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は

$$Q(x) := \langle x, M(x) \rangle$$

で定まるものとする．逆に quadratic form Q が先に与えられた場合，対応する行列を M_Q で表す.

- quadratic form Q に対しても，det を定めておく:

$$\det(Q) := \det(M_Q).$$

- 実 $n \times n$-行列 M が positive-definite であるとは,

$$Q_M(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

が成立することを言う．なおこれは，M のすべての固有値 > 0 と同値. したがって特に，$\det(M) > 0$.

- quadratic form $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，その dual quadratic form を

$$Q^*(x) := \sup_{y \in B_Q} |\langle x, y \rangle|^2, \quad B_Q := \{y \in \mathbb{R}^n : Q(y) \leq 1\}, \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定める．のちに見るように，例えば M_Q が symmetric positive-definite であれば，$y \in B_Q$ で sup を達成するものがあり，実際に $Q^*(x)$ は quadratic form であることがわかる.

典型的には，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ として $(M_Q)_{ij} = \lambda_i \delta_{i,j}$: 対角行列にとれば，$B_Q$ はそれぞれの軸の長さが λ_i で決まる楕円.

- (Gaussian input)

$$\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^n) := \{A : n \times n\text{−matrix s.t. symmetric and positive definite}\}$$

とおき，$A \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$g_A(x) := e^{-\langle x, A(x) \rangle}.$$

なお，このとき,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_A(x)\, dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}}. \tag{1.3}$$

また，$\mathbf{A} = (A_j)_{j=1}^m \in \prod_{j=1}^m \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})$ に対して,

$$\mathbf{g_A} = (g_{A_1}, \ldots, g_{A_m})$$

と書くこともある.

- (写像の微分) $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を各成分に持つ写像 $F : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \to (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in \mathbb{R}^k$ に対し，その微分 $dF : \mathbb{R}^n \to n \times k-$matrices は

$$dF(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \cdots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_k(x) & \partial_2 f_k(x) & \cdots & \partial_n f_k(x) \end{pmatrix}, \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で与えられる．

- (gradient と Hessian) $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し $\nabla\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と $\nabla^2\phi : \mathbb{R}^n \to n \times n-$symmetric matrices は

$$\nabla\phi(x) := (\partial_1\phi(x), \ldots, \partial_n\phi(x)), \quad \nabla^2\phi(x) = (\nabla^2\phi(x))_{ij} = (\partial_i\partial_j\phi(x))_{ij}.$$

なお，以下に注意：

$$d(\nabla\phi)(x) = \nabla^2\phi(x).$$

2 Brunn-Minkowski，Prékopa-Leindler，及び isoperimetric inequality

このセクションの目標は以下の一連の不等式の関係性を見ることである．

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prekopa-Leindler\,inequality} \Rightarrow \mathrm{Brunn-Minkowski\,inequality} \\ \Rightarrow &\mathrm{Brunn's\,theorem\,about\,convex\,body}, \quad \mathrm{Isoperimetric\,inequality}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

以下ではモチベーションから辿っていくべく，右から左の順で紹介する．

2.1 Brunn's theorem と Brunn-Minkowski inequality

問題意識を考えるためまずは，$n = 2$ 次元で次の例を考える．

Example 2.1. まずは，最も基本的な幾何的対象である閉円板 $K = \mathbb{B}_2^2$ から考察を始める．

- $\mathbb{B}_2^2$ を縦にスライスして，そのスライス面の長さを考える：

$$v(r) := \mathrm{length\,of}\,\mathbb{B}_2^2 \cap \{(r, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}.$$

- この場合は図を描けば明らかに，

$$v(r) = \begin{cases}(1-r^2)^{\frac{1}{2}} & (r \in [-1,1]), \\ 0 & (r \notin [-1,1]).\end{cases}$$

- この $v(r)$ は概形を書けばわかるように，$[-1,1]$ 上で concave つまり，

$$v((1-\alpha)r_1 + \alpha r_2) \geq (1-\alpha)v(r_1) + \alpha v(r_2) \tag{2.2}$$

  が各 $\alpha \in [0,1]$ と $r_1, r_2 \in \mathrm{supp}(v)$ に対して成り立つ．

さて，このノートの基本理念は，"球に対して成立する凸幾何的な性質は，一般の凸体に対しても成立するであろう"というものである[1]．この理念に基づ

[1]なお，このノートの後半では，関数不等式を考えていくことになるが，そこではこの基本理念は"ガウシアンに対して成立する関数不等式は，一般の正値可積分関数に対しても成立するであろう"というものになる．

くと，次の問いが自然に生じてくる：一般の convex body K に対しても，スライス面の長さ $v(r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を以下の要領で定める．すなわち，

$$v(r) := \text{length of } K \cap \{(r, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}.$$

このとき，$v(r)$ はその support 上で，concave か？この問題に対する解答は YES となる：

Theorem 2.2. *$K \subset \mathbb{R}^2$, closed convex に対し，関数 $v(r)$ はその support の上で concave.*

これは直感的に明らかかもしれないが，一応証明を与える．

Proof. 仮に関数 v が concave でなかったとして，つまり $\exists \alpha^* \in (0,1), \exists r_1^*, r_2^* \in \mathrm{supp}(v)$ s.t.

$$v((1-\alpha^*)r_1^* + \alpha^* r_2^*) < (1-\alpha^*)v(r_1^*) + \alpha v(r_2^*) \tag{2.3}$$

が成立したとして矛盾を導く．

まず，$K \cap \{(r_1^*, y) : y \in \mathbb{R}\}$ は y 軸に並行な線分なので

$$K \cap \{(r_1^*, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{(r_1^*, y) : y \in [y_1^d, y_1^u]\}$$

と書ける．同様に

$$K \cap \{(r_2^*, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{(r_2^*, y) : y \in [y_2^d, y_2^u]\}$$

と書ける．そこで

$$y_{\alpha^*}^u := (1-\alpha^*)y_1^u + \alpha^* y_2^u, \quad y_{\alpha^*}^d := (1-\alpha^*)y_1^d + \alpha^* y_2^d$$

と定め，また $r_{\alpha^*} := (1-\alpha^*)r_1^* + \alpha^* r_2^*$ とおき，2 点

$$P_{\alpha^*}^u := (r_{\alpha^*}, y_{\alpha^*}^u), \quad P_{\alpha^*}^d := (r_{\alpha^*}, y_{\alpha^*}^d)$$

を取る．すると，この 2 点が K の convexity に矛盾する．というのも，これらの記号の下で，v の定義より

$$v(r_1^*) = y_1^u - y_1^d, \quad v(r_2^*) = y_2^u - y_2^d$$

なので仮定 (2.3) から

$$\begin{aligned} v(r_{\alpha^*}) &= v((1-\alpha^*)r_1^* + \alpha^* r_2^*) \\ &< \big(1-\alpha^*\big)(y_1^u - u_1^d) + \alpha^*(y_2^u - y_2^d) \\ &= \big((1-\alpha^*)y_1^u + \alpha^* y_2^u\big) - \big((1-\alpha^*)y_1^d + \alpha^* y_2^d\big) = y_{\alpha^*}^u - y_{\alpha^*}^d. \end{aligned}$$

他方で，K の convexity より, $P_{\alpha^*}^u, P_{\alpha^*}^d \in K$，したがって線分 $\ell(P_{\alpha^*}^u, P_{\alpha^*}^d) \subset K$ となり特に $\ell(P_{\alpha^*}^u, P_{\alpha^*}^d)$ は y 軸に並行な線分であることを踏まえると

$$\text{length of } \ell(P_{\alpha^*}^u, P_{\alpha^*}^d) \leq v(r_{\alpha^*}).$$

ところで，明らかに

$$\text{length of } \ell(P_{\alpha^*}^u, P_{\alpha^*}^d) = y_{\alpha^*}^u - y_{\alpha^*}^d$$

なので，これは矛盾である． □

Brunn はこの性質が高次元でも成立するかどうかに興味があった．つまり，$K \subset \mathbb{R}^n$ に対して，関数 v を K の $n-1$ 次元スライスにより定めその concavity を調べたいというわけである．ここで，問題を正確に述べるのに，ラドン変換を使うと幾分すっきりするように思えるので，まず Example 2.2 を次のように言い換える．すなわち，$K \subset \mathbb{R}^2$, convex に対し，

$$v(r) := \mathcal{R}[1_K](e_1, r), \quad r \in \mathbb{R}$$

と定めたとき，$v(r)$ は concave．なお，本稿ではこのラドン変換に慣れている必要はなく，素朴に $n-1$ 次元平面でのスライスを考えていると思えば十分である．

問題

$K \subset \mathbb{R}^n$, convex に対し，

$$v(r) := \mathcal{R}[1_K](e_1, r), \quad r \in \mathbb{R}$$

と定めたとき，$v(r)$ は concave か？

解答

実はこの問題への解答はネガティブになる．すなわち，$n \geq 3$ なら関数 v が concave にならない convex set $K \subset \mathbb{R}^n$ が存在する．

Example 2.3. $n \geq 3$ として，

$$K = \text{cone} := \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n : x_1 \in [0,1], |x'| \leq |x_1|\}$$

とすると，

$$v(r) = \mathcal{R}[1_K](e_1, r) = c_n r^{n-1}.$$

特に v は concave でない．

ところが，これで話が終わるわけではない．例えば，Example 2.3 の例では $r \mapsto v(r)^{1/(n-1)}$ が concave になっていることがわかる．このオブザベーションに基づいて Brunn が見出した性質が次のものである．

Theorem 2.4. $n \geq 2$ とし $K \subset \mathbb{R}^n$ を任意の *convex set* とする．このとき

$$r \mapsto v(r)^{\frac{1}{n-1}} := \mathcal{R}[1_K](e_1, r)^{\frac{1}{n-1}}$$

は *concave*[2]．

Brunn は “elegant symmetrisation method” を用いて Theorem 2.4 を証明しているが，以下では代わりに Minkowski による問題の再定式化による証明を与える．

Theorem 2.5 (Brunn-Minkowski inequality)**.** $n \geq 1$ とし $A, B \subset \mathbb{R}^n$*: non-empty, compact set* としたとき，

$$|(1-\lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda |B|^{\frac{1}{n}}, \quad \forall \lambda \in [0,1] \tag{2.4}$$

が成立．

初めに注意として，この一般的な形の Brunn-Minkowski inequality の完全な証明は Liusternik (1935) により与えられたことを述べておく．また，A, B が任意の長方形の時は，(2.4) は相加相乗平均不等式を使い，比較的簡単に証明できるので，ぜひ一度やってみるとよい．　さて，証明を与える前に，Brunn-Minkowski inequality が導く結果を見ておこう．

[2]素朴な問いとして，K が単に convex というだけではなく，より強い意味で convex だったとする．例えば，∂K の曲率が各点で 1 以上だったとする．このとき，$v(r)$ の concavity も何らかの意味で改良されるだろうか？

2.1.1 Brunn-Minkowski inequality $\Rightarrow$ Brunn's theorm

ここでは，Brunn-Minkowski inequality (2.4) を仮定して，Theorem 2.4 を示す．ゴールは $v^{1/(n-1)}$ の concavity，つまり任意の convex set $K \subset \mathbb{R}^n$ と $r_1 < r_2$, $\lambda \in (0,1)$ を取り，$r_\lambda := (1-\lambda)r_1 + \lambda r_2$ としたとき，

$$\mathcal{R}[1_K](e_1, r_\lambda)^{\frac{1}{n-1}} \geq (1-\lambda)\mathcal{R}[1_K](e_1, r_1)^{\frac{1}{n-1}} + \lambda \mathcal{R}[1_K](e_1, r_2)^{\frac{1}{n-1}} \tag{2.5}$$

を示すことになる．ここで

$$A_1 := K \cap \pi(e_1, r_1), \quad A_2 := K \cap \pi(e_1, r_2), \quad A_\lambda := K \cap \pi(e_1, r_\lambda)$$

と置けば，

$$\mathcal{R}[1_K](e_1, r_i) = |A_i|_{\mathbb{R}^{n-1}}, \quad i = 1, 2, \lambda$$

となる．すると目標の (2.5) は

$$|A_\lambda|_{\mathbb{R}^{n-1}}^{\frac{1}{n-1}} \geq (1-\lambda)|A_1|_{\mathbb{R}^{n-1}}^{\frac{1}{n-1}} + \lambda |A_2|_{\mathbb{R}^{n-1}}^{\frac{1}{n-1}} \tag{2.6}$$

と同値になるが，右辺については (2.4) を使えそうな気がする．実際に使ってみると，

$$(1-\lambda)|A_1|_{\mathbb{R}^{n-1}}^{\frac{1}{n-1}} + \lambda |A_2|_{\mathbb{R}^{n-1}}^{\frac{1}{n-1}} \leq |(1-\lambda)A_1 + \lambda A_2|_{\mathbb{R}^{n-1}}^{\frac{1}{n-1}}. \tag{2.7}$$

すると，2 つの集合 $(1-\lambda)A_1 + \lambda A_2$ と A_λ の間の関係が重要になるが，ここで K の convexity を使うとよい．まず，

$$(1-\lambda)\pi(e_1, r_1) + \lambda \pi(e_1, r_2) = \pi(e_1, r_\lambda)$$

なので

$$A_\lambda = K \cap \big((1-\lambda)\pi(e_1, r_1) + \lambda \pi(e_1, r_2)\big).$$

他方定義より

$$\begin{aligned}(1-\lambda)A_1 + \lambda A_2 &= (1-\lambda)K \cap \pi(e_1, r_1) + \lambda K \cap \pi(e_1, r_2) \\ &\subset (1-\lambda)\pi(e_1, r_1) + \lambda \pi(e_1, r_2)\end{aligned}$$

であるが，同時に $A_1, A_2 \subset K$ で K: convex より

$$(1-\lambda)A_1 + \lambda A_2 \subset K.$$

よって，これらから

$$(1-\lambda)A_1 + \lambda A_2 \subset K \cap \big((1-\lambda)\pi(e_1, r_1) + \lambda \pi(e_1, r_2)\big) = A_\lambda$$

となり，特に

$$|(1-\lambda)A_1 + \lambda A_2|_{\mathbb{R}^{n-1}} \leq |A_\lambda|_{\mathbb{R}^{n-1}}$$

がわかる．これと (2.7) を合わせて (2.6) が結論される．

2.1.2 Brunn-Minkowski inequality $\Rightarrow$ Isoperimetric inequality

次はBrunn-Minkowski inequalityからIsoperimetric inequalityが導かれることを見る．まずは，Isoperimetric inequalityの主張を述べておく．

Theorem 2.6. 体積一定の下で，表面積を最小にする図形（の例）は，ユークリッド球$\mathbb{B}_2^n$．すなわち，

$$\min\left\{\mathrm{sur}\,(K) : K \subset \mathbb{R}^n \,\mathrm{s.t.}\, |K| = |\mathbb{B}_2^n|\right\} = \mathrm{sur}\,(\mathbb{B}_2^n). \tag{2.8}$$

より一般的な形として，任意の$K \subset \mathbb{R}^n$ *s.t.* $|K|_{\mathbb{R}^n} < \infty$に対し

$$\mathrm{sur}\,(K) \geq n|K|_{\mathbb{R}^n}^{1-\frac{1}{n}} |\mathbb{B}_2^n|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}} \tag{2.9}$$

が成立．

Proof of Brunn-Minkowski inequality $\Rightarrow$ Isoperimetric inequality. まず，一般形(2.9)が示せれば(2.8)が従うことを見ておこう．

$$\min\left\{\mathrm{sur}\,(K) : K \subset \mathbb{R}^n \,\mathrm{s.t.}\, |K| = |\mathbb{B}_2^n|\right\} \geq \mathrm{sur}\,(\mathbb{B}_2^n)$$

を示せばよい．そのため，$|K| = |\mathbb{B}_2^n|$となる集合Kを任意に取る．(2.9)とKの仮定より

$$\mathrm{sur}\,(K) \geq n|K|^{1-\frac{1}{n}} |\mathbb{B}_2^n|^{\frac{1}{n}} = n|\mathbb{B}_2^n|$$

であるが，$\mathbb{B}_2^n$の体積と表面積の関係(1.1)より，

$$\mathrm{sur}\,(K) \geq \mathrm{sur}\,(\mathbb{B}_2^n)$$

となるので，(2.8)が従う．

そこで，(2.9)を示そう．$\mathrm{sur}\,(K)$の定義を念頭に，後述するBrunn-Minkowski inequalityの同値なバージョン(2.16)を使うと，

$$\begin{aligned}
&|K + \varepsilon\mathbb{B}_2^n| \\
&\geq \left(|K|^{\frac{1}{n}} + |\varepsilon\mathbb{B}_2^n|^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \left(|K|^{\frac{1}{n}} + \varepsilon|\mathbb{B}_2^n|^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= |\mathbb{B}_2^n|\left((|K|/|\mathbb{B}_2^n|)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon\right)^n \\
&= |\mathbb{B}_2^n|\left(|K|/|\mathbb{B}_2^n| + n\varepsilon(|K|/|\mathbb{B}_2^n|)^{\frac{n-1}{n}} + O(\varepsilon^2)\right) \\
&= |K| + n\varepsilon|K|^{1-\frac{1}{n}}|\mathbb{B}_2^n|^{\frac{1}{n}} + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}\mathrm{sur}\,(K) &:= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}(|K+\varepsilon\mathbb{B}_2^n|-|K|)\\ &\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\big(|K|+n\varepsilon|K|^{1-\frac{1}{n}}|\mathbb{B}_2^n|^{\frac{1}{n}}+O(\varepsilon^2)-|K|\big)\\ &= n|K|^{1-\frac{1}{n}}|\mathbb{B}_2^n|^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

となり証明が完了する. □

2.2 Prékopa-Leindler inequality と Brunn-Minkowski inequality

ここでは, Brunn-Minkowski inequality の古典的な証明を与える. 具体的にはまず Prékopa-Leindler inequality を述べ, それが Brunn-Minkowski inequality (2.4) を導くことを見た後, Prékopa-Leindler inequality の証明を与える.

Theorem 2.7 (Prékopa-Leindler inequality)**.** $\lambda \in (0,1)$ をとる. このとき $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が *concavity condition*

$$h((1-\lambda)x+\lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda}g(y)^{\lambda}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{2.10}$$

を満たすと,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\Big)^{1-\lambda}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx\Big)^{\lambda} \tag{2.11}$$

が成立.

Prékopa-Leindler inequality が Brunn-Minkowski inequality の一般化であることはおいおい見ていくことにして, ここではまず以下の解釈を与えておく.

Reverse Hölder inequality としての Prékopa-Leindler inequality

Example 2.8. $\lambda \in (0,1)$ と $f,g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し，

$$h(z) := \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n : z=(1-\lambda)x+\lambda y} f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \tag{2.12}$$

と定める[a]と，条件 (2.10) が成立．したがって，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n : z=(1-\lambda)x+\lambda y} f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}\, dz \\ &\geq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx\Big)^{1-\lambda} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx\Big)^{\lambda}\end{aligned} \tag{2.13}$$

が任意の $\lambda \in (0,1)$ と $f,g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し成立．

これを，もう少し馴染みのある形に書き換える．つまり $p \in (1,\infty)$ をとって，$1-\lambda \mapsto 1/p, \lambda \mapsto 1/p'$ とし，さらに $f^{1-\lambda} \mapsto f, g^{\lambda} \mapsto g$ と置き直すことによって，(2.13) は

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n : z=x/p+y/p'} f(x)g(y)\, dz \\ &\geq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p'}\, dx\Big)^{\frac{1}{p'}}\end{aligned} \tag{2.14}$$

と読み替えられる．他方で通常の Hölder inequality の主張するところによれば，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n : z=x/p+y/p', x=y} f(x)g(y)\, dz \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p'}\, dx\Big)^{\frac{1}{p'}}$$

が成立するので (2.13), (2.14) は Hölder inequality の逆向きの不等式とみなせる．

[a] 正確なことを述べると，h は一般にボレル可測関数になるとは限らない．その問題を解消するべく，h 定義は esssup を用いなければならない．が，本稿ではその差は無視して話を進める．

2.2.1 Prékopa-Leindler inequality ⇒ Brunn-Minkowski inequality

Prékopa-Leindler inequality を仮定して Brunn-Minkowski inequality を導こう．そのために，Brunn-Minkowski inequality のいくつかの同値な形を与えておいた方が都合がよい．まずはシンプルなオブザベーションとして，Brunn-Minkowski inequality に算術幾何平均の不等式を適用すると，

$$\begin{aligned}|(1-\lambda)A+\lambda B|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}} &\geq (1-\lambda)|A|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}}+\lambda|B|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}} \\ &\geq \left(|A|_{\mathbb{R}^n}^{1-\lambda}|B|_{\mathbb{R}^n}^{\lambda}\right)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

すなわち，

$$|(1-\lambda)A+\lambda B|_{\mathbb{R}^n} \geq |A|_{\mathbb{R}^n}^{1-\lambda}|B|_{\mathbb{R}^n}^{\lambda} \tag{2.15}$$

が成立することがわかる．集合 A, B とパラメータ λ を固定すると，この (2.15) は (2.4) よりも弱い不等式であるが，すべての A, B と λ を考えることによって，ある意味で (2.15) は (2.4) と同値になる．これが次の lemma である．

Lemma 2.9. 以下の *3* つの主張は同値.

1. すべての $\emptyset \neq A, B \subset_{\mathrm{cpt}} \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,1)$ に対し，(2.4):

$$|(1-\lambda)A+\lambda B|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)|A|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}}+\lambda|B|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}}$$

   が成立.

2. すべての $\emptyset \neq A, B \subset_{\mathrm{cpt}} \mathbb{R}^n$ に対し，

$$|A+B|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}} \geq |A|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}}+|B|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}} \tag{2.16}$$

   が成立.

3. すべての $\emptyset \neq A, B \subset_{\mathrm{cpt}} \mathbb{R}^n$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，(2.15):

$$|(1-\lambda)A+\lambda B|_{\mathbb{R}^n} \geq |A|_{\mathbb{R}^n}^{1-\lambda}|B|_{\mathbb{R}^n}^{\lambda}$$

   が成立.

Proof. $(1-\lambda)A$ を A とみなしたり，$A=(1-\lambda)[(1-\lambda)^{-1}A]$ とみなしたりすることで，*(1)* と *(2)* の同値性は簡単に確認できる．また，*(1)* $\Rightarrow$ *(3)* は既に見た．そこで *(3)* $\Rightarrow$ *(2)* を以下で確認しよう．これは λ についての optimization から従う．具体的にはまず，*(3)* より

$$\begin{aligned}|A+B|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}} &= \left|(1-\lambda)[(1-\lambda)^{-1}A]+\lambda[\lambda^{-1}B]\right|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}} \\ &\geq |(1-\lambda)^{-1}A|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1-\lambda}{n}}|\lambda^{-1}B|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{\lambda}{n}} \\ &= (1-\lambda)^{-(1-\lambda)}\lambda^{-\lambda}|A|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1-\lambda}{n}}|B|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{\lambda}{n}}\end{aligned}$$

がすべての λ について成立する．そこで，

$$\phi^{\alpha,\beta}(\lambda) := (1-\lambda)^{-(1-\lambda)}\lambda^{-\lambda}\alpha^{1-\lambda}\beta^{\lambda}$$

と定めてその最大値を求めると，

$$\max_{\lambda\in[0,1]}\phi^{\alpha,\beta}(\lambda)=\alpha+\beta$$

になる．そこで $\alpha = |A|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}}$，$\beta = |B|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}}$ のときに，この最大値を達成する $\lambda=\lambda(A,B)$ を選ぶことによって (2.16) を得る． $\square$

この *(3)* の形に注目すれば，Prékopa-Leindler inequality との関連が明らかになる．

Observation

Lemma 2.9 の *(3)* は,

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_{(1-\lambda)A+\lambda B}(z)\,dz \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x)\,dx\Big)^{1-\lambda}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} 1_B(y)\,dy\Big)^{\lambda} \tag{2.17}$$

が成立することと同値であるが，このとき

$$1_{(1-\lambda)A+\lambda B}((1-\lambda)x+\lambda y) \geq 1_A(x)^{1-\lambda} 1_B(y)^{\lambda}$$

も明らかに成立している．つまり，

$$h = 1_{(1-\lambda)A+\lambda B}, \quad f = 1_A, \quad g = 1_B$$

と置くと条件 (2.10) は成立し，したがって Theorem 2.7 があれば，(2.11) すなわち今の場合 (2.17) が成立することがわかり，これは Lemma 2.9-*(3)* の成立を意味する．これより Prékopa-Leindler inequality ⇒ Brunn-Minkowski inequality がわかる．

2.2.2 Prékopa-Leindler inequality の証明

最後に Theorem 2.7 を示して，一連の不等式の証明を完成させよう．

証明の技術的な面で，Prékopa-Leindler inequality を考えることは次のメリットがある．すなわち，条件 (2.10) と不等式 (2.11) が次元 n に依らない形をしているので，次元に関する帰納法を適用できるという点である．

Proof of Theorem 2.7. 以下に証明のアウトラインを与える．

アウトライン

- (Step 1) $n=1$ の場合の Brunn-Minkowski inequality
- (Step 2) $n=1$ の場合の Prékopa-Leindler inequality
- (Step 3) $n \geq 2$ の場合の Prékopa-Leindler inequality

（Step 1）まず，$n=1$ の場合に Brunn-Minkowski inequality (2.4) を直接示す．Example 2.2 で見たように，最低次元では物事はシンプルである．まず，A の右端と B の左端は原点にあると仮定してよい．というのも，まず $A, B \subset \mathbb{R}$ はコンパクト，特に閉集合なので

$$\begin{aligned} r(A) &:= \mathrm{right-hand\,end\,of}\,A, \\ l(B) &:= \mathrm{left-hand\,end\,of}\,B \end{aligned}$$

がそれぞれ A, B の元として選べる．そこで，

$$A_s := A - r(A), \quad B_s := B + l(B)$$

ととれば，A_s, B_s はそれぞれの右端と左端が原点に位置している．さらにルベーグ測度の平行移動不変性より

$$|A+B| = |A_s + B_s|, \quad |A| = |A_s|, \quad |B| = |B_s|$$

があるので，A_s, B_s に対し不等式 (2.16) を示せば十分となり，前述の reduction が正当化される．するとこの reduction から特に

$$A + B \supset A, B$$

がわかる．加えて，A, B の仮定よりこれらは disjoint なので，

$$|A+B| \geq |A| + |B|$$

が得られるが，これはまさしく $n=1$ の場合の (2.16) である．

(Step 2) 次に (Step 1) を用いて，$n=1$ の場合の Prékopa-Leindler inequality を示そう．f, g, h を条件 (2.10) を満たすものとし，さらに有界かつノーマライゼーション $\sup_x f(x) = \sup_y g(y) = 1$ も仮定してよい．このとき，大事なことは各 $t \geq 0$ に対して，

$$\{z \in \mathbb{R} : h(z) \geq t\} \supset (1-\lambda)\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\} + \lambda\{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\} \quad (2.18)$$

が成立するということである．これは $z \in \mathbb{R}^n$ が $x \in \{f \geq t\}, y \in \{g \geq t\}$ により，$z = (1-\lambda)x + \lambda y$ とかけたときに，仮定 (2.10) から

$$h(z) = h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \geq t^{1-\lambda} t^{\lambda} = t$$

となることよりわかる．すると，これと (Step 1) で示した $n = 1$ に対する Brunn-Minkowski inequality より

$$\begin{aligned}|\{z \in \mathbb{R} : h(z) \geq t\}| &\geq |(1-\lambda)\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\} + \lambda\{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\}| \\ &\geq (1-\lambda)|\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}| + \lambda|\{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\}|\end{aligned}$$

がすべての $0 \leq t < 1$ に対し成立する．($\sup_x f(x) = \sup_y g(y) = 1$ を思い出せば，$0 \leq t < 1$ に対し，$\{f \geq t\}, \{g \geq t\} \neq \emptyset$ なので Brunn-Minkowski を使える．）したがって，これを $t \in \mathbb{R}$ で積分すると（$t \notin [0,1)$ ならば，

$$\{f \geq t\}, \{g \geq t\} = \emptyset$$

を踏まえて）

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(z)\,dz &= \int_{\mathbb{R}} |\{z \in \mathbb{R} : h(x) \geq t\}|\,dt \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} (1-\lambda)|\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}| + \lambda|\{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\}|\,dt \\ &= (1-\lambda)\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + \lambda\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy \\ &\geq \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\Big)^{1-\lambda}\Big(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy\Big)^{\lambda}\end{aligned}$$

となり，1 次元の場合の証明が完了する．ここで，最後のステップでは算術幾何平均不等式を用いた．

(Step 3) 最後に次元に関する帰納法で $n \geq 2$ の場合を示すべく，Theorem 2.7 の主張が $n-1$ 次元のときに正しいと仮定する．h, f, g を条件 (2.10) を満たすものとし以下，

$$\begin{aligned}h_{z_1}(z') &:= h(z_1, z'), \\ f_{x_1}(x') &:= f(x_1, x'), \\ g_{y_1}(y') &:= g(y_1, y')\end{aligned}$$

と書く．さらに

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(z')\,dz'dz_1 =: \int_{\mathbb{R}} H(z_1)\,dz_1$$

と書き直すと，

$$F(x_1) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(x')\,dx'$$

$$,\quad G(y_1) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(y')\,dy'$$

に対して，H, F, G が 1 次元の条件 (2.10) をみたすのではないかという気がしてくる．つまり，

$$H((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1) \geq F(x_1)^{1-\lambda} G(y_1)^{\lambda}, \quad \forall x_1, y_1 \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

が成立するのではないだろうか．以下これを確かめよう．定義は

$$H((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{(1-\lambda)x_1+\lambda y_1}(z')\,dz'$$

なので，仮定の $n-1$ 次元の Theorem 2.7 を使いたい．実際，h, f, g は条件 (2.10) を満たすので，

$$\begin{aligned} h_{(1-\lambda)x_1+\lambda y_1}((1-\lambda)x' + \lambda y') &= h((1-\lambda)x + \lambda y) \\ &\geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \\ &= f_{x_1}(x')^{1-\lambda} g_{y_1}(y')^{\lambda} \end{aligned}$$

となり，各 $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ に対し，$h_{(1-\lambda)x_1+\lambda y_1}, f_{x_1}, g_{y_1}$ は $n-1$ 次元の条件 (2.10) を満たす．よって帰納法の仮定より

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{(1-\lambda)x_1+\lambda y_1}(z')\,dz' \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(x')\,dx'\Big)^{1-\lambda} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(y')\,dy'\Big)^{\lambda}$$

となり，これは (2.19) を意味する．

めでたく (2.19) が確認できたので，H, F, G に対し 1 次元の Prékopa-Leindler inequality を適用して，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h(z)\,dz &= \int_{\mathbb{R}} H(z_1)\,dz_1 \\ &\geq \Big(\int_{\mathbb{R}} F(x_1)\,dx_1\Big)^{1-\lambda} \Big(\int_{\mathbb{R}} G(y_1)\,dy_1\Big)^{\lambda} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\Big)^{1-\lambda} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy\Big)^{\lambda} \end{aligned}$$

がわかり証明が完了する． □

2.3 （オマケ）Prékopa-Leindler の等号成立条件について

$\mathbb{R}^n$ 上の Prékopa-Leindler の等号成立条件は [25] によって明らかになっている．これはフランス語の文献でかつ explicit に主張が書いていないので，Bucur-Fragalá [21] 中の主張を述べる（Ball-Böröczky [16, 17] も参照）．ここでは比率を λ の代わりに α で書くことにする．

まず (2.13) に関して，実はあまり言及していなかったが，関数

$$\mathbb{R}^n \ni z \mapsto \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n:\\ z=(1-\alpha)x+\alpha y}} f(x)^{1-\alpha} g(y)^{\alpha} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

は例えば f, g がボレル可測ならルベーグ可測関数になるが，一般の f, g に対してはルベーグ可測関数になるとは限らない（詳細は [21] の Introduction をみよ）．そこで代わりに

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n:\\ z=(1-\alpha)x+\alpha y}} f(x)^{1-\alpha} g(y)^{\alpha}\, dz \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f\Big)^{1-\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} g\Big)^{\alpha} \tag{2.20}$$

を考えるとよい．

$\mathbb{R}^n$ 上の Prékopa-Leindler の等号成立条件

まず，$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が *log-concave* であるとは，

$$\phi((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \phi(x)^{1-\lambda}\phi(y)^{\lambda}, \quad (\forall \lambda \in [0,1],\ x, y \in \mathbb{R}^n) \tag{2.21}$$

が成立することを言う．
このとき [21] によれば次が成立する．

すなわち（$\alpha \in (0,1)$ が何であれ），

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} g = 1$$

の正規化条件の下で，

$$\begin{aligned}&\text{Equality in (2.20)} \Leftrightarrow \exists \phi : \textit{log-concave},\ \exists b \in \mathbb{R}^n : \\ &f(x) = \phi(x) \text{ and } g(x) = f(x-b), \quad (\text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Remark. ちなみに $\Leftarrow$ を確認するのは簡単で log-concavity，ルベーグ測度の平行移動不変性およびヘルダーを使うと (2.20) の逆向きの不等式したがって等号成立が確認できる．

この *log-concavity* について，次の事実は知っていて損はないかと思われる．

Lemma 2.10. $\alpha \in (0,1)$ とする．$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が *log-concave* ならば

$$h(z) := \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n: \\ z=(1-\alpha)x+\alpha y}} f(x)^{1-\alpha} g(y)^{\alpha}$$

も *log-concave* になる．

Proof. アイデアを見るべく，$\alpha = 1/2$ の場合で示す．他の α の場合も同様である．まず，h: *log-concave* $\Leftrightarrow$ h^{μ}: *log-concave*, $(\mu > 0)$ なので，h^2 の *log-concavity*:

$$h((1-\lambda)x_* + \lambda y_*)^2 \geq h(x_*)^{2(1-\lambda)} h(y_*)^{2\lambda}, \quad (\forall \lambda \in (0,1),\ \forall x_*, y_* \in \mathbb{R}^n) \tag{2.22}$$

を示す．以下 λ, x_*, y_* は任意のもので固定する．

$$\text{R.H.S} = \sup_{x_1,x_2 : x_* = (x_1+x_2)/2} \big(f(x_1)g(x_2)\big)^{1-\lambda} \times \sup_{y_1,y_2 : y_* = (y_1+y_2)/2} \big(f(y_1)g(y_2)\big)^{\lambda}$$

なので，$x_* = (x_1 + x_2)/2$ と $y_* = (y_1 + y_2)/2$ を満たす x_1, x_2, y_1, y_2 を任意に取り $\big(f(x_1)g(x_2)\big)^{1-\lambda}\big(f(y_1)g(y_2)\big)^{\lambda}$ を上から評価するとよい．それには f, g の *log-concavity* を使って，

$$\begin{aligned}\big(f(x_1)g(x_2)\big)^{1-\lambda}\big(f(y_1)g(y_2)\big)^{\lambda} &= \big(f(x_1)^{1-\lambda}f(y_1)^{\lambda}\big)\big(g(x_2)^{1-\lambda}g(y_2)^{\lambda}\big)\\ &\le f((1-\lambda)x_1+\lambda y_1)g((1-\lambda)x_2+\lambda y_2).\end{aligned}$$

ここで x_1, x_2, y_1, y_2 の選び方より，$x_0 := (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1, y_0 := (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2$ ととると明らかに

$$(1-\lambda)x_* + \lambda y_* = \frac{x_0 + y_0}{2}$$

が成立するので，

$$\begin{aligned}&\big(f(x_1)g(x_2)\big)^{1-\lambda}\big(f(y_1)g(y_2)\big)^{\lambda} \le f(x_0)g(y_0)\\ \le &\sup_{x,y:(1-\lambda)x_*+\lambda y_*=(x+y)/2} f(x)g(y) =: h((1-\lambda)x_*+\lambda y_*)^2.\end{aligned}$$

これは x_1, x_2, y_1, y_2 についての一様評価になるので

$$\begin{aligned}\mathrm{R.H.S} &= \sup_{x_1,x_2:x_*=(x_1+x_2)/2}\big(f(x_1)g(x_2)\big)^{1-\lambda} \times \sup_{y_1,y_2:y_*=(y_1+y_2)/2}\big(f(y_1)g(y_2)\big)^{\lambda}\\ &\le h((1-\lambda)x_*+\lambda y_*)^2 = \mathrm{L.H.S}\end{aligned}$$

となり (2.22) が確認できた． □

3 Reverse Isoperimetric inequality

まず，Brascamp-Lieb inequality を特に我々の応用に都合のよい形で振り返っておこう．具体的な証明は，Section 4.5 で与える．$m, n \in \mathbb{N}$，$n_1, \ldots, n_m \leq n$ として，$L_1, \ldots, L_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_j}$, linear map と $c_1, \ldots, c_m \in (0, \infty)$ を取り，不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(L_j(x))^{c_j}\, dx \leq \mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) \prod_{j=1}^m \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j(x_j)\, dx_j \Big)^{c_j}, \quad f_j \geq 0 \tag{3.1}$$

を考えたい．$\mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c})$ でもって，この不等式の最良定数を表すことにする．

Theorem 3.1 (Geometric Brascamp-Lieb inequality)**.** $L_1, \ldots, L_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_j}$*, linear map* と $c_1, \ldots, c_m \in (0, 1]$ が *Geometric Brascamp-Lieb data* すなわち，

$$L_j L_j^* = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n_j}}, \quad \sum_{j=1}^m c_j L_j^* L_j = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \tag{3.2}$$

を満たすとする．このとき，

$$\mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) = 1$$

が成立しさらに，不等式 (3.1) の最良定数を達成する f_j*: Gaussian* が実際に存在する．

この結果で大事な点は，不等式の最良定数まで特定できていることである．実際，最良定数を無視すれば，フビニの定理と複素補間により，簡単に不等式を確認できる．この最良定数 1 が，convex geometry の問題にうまく合致することを以下で見ることが目標である．

Remark. この最良定数 1 はそれだけ聞くと，驚くことはないかもしてないが，実際は複雑怪奇な最良定数の不等式を含んでおり，非常に突き詰めた結果になっている．例えば，Young の不等式自身は *Geometric Brascamp-Lieb data* ではないが，Proposition 3.6 [12] による変換で，*Geometric data* に移すことができ，したがってこの Theorem 3.1 は Sharp な Young 不等式の一般化と見做せる．Example 3.8 [12] も参照．この点については Subsection 5.3 に詳細があるので，そちらも参照.

以下では，Ball [1] の主張をそのまま（日本語訳して）コピーしておく．

Theorem 3.2 (Theorem 2 in Ball [1]). $K \subset \mathbb{R}^n$ を任意の *convex, symmetric body*, Q を $\mathbb{R}^n$ 中の任意の立方体とする．このとき，

$$\exists T = T(K,Q):\ \text{affine map s.t.}\ |T(K)| = |Q|, \mathrm{sur}\,(T(K)) \le \mathrm{sur}\,(Q)$$

が成立する．ここで $K \subset \mathbb{R}^n$ が *symmetric* とは $x \in K \Rightarrow -x \in K$ が成立することを意味する．

3.1 考える問題と Reverse Isoperimetric inequality の主張

まずは考える問題のモチベーションを与えよう．

Naive Question

Isoperimetric inequality は，体積一定の下で最小の表面積を持つ図形を探したわけであるが，逆に表面積が最大になる図形は何だろうか？つまり，

$$\max\left\{\mathrm{sur}\,(K) : K \subset \mathbb{R}^n \text{ s.t. } |K| = |\mathbb{B}_2^n|\right\} \tag{3.3}$$

を達成する $K \subset \mathbb{R}^n$ はどういった図形だろうか？

少し考えてみれば，この問いはナンセンスであることがわかる．というのも，例えば $\mathbb{B}_2^n$ の風船を押しつぶせば，体積一定で表面積をいくらでも大きくできるからである．つまり，

$$\max\left\{\mathrm{sur}\,(K) : K \subset \mathbb{R}^n \text{ s.t. } |K| = |\mathbb{B}_2^n|\right\} = \infty$$

である．ところが，この押し潰す作業は（上手に押しつぶせば）$\mathbb{B}_2^n$ の線形変換と思える．そこで線形変換（平行移動も考えるのならアファイン変換）で移り変わる図形同士で，体積が同じものは同一と思えば，上述のナイーブな問いは意味を持つように思える．つまり，定義 (1.2) を思い出して，問題は以下のように定式化することができる．

Problem 3.3.

$$\sup\left\{\mathrm{sur}_*\,(K) : K \subset \mathbb{R}^n \text{ s.t. } |K| = |\mathbb{B}_2^n|\right\} = ? \tag{3.4}$$

また，この sup を達成する K は存在するか？

Ball は，sup をとる際の K に convexity（と symmetricity）をさらに仮定することで，maximizer が立方体であると特定することに成功した．

Theorem 3.4. Q_0 を $\mathbb{B}_2^n$ と同じ体積を持つ立方体，すなわち

$$Q_0 = \Big[-\frac{|\mathbb{B}_2^n|^{\frac{1}{n}}}{2}, \frac{|\mathbb{B}_2^n|^{\frac{1}{n}}}{2} \Big]^n$$

とする．すると，

$$\sup \Big\{ \mathrm{sur}_* (K) : K \subset \mathbb{R}^n \text{ s.t. } |K| = |\mathbb{B}_2^n|, \text{ convex}, \text{ symmetric} \Big\} = \mathrm{sur}\,(Q_0). \tag{3.5}$$

つまり，アファイン変換を除いて立方体が表面積最大．ここで $K \subset \mathbb{R}^n$ が *symmetric* とは $x \in K \Rightarrow -x \in K$ を意味する．

Remark and comments

- 元論文の [1] では symmetric の仮定は課さず，convex のみを課して問題を考えている．その際の解答は K として，simplex に制限して sup を取ればよいというものになる．ここでは，説明を簡略化するべく symmetric の下で問題を考えている．なお，その一般形の証明も鍵となるアイデアは Theorem 3.4 と同じである．より詳しくは原論文 [1] を参照．
- convex すら課さないジェネリックな問題 Problem 3.3 を考えることは難しいであろう．例えば K として，柔毛のような図形を考えれば，線形変換で割って考えたとしても，表面積を大きくすることが可能である．(中央大学，津川光太郎先生にコメントいただきました）
- Theorem 3.4 では，立方体の表面積は measure preserving なアファイン変換を作用させてもそれ以上小さくならないという事実を用いている．つまり，Theorem 3.4 の正確な主張は，

$$\begin{aligned} &\sup \Big\{ \mathrm{sur}_* (K) : K \subset \mathbb{R}^n \text{ s.t. } |K| = |\mathbb{B}_2^n|, \text{ convex}, \text{ symmetric} \Big\} \\ =&\mathrm{sur}_* (Q_0) = \mathrm{sur}\,(Q_0) \end{aligned}$$

  である．

Theorem 3.4 は Ball の元の結果である Theorem 3.2 から従う．

Proof of "Theorem 3.2 ⇒ Theorem 3.4". 上のコメントにあるように,

$$\mathrm{sur}_*(Q_0) = \mathrm{sur} Q_0$$

なので,

$$\begin{aligned}\sup\left\{\mathrm{sur}_*(K) : K \subset \mathbb{R}^n \,\text{s.t.}\, |K| = |\mathbb{B}_2^n|,\ \text{convex},\ \text{symmetric}\right\} &\geq \mathrm{sur}_*(Q_0)\\ &= \mathrm{sur}\,(Q_0).\end{aligned}$$

よって,

$$\sup\left\{\mathrm{sur}_*(K) : K \subset \mathbb{R}^n \,\text{s.t.}\, |K| = |\mathbb{B}_2^n|,\ \text{convex},\ \text{symmetric}\right\} \leq \mathrm{sur}\,(Q_0) \tag{3.6}$$

を示せばよい. sur_* の定義より, $|K| = |\mathbb{B}_2^n|$ を満たす任意の convex, symmetric な $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\exists T : \text{affine map s.t.}\, |T(K)| = |Q_0|,\ \mathrm{sur}\,(T(K)) \leq \mathrm{sur}\,(Q_0) \tag{3.7}$$

が成立することを示せばよいが, これは Theorem 3.2 から直ちに従う. □

3.2 Theorem 3.2 の証明

通常のものであれ, reverse version であれ, Isoperimetric inequality で重要なのは, 体積と表面積との関係である. 今の場合, 立方体が maximizer だと見当がついているので, 立方体の体積と表面積との関係を見ておくことにする. まず任意の立方体 Q に対し,

$$\mathrm{sur}\,(Q) = 2n|Q|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{n-1}{n}} \tag{3.8}$$

が成立する. というのも, Q は $2n$ 個の $n-1$ 次元平面から成り, それぞれの平面は $(|Q|_{\mathbb{R}^n}^{1/n})^{n-1}$ の面積を持つからである. これより, 目標はこの性質が不等式の形で, 任意の K に対しても成立することを示すことになるであろう. より正確には, 任意の convex, symmetric な $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\exists T_0 : \text{affine map s.t.}\, \mathrm{sur}\,(T_0(K)) \leq 2n|T_0(K)|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{n-1}{n}} \tag{3.9}$$

を示すことになる (T_0 は volume preserving でなくてもよい). 実際, (3.9) が Theorem 3.2 を導くことについては, (3.9) の不等式がスケール不変, つまり, (3.9) の不等式は任意の $\lambda > 0$ に対し

$$\mathrm{sur}\,(\lambda T_0(K)) \leq 2n|\lambda T_0(K)|_{\mathbb{R}^n}^{\frac{n-1}{n}} \tag{3.10}$$

が成立することと同値ということに気づけばよさそうである．というのも，任意の立方体 Q に対して，$\lambda > 0$ を

$$|\lambda T_0(K)| = |Q|$$

となるように取れば，$T := \lambda T_0$ と定めることで，T は affine map でかつ，(3.10) と (3.8) から

$$|T(K)| = |\lambda T_0(K)| = |Q|,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{sur}\,(T(K)) &\le 2n|\lambda T_0(K)|^{\frac{n-1}{n}} \\ &= 2n|Q|^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \mathrm{sur}\,(Q)\end{aligned}$$

となり，Theorem 3.2 が従うからである．そこで，以下で (3.9) を満たすアファイン変換 T_0 を探すことになる．そのための手がかりが，convex set K の maximal ellipsoid である．

3.2.1　準備: maximal ellipsoid と F. John's theorem

まずはラフなアイデアを与える：

- $K \subset \mathbb{R}^n$ を一般の convex body とする．このとき，K をもう少しシンプルな図形で "近似"できないだろうか？
- Convexity に注目して，ellipsoid で K を近似することを考えてみる．$\rightsquigarrow$ $\mathcal{E} \subset K$ でできるだけ大きい体積を持つ ellipsoid $\mathcal{E}$ はそれなりに K と "近い"のではないだろうか（maximal ellipsoid）？
- 実際に，この maximal ellipsoid $\mathcal{E}$ による K の近似がある程度よいものであるので，K 自身の代わりに $\mathcal{E}$ を調べることで，目標の (3.9) を満たす affine map T_0 を見つけることができる．

Theorem 3.5 (Fritz John's theorem)**.** $K \subset \mathbb{R}^n$ を任意の *convex body* とする．

1. K の *maximal ellipsoid* $\mathcal{E}(K)$ は存在し，かつそれは一意に定まる．

2. さらに，$\mathcal{E}(K) = \mathbb{B}_2^n$: *Euclidian ball* であることは次の K に関する以下の 2 条件が成立することと同値: $\mathbb{B}_2^n \subset K$ かつ

$$\begin{aligned} &\exists m \in \mathbb{N},\ \exists \{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{S}^{n-1} \cap \partial K,\ \exists \{c_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}_{>0} \text{ s.t.} \\ &\sum_{i=1}^m c_i u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m c_i (x \cdot u_i)^2 = |x|^2, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{3.11}$$

加えて，u_i は $\mathbb{B}_2^n$ と K の境界との接点.

Remark.

- K: symmetric の場合は，１つ目の条件

  $$\sum_{i=1}^m c_i u_i = 0$$

  は気にしなくてよい[3].

- その意味で２つ目の条件が本質的であるが，これは分極公式により，

  $$x = \sum_{i=1}^m c_i (x \cdot u_i) u_i, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

  の成立と同値．さらに $|u\rangle\langle v| : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto (v \cdot x)u \in \mathbb{R}^n$ の言葉で表せば，これは

  $$\sum_{i=1}^m c_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \tag{3.12}$$

  と同値になる.

- 条件 (3.12) より，特に m と c_j は

  $$m \geq n, \quad 0 < c_1, \ldots, c_m \leq 1 \tag{3.13}$$

  を満たさないといけないことがわかる．実際，まず仮に $m < n$ だと $(u_j)_{j=1}^m$ が $\mathbb{R}^n$ を張ることができないので，(3.12) の成立は期待できな

[3] というのも，仮に２つ目の条件を満たす u_i を見つけたら，$\{\tilde{u}_i\}_i$ を新たに $\pm u_i$ で作ることで，$\sum_{i=1}^m c_i \tilde{u}_i = 0$ を満たすようにできる.

い．次に $c_j \le 1$ について，例えば $c_1 \le 1$ を見るには (3.12) に左右から $\langle u_1|$ と $|u_1\rangle$ を作用させればよい:

$$\begin{aligned}\langle u_1|(3.12)|u_1\rangle &\Leftrightarrow c_1\langle u_1||u_1\rangle^2 + \sum_{j\ge 2} c_j\langle u_1||u_j\rangle^2 = \langle u_1||u_1\rangle \\ &\Leftrightarrow c_1 + \sum_{j\ge 2} c_j(u_1\cdot u_j)^2 = 1.\end{aligned}$$

よって，$c_j(u_1\cdot u_j)^2 \ge 0$ なので $c_1 \le 1$ が従う．

この証明は [2] を参照することにして，この定理は認めて先に進む事にする．ただし，簡単な例を与えておく．

Example 3.6. Cube $Q = [-1, 1]^n$ の maximal ellipsoid は $\mathbb{B}_2^n$.

$\mathcal{E}(K) = \mathbb{B}_2^n$ となる場合の K の上からの近似（後で使う）

K: symmetric convex body が $\mathcal{E}(K) = \mathbb{B}_2^n$ となるようなものだった場合を考える．このとき，もちろん $\mathbb{B}_2^n \subset K$ であるが，K の “上からのよい近似” も存在する．$u_j \in \mathbb{S}^{n-1}$ を Theorem 3.5 中にある，∂K と $\mathbb{S}^{n-1}$ との接点だとして

$$\mathcal{C}(K) := \{x \in \mathbb{R}^n : |u_j \cdot x| \le 1,\ \forall j = 1, \ldots, m\} \tag{3.14}$$

と置く．するとこのとき

$$\mathcal{E}(K) \subset K \subset \mathcal{C}(K) \tag{3.15}$$

となることがわかる．実際，u_j が接点でかつ K: convex なので，K は u_j における接線 $\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u_j = 1\}$ の内側にある．ということはすべての $j = 1, \ldots, m$ について

$$K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : u_j \cdot x \le 1\}$$

が成立することになる．また，K: symmetric より図形を反転させてもよいので

$$K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |u_j \cdot x| \le 1\}$$

がわかる．

3.2.2 Volume ratio estimate への reduction（maximal ellipsoid による近似の正当化）

この John's theorem を用いて，目標の (3.9) を満たす affine map T_0 を見つけよう．といっても，ここまで準備をしてしまえば T_0 の目星は明らかである．

Affine map T_0 の選び方

K を任意の symmetric convex body とする．すると Theorem 3.5 より maximal ellipsoid $\mathcal{E}(K)$ が一意に存在する．他方で，Example 3.6 にあるように，cube の maximal ellipsoid は Euclidian ball $\mathbb{B}_2^n$ であった．そこで，T_0 を

$$T_0(\mathcal{E}(K)) = \mathbb{B}_2^n$$

となるようにとると，うまく行きそうな気がしてくる．

以下，この T_0 に対して (3.9) の不等式を示す．Brunn-Minkowski inequality を用いた通常の Isoperimetric inequality の証明を振り返ると，

$$\mathrm{sur}\,(T_0(K)) := \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}(|T_0(K) + \varepsilon\mathbb{B}_2^n| - |T_0(K)|)$$

に着目するのは自然であるが，ここで $\mathbb{B}_2^n$ を $T_0(K)$ に置き換えることできれば何か計算できそうな気がする．実際，$\mathbb{B}_2^n$ は $T_0(K)$ の maximal ellipsoid だったので，特に $\mathbb{B}_2^n \subset T_0(K)$ である．よって，

$$\mathrm{sur}\,(T_0(K)) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}(|T_0(K) + \varepsilon T_0(K)| - |T_0(K)|) = n|T_0(K)|$$

とでき，この評価は maximal ellipsoid による近似が良いものであれば，悪い評価ではないであろう．

Volume ratio estimate への reduction のキーアイデア

そこで目標の評価 (3.9) には,

$$n|T_0(K)| \le 2n|T_0(K)|^{\frac{n-1}{n}} \tag{3.16}$$

あるいは同値なことの

$$|T_0(K)| \le 2^n \tag{3.17}$$

を示すとよい．ちなみに，$K = Q = [-1, 1]^n$ の場合は (3.17) は明らかに正しい．また，$T_0(K)$ の maximal ellipsoid は $\mathbb{B}_2^n$ であったが，これに対しても

$$|\mathcal{E}(T_0(K))| = |\mathbb{B}_2^n| \le |[-1, 1]^n| = 2^n$$

なので，$T_0(K)$ をその maximal ellipsoid に置き換えれば，(3.17) はやはり正しい．したがって，$T_0(K)$ とその maximal ellipsoid の体積が十分近いことを確認できれば，(3.17) を示せそうである．そこから自然と次の volume ratio estimate が現れる．そのモラルは，次のようなものである：L を任意の symmetric convex body として，

$$\frac{|L|_{\mathbb{R}^n}}{|\mathcal{E}(L)|_{\mathbb{R}^n}} \le \frac{|[-1, 1]^n|_{\mathbb{R}^n}}{|\mathcal{E}([-1, 1]^n)|_{\mathbb{R}^n}}.$$

正確には，次の定理を示す.

Theorem 3.7. *Convex body* L に対して，その *volume ratio* を

$$\mathrm{vr}(L) := \frac{|L|_{\mathbb{R}^n}}{|\mathcal{E}(L)|_{\mathbb{R}^n}} \tag{3.18}$$

で定める．このとき,

$$\sup_{L:\text{symmetric convex}} \mathrm{vr}(L) = \mathrm{vr}([-1, 1]^n). \tag{3.19}$$

つまり，*volume ratio* は *cube* が最大.

この Theorem 3.7 が目標の (3.17) を導くのは簡単にわかる．というのも,

$$L = T_0(K)$$

として (3.19) にあてがうと，

$$\frac{|T_0(K)|_{\mathbb{R}^n}}{|\mathcal{E}(T_0(K))|_{\mathbb{R}^n}} \le \frac{|[-1,1]^n|_{\mathbb{R}^n}}{|\mathcal{E}([-1,1]^n)|_{\mathbb{R}^n}}$$

だが，

$$\mathcal{E}(T_0(K)) = \mathbb{B}_2^n$$

となるように T_0 を選んでいたのだし，また

$$\mathcal{E}([-1,1]^n) = \mathbb{B}_2^n$$

は Example 3.6 で指摘しておいたとおりなので，これは

$$|T_0(K)|_{\mathbb{R}^n} \le |[-1,1]^n|_{\mathbb{R}^n} = 2^n$$

を意味し (3.17) が従う．よってあとは Theorem 3.7 を示すことに専念する．

3.2.3 Volume ratio estimate: Theorem 3.7 の証明

この Theorem 3.7 の証明の鍵が rank-1 Brascamp-Lieb 不等式になる．

まずは最初の reduction で，vr(L) が affine invariant なことに注目すると，$\mathcal{E}(L) = \mathbb{B}_2^n$ なものに限って物事を考えてもよい．

Lemma 3.8.

$$\sup_{L:\text{symmetric convex}:\,\mathcal{E}(L)=\mathbb{B}_2^n} \mathrm{vr}(L) = \mathrm{vr}([-1,1]^n) \tag{3.20}$$

が示せれば，(3.19) が従う．つまり，

$$\sup_{L:\text{symmetric convex}:\,\mathcal{E}(L)=\mathbb{B}_2^n} |L| \le |[-1,1]^n| = 2^n \tag{3.21}$$

を示せば十分．

Proof. ルベーグ測度が平行移動不変なので，平行移動は無視できる．すると，affine map T は線型写像つまり，A_T: $n \times n$ 行列であらわせ，そのとき

$$|T(L)|_{\mathbb{R}^n} = |\det(A_T)| \times |L|_{\mathbb{R}^n}$$

である．なので，

$$\mathrm{vr}(T(L)) = \frac{|\det(A_T)| \times |L|_{\mathbb{R}^n}}{|\det(A_T)| \times |\mathcal{E}(L)|_{\mathbb{R}^n}} = \mathrm{vr}(L)$$

が成立し，*volume ratio* が affine invariance であることがわかる．すると任意の ellipsoid は affine map で $\mathbb{B}_2^n$ に移せるので，実質

$$\sup_{L:\text{symmetric convex}} \mathrm{vr}(L) = \sup_{L:\text{symmetric convex: } \mathcal{E}(L)=\mathbb{B}_2^n} \mathrm{vr}(L)$$

がわかり，主張が確認できる． □

この lemma を踏まえ，$\mathcal{E}(L) = \mathbb{B}_2^n$ となる symmetric convex body L を任意にとり，

$$|L| \leq 2^n \tag{3.22}$$

を示そう．すると，John's theorem を念頭に L の $\mathcal{C}(L)$ による上からの近似 (3.15) が思い出される．(3.15) をそのまま使うと，

$$|L| \leq |\mathcal{C}(L)| = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\mathcal{C}(L)}(x)\,dx$$

だが，ここで $\mathcal{C}(L)$ の定義 (3.14) を思い出すと，

$$|L| \leq \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\mathcal{C}(L)}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m 1_{|u_j \cdot x| \leq 1}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m 1_{[-1,1]}(u_j \cdot x)\,dx$$

となる．そこで $f_j = 1_{[-1,1]}$ と書いてみれば

$$|L| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(u_j \cdot x)\,dx \tag{3.23}$$

となり，Brascamp-Lieb 不等式の形が見えてくる．以下で実際にこれを評価するのに Theorem 3.1 がぴったりはまることを見る．

まず，u_j は John' Theorem の条件 (3.11) を満たすものだったことを思い出す．実はこの条件 (3.11) が *Geometric Brascamp-Lieb* の条件に一致している．それを踏まえ，次の rank-1 Brascamp-Lieb 不等式が Theorem 3.1 の特別な場合として得られる．

Corollary 3.9 (rank-1 Brascamp-Lieb)**.** *$m \geq n$, $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{S}^{n-1}$ と $c_1, \ldots, c_m \in (0,1]$ は条件 (3.11):*

$$\sum_{j=1}^{m} c_j |u_j\rangle\langle u_j| = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

を満たすとする．このとき，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(u_j \cdot x)^{c_j}\, dx \leq \prod_{j=1}^{m} \Big(\int_{\mathbb{R}} f_j(x_j)\, dx_j \Big)^{c_j}, \quad f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{3.24}$$

が成立．なお，この不等式に対しては $f_1(t) = \cdots f_m(t) = e^{-t^2}$ が maximizer になる．

Proof. Section 5 でこの rank-1 Brascamp–Lieb 不等式の直接的な証明を与えるが，ここでは Theorem 3.1 が適用可能であることを確認するだけに留める．

ディラックの記号を用いて，

$$|u_j\rangle : \mathbb{R} \ni t \mapsto t u_j \in \mathbb{R}^n, \quad \langle u_j| : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto u_j \cdot x \in \mathbb{R}$$

と表す．すると，

$$L_j = \langle u_j| \quad \rightsquigarrow \quad (L_j^* = |u_j\rangle)$$

にとることで，$(\mathbf{L}, \mathbf{c})$ が *Geometric Brascap-Lieb* の条件 (3.2) を満たすことを確認すれば十分である．まず１つ目の条件については，$u_j \in \mathbb{S}^{n-1}$ であることを使って，

$$L_j L_j^* = \langle u_j||u_j\rangle = |u_j|^2 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$$

となり問題ない．２つ目の条件については，(3.11) をつかって，

$$\sum_{j=1}^{m} c_j L_j^* L_j = \sum_{j=1}^{m} c_j |u_j\rangle\langle u_j| = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

となる．等号達成については，直接的に計算すれば示せることなので省略する． □

この (3.24) を (3.23) に適用することで,（$f_j = 1_{[-1,1]}$ を思い出して）

$$|L| \le \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(u_j \cdot x)\, dx \le \prod_{j=1}^{m} \Big(\int_{\mathbb{R}} f_j(x_j)\, dx_j \Big)^{c_j} = \prod_{j=1}^{m} 2^{c_j} = 2^{\sum_{j=1}^{m} c_j}.$$

最後に条件 $\sum_j c_j |u_j\rangle\langle u_j| = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ のトレースをとれば，c_j は $\sum_j c_n = n$ を満たすことがわかる．これより (3.22) の成立がわかり証明が完了する．

4 Reverse Brascamp-Lieb ineqnuality

Example 2.8 で説明したように,

$$\mathrm{Holder\,inequality} \leftrightarrow_{\mathrm{reverse}} \mathrm{Prekopa-Leindler\,inequality}$$

の関係がある．他方で通常の Brascamp-Lieb 不等式は Hölder の不等式の一般化であった．ということで，Brascamp-Lieb 不等式の心持ちで Prékopa-Leindler 不等式を一般化したものがあってもよいであろう．それがここで説明する，Reverse Brascamp-Lieb ineqnuality になる．

$$\mathrm{Brascamp-Lieb\,inequality} \leftrightarrow_{\mathrm{reverse}} \mathrm{Reverse\,Brascamp-Lieb\,ineqnuality}.$$

ここでは，F. Barthe の論文 [5] を参考にする．

考える不等式は次のような形のものである: $\mathbf{L} = (L_j)_{j=1}^m$: linear maps と $\mathbf{c} = (c_j)_{j=1}^m \subset (0,\infty)$ が与えられたもとで,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n_m} \\ :x=\sum_{j=1}^m c_j L_j^*(y_j)}} \prod_{j=1}^m f_j(y_j)^{c_j}\,dx \tag{4.1}$$

$$\geq \mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c}) \prod_{j=1}^m \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j(y_j)\,dy_j \Big)^{c_j}.$$

さらに，$\mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c})$ はこの不等式の最良定数を表す，すなわち

$$\mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c}) := \inf_{f_j\geq 0} \Bigg(\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n_m} \\ :x=\sum_{j=1}^m c_j L_j^*(y_j)}} \prod_{j=1}^m f_j(y_j)^{c_j}\,dx$$

$$\div \prod_{j=1}^m \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j(y_j)\,dy_j \Big)^{c_j} \Bigg)$$

Example 4.1.

1. (4.1) において,

$$m=2,\ n_1=n_2=n,\ L_1=L_2=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n},\ c_1=1-\lambda,\ c_2=\lambda$$

と置けば Prékopa-Leindler inequality (2.13) に一致する.（ちなみにこのセッティングでは，通常の Bracamp-Lieb は Hölder に一致している）.

2. $(\mathbf{L}, \mathbf{c})$ が *Geometric data* (3.2) の場合は，$y_i = L_i(x)$ にとることで，特に自明な不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n_m} \\ :x=\sum_{j=1}^m c_j L_j^*(y_j)}} \prod_{j=1}^m f_j(y_j)^{c_j}\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(L_j(x))^{c_j}\,dx$$

が得られる．

次の F. Barthe [5] の主結果により，reverse Brascamp-Lieb は実に通常の Brascamp-Lieb の "双対"であることがわかる．

主定理

Theorem 4.2 (Theorem 1 in [5])**.** $m, n \in \mathbb{N}$，$n_1, \ldots, n_m \leq n$ とし $(\mathbf{L}, \mathbf{c})$ は

$$n = \sum_{j=1}^m c_j n_j, \quad \bigcap_{j=1}^m \ker(L_j) = \{0\} \tag{4.2}$$

を満たすものとする（つまり [12] の *non-degenerate condition*）．このとき[a]，

$$\mathrm{RBL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) \cdot \mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) = 1 \tag{4.3}$$

が成立しさらに

$$\mathrm{RBL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) = \mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c}), \quad \mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) = \mathrm{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) \tag{4.4}$$

が成立する．

[a] ここで $0 \times \infty = 1$ と理解する．

コメント

- まず大事なことは，(4.3) から

$$\mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c}) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{BL}(\mathbf{L},\mathbf{c}) < \infty$$

がわかり，さらに最良定数も移り変わることがわかる．したがって，通常の Brascamp-Lieb 不等式あるいは reverse Brascap-Lieb 不等式のどちらかがわかれば，自動的にもう一方についてもわかる事になる．

$\rightsquigarrow$ 特に [12] で通常の Brascamp–Lieb 不等式がかなりわかっているので，Theorem 4.2 により，その結果がそのまま reverse Brascamp–Lieb 不等式に持ち上がる．

- ただし，通常の Brascamp–Lieb 不等式と reverse Brascamp–Lieb 不等式の間で等号成立条件は全く別物である．例えば，Hölder の不等式と Prékopa-Leindler 不等式は，互いに双対の関係で最良定数は移り変わるが，等号成立条件はまったく異なる．

- (4.4) の結果のうち $\mathrm{BL}(\mathbf{L},\mathbf{c}) = \mathrm{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})$ は Lieb [26] の定理である．したがって，(4.4) は Lieb の結果が reverse Brascamp–Lieb 不等式でも成立することを述べている．

- Lieb [26] による $\mathrm{BL}(\mathbf{L},\mathbf{c}) = \mathrm{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})$ の証明は，トリッキーなアイデアが多く読むのに苦労しするかもしれない．他方で以下の Barthe による証明は，mass-transport という大道具を使うがそれさえ認めれば簡潔な証明で，Lieb [26] の結果の見やすい別証明と言える．また，おもしろいことに以下の証明は (4.4) をまとめて導く．

- Non-degenerate condition(4.2) を課さない状況を考えてもよいが，その場合は自明な状況しか起こらない．つまり $\mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c}) = 0$．また，(4.2) はたとえば $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_m) \in \prod_{j=1}^m \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})$ に対し，

$$\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j L_j : \text{ positive definite} \tag{4.5}$$

を保証する．特に

$$\mathbf{A} \in \prod_{j=1}^m \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j}) \Rightarrow \sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j L_j \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^n) \tag{4.6}$$

が成立する．

Remark. (4.5) について，実際 (4.2) より，

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists j_x \in \{1, \ldots, m\} \,\text{s.t.}\, L_{j_x}(x) \neq 0$$

が成立する．したがって

$$\langle x, \sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j L_j(x)\rangle = \sum_{j=1}^m c_j \langle L_j(x), A_j L_j(x)\rangle \geq c_{j_x}\langle L_{j_x}(x), A_{j_x} L_{j_x}(x)\rangle$$

が成立するが，$L_{j_x}(x) \neq 0$ なので A_j: positive definite を使い

$$\langle x, \sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j L_j(x)\rangle \geq c_{j_x}\langle L_{j_x}(x), A_{j_x} L_{j_x}(x)\rangle > 0, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

となって，$\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j L_j$ の positive definite がわかる．

以下でこの Theorem 4.2 を証明していく．

まず，Guassian input に対する $\mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}; \mathbf{g_A}), \mathrm{RBL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}; \mathbf{g_A})$ を計算することが最初のステップになる．

通常の Brascamp-Lieb 不等式に対しては簡単に計算が可能であること，つまり

$$\mathbf{A} \in \prod_{j=1}^m \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})$$

につき，

$$\mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}; \mathbf{g_A}) = \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^m \det{(A_j)^{c_j}}}{\det{(\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j L_j)}}}. \tag{4.7}$$

なお，A_i: positive definite で non-degenerate condition (4.2) をふまえると，(4.5) で述べたように $\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j L_j$ も positive definite であることがわかり，特に

$$\det\big(\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j L_j\big) > 0$$

なので，各 $\mathbf{A} \in \prod_{j=1}^m \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})$ につき，$\mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}; \mathbf{g_A}) < \infty$ がわかる．

では，reverse Brascamp–Lieb 不等式に対する $\mathrm{RBL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}; \mathbf{g_A})$ も簡単に計算できるかというと，案外そううまくはいかない．

この $\mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g_A})$ を計算するべく，まず線形代数の 2 次形式について復習をしておく．

4.1 Quadratic form と dual quadratic form

Brascamp-Lieb 不等式では，Gaussian input

$$g_{A_j}(x_j) = e^{-\langle x_j, A_j(x_j)\rangle^2}, \quad A_j \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})$$

を考えるので，quadratic form の必要性はわかるが，reverse Brascamp-Lieb 不等式を考える際には，dual quadratic form も必要となる．

セッティングと目標

実 $n \times n$-行列 M に対し，quadratic form $Q = Q_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は

$$Q(x) := \langle x, M(x)\rangle$$

で定まる．逆に quadratic form Q が先に与えられた場合，対応する行列を M_Q と表す．また quadratic form $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，その dual quadratic form を

$$Q^*(x) := \sup_{y\in B_Q} |\langle x, y\rangle|^2, \quad B_Q := \{y \in \mathbb{R}^n : Q(y) \leq 1\}, \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定める．
そもそも Q^* が quadratic form なのか？という疑問があるが，M_Q が symmetric かつ positive-definite なものであれば問題ない．さらにこの場合は，Q^* はいくぶん見やすくなる．以下では M_Q は常に symmetric かつ positive-definite なもののみ考える（我々の応用上ではこれで十分である）．

以下の証明は煩雑であるが，大事なことは M_Q の仮定より直交行列で対角化できるので，初めから M_Q を対角行列と思ってよいということである．M_Q をはじめから対角行列と思っておけば，以下の話は幾分かすっきりする．

Lemma 4.3. *quadratic form* Q を M_Q が *symmetric* かつ *positive-definite* なものとする．このとき，以下が成立する．

1. dual quadratic form $Q^*(x)$ の定義中の上限は達成される．

$$\sup_{y\in B_Q}|\langle x,y\rangle|^2=\max_{y\in B_Q}|\langle x,y\rangle|^2$$

2. さらに，$T_Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を *linear and invertible* で

$$ {}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1}M_QT_Q^{-1}=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \tag{4.8}$$

を満たすように選ぶ（これは，M_Q*:symmetric* かつ *positive-definite* なので可能）と，

$$Q^*(x)=\langle x,T_Q^{-1}({}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1})(x)\rangle\quad\text{i.e.}\quad M_{Q^*}=T_Q^{-1}({}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1})$$

が成立する．

証明を与える前に，この lemma からの重要な帰結を述べておく．

Corollary 4.4. *quadratic form* Q を M_Q が *symmetric* かつ *positive-definite* なものとする．このとき，

$$\det(Q)\det(Q^*)=1,\quad Q^{**}=Q. \tag{4.9}$$

ここで，$\det(Q):=\det(M_Q)$ であった．

Proof of Corollary 4.4 assuming Lemma 4.3. Lemma 4.3 を認めて，Corollary 4.4 を示そう．Lemma 4.3 中の T_Q を使って

$$\det(Q^*)=\det(T_Q^{-1}({}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1}))=(\det(T_Q))^{-2}$$

である．他方で T_Q^{-1} の選び方 (4.8) より

$$1=\det({}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1}M_QT_Q^{-1})=\det(M_Q)(\det(T_Q))^{-2}=\det(Q)\det(Q^*)$$

となり最初の等式がわかる．

また $Q^{**}=Q$ の証明については，まず Q^* に Lemma 4.3 を適用すれば

$$M_{Q^{**}}=T_{Q^*}^{-1}({}^{\mathrm{t}}T_{Q^*}^{-1})$$

で T_{Q^*} は
$$ {}^{\mathrm{t}}T_{Q^*}^{-1} M_{Q^*} T_{Q^*}^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} $$
を満たすものであればなんでもよい．さらに $M_{Q^*} = T_Q^{-1}({}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1})$ だったので，この T_{Q^*} の条件は
$$ {}^{\mathrm{t}}T_{Q^*}^{-1} T_Q^{-1}({}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1}) T_{Q^*}^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} $$
となるが，これは特に $T_{Q^*} := {}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1}$ にとってみれば達成できる．よって

$$ M_{Q^{**}} = ({}^{\mathrm{t}}T_Q) T_Q $$

となり，これと (4.8) を使えば，

$$ \begin{aligned} Q^{**}(x) &= \langle x, M_{Q^{**}}(x) \rangle = \langle x, ({}^{\mathrm{t}}T_Q) T_Q(x) \rangle = \langle T_Q(x), T_Q(x) \rangle \\ &= \langle T_Q(x), ({}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1} M_Q T_Q^{-1}) T_Q(x) \rangle = \langle x, M_Q(x) \rangle = Q(x) \end{aligned} $$

がわかる． □

Lemma 4.3 を示す前に，典型例を与えておく．

Example 4.5. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ をとり，$(M_Q)_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$: 対角行列にとる．このとき，

$$ (T_Q)_{ij} = \sqrt{\lambda_i}\delta_{ij}, \quad Q^*(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} x_i^2 = \langle x, M_Q^{-1}(x) \rangle. $$

Proof of Lemma 4.3. まず，１つ目の主張を示そう．それには，

$$ B_Q = \{ y \in \mathbb{R}^n : Q(y) \leq 1 \} $$

がコンパクトになることを示せばよい．B_Q は閉集合なので有界性を示すことにする．まず M_Q の仮定より直行行列 P_Q で対角化できる：固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ が存在して，${}^{\mathrm{t}}P_Q M_Q P_Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i$ となる．ここで，E_i は $(E_i)_{j,k} = \delta_{ij}\delta_{jk}$ つまり (i,i)-成分のみ 1 で他の成分は 0．すると，

$$ Q(P_Q(y)) = \langle P_Q(y), M_Q P_Q(y) \rangle = \langle y, {}^{\mathrm{t}}P_Q M_Q P_Q(y) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 $$

もしくは，同値なことの

$$Q(y) = Q(P_Q {}^{\mathrm{t}}P_Q(y)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [{}^{\mathrm{t}}P_Q(y)]_i^2.$$

そこで，$\lambda_0 = \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} > 0$ とおいて，直行行列の等長性:

$$|{}^{\mathrm{t}}P_Q(y)| = |y|$$

を使い，

$$Q(y) \geq \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} [{}^{\mathrm{t}}P_Q(y)]_i^2 = \lambda_0 |{}^{\mathrm{t}}P_Q(y)|^2 = \lambda_0 |y|^2.$$

これより，

$$y \in B_Q \Rightarrow \lambda_0 |y|^2 \leq Q(y) \leq 1 \Rightarrow |y| \leq \lambda_0^{-\frac{1}{2}}$$

つまり，$B_Q \subset \mathbb{B}_2^n(\lambda_0^{-1/2})$ がわかるので B_Q はコンパクト．

さて，では本題の 2 つ目の主張を示そう．まず上述の対角化に加え（$\lambda_i > 0$ を念頭に），

$$R_Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1/2} E_i$$

をとり $T_Q^{-1} = P_Q R_Q$ と置くと，(${}^{\mathrm{t}}R_Q = R_Q$ なので)

$${}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1} M_Q T_Q^{-1} = R_Q {}^{\mathrm{t}}P_Q M_Q P_Q R_Q = R_Q (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i) R_Q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

となって条件 (4.8) を満たす T_Q の存在がわかる．このとき大事なことは T_Q が B_Q を $\mathbb{B}_2^n$ に移すということである:

$$T_Q(B_Q) = \mathbb{B}_2^n. \tag{4.10}$$

実際，条件 (4.8) を使い

$$\begin{aligned} T_Q(B_Q) &= \{T_Q(y) \in \mathbb{R}^n : Q(y) = \langle y, M_Q(y) \rangle \leq 1\} \\ &= \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^n : \langle T_Q^{-1}(\tilde{y}), M_Q T_Q^{-1}(\tilde{y}) \rangle \leq 1\} \\ &= \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \tilde{y}, {}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1} M_Q T_Q^{-1}(\tilde{y}) \rangle \leq 1\} \\ &= \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \tilde{y}, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{y}) \rangle \leq 1\} = \mathbb{B}_2^n. \end{aligned}$$

${}^tT_Q^{-1}x \neq 0$ と仮定する．そうではない場合は，$x=0$ なので，

$$Q^*(x) = |{}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1}(x)|^2 = \langle x, T_Q^{-1}({}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1})(x)\rangle$$

は自明である．この (4.10) を使い，($e_w := w/|w| \in \mathbb{S}^{n-1}$ の記号を使って)

$$\begin{aligned}Q^*(x) &:= \sup_{y\in B_Q} |\langle x, y\rangle|^2 = \sup_{y\in B_Q} |\langle x, T_Q^{-1}T_Q(y)\rangle|^2 = \sup_{y\in B_Q} |\langle {}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1}(x), T_Q(y)\rangle|^2 \\ &= \sup_{\tilde{y}\in\mathbb{B}_2^n} |\langle {}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1}(x), \tilde{y}\rangle|^2 = |{}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1}(x)|^2 \sup_{\tilde{y}\in\mathbb{B}_2^n} |\langle e_{{}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1}(x)}, \tilde{y}\rangle|^2.\end{aligned}$$

ここで，任意の単位ベクトル $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ に対して，$\sup_{\tilde{y}\in\mathbb{B}_2^n} |\langle e, \tilde{y}\rangle|^2 = 1$ は明らか．よって，

$$Q^*(x) = |{}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1}(x)|^2 = \langle x, T_Q^{-1}({}^{\mathrm{t}}T_Q^{-1})(x)\rangle$$

がわかる． □

4.2 RBL$(\mathbf{L}, \mathbf{c}; \mathbf{g}_{\mathbf{A}})$ の計算

上述の dual quadratic form を使って，reverse BL の Gaussian input を計算する．

Lemma 4.6. $\mathbf{A} \in \prod_{j=1}^m \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})$ に対し，

$$\mathrm{RBL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}; \mathbf{g}_{\mathbf{A}}) = \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^m \det(A_j)^{c_j}}{\det(Q^*_{\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j^{-1} L_j})}}. \tag{4.11}$$

これより次が従う．

Corollary 4.7. $\mathbf{A} \in \prod_{j=1}^m \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})$ に対し，

$$\mathrm{RBL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}; \mathbf{g}_{\mathbf{A}^{-1}}) \cdot \mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}; \mathbf{g}_{\mathbf{A}}) = 1. \tag{4.12}$$

特に

$$\mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) \cdot \mathrm{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) = 1. \tag{4.13}$$

Proof of Corollary 4.7 assuming Lemma 4.6. (4.11) より

$$\mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g}_{\mathbf{A}^{-1}})=\sqrt{\frac{\prod_{j=1}^m \det{(A_j)}^{-c_j}}{\det{(Q^*_{\sum_{j=1}^m c_jL_j^*A_jL_j})}}}$$

である．ここで，(4.6) をふまえると

$$\sum_{j=1}^m c_jL_j^*A_jL_j\in\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^n)$$

なので (4.9) を適用でき

$$\begin{aligned}\mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g}_{\mathbf{A}^{-1}})&=\sqrt{\Big(\prod_{j=1}^m\det{(A_j)}^{-c_j}\Big)\det{(Q_{\sum_{j=1}^m c_jL_j^*A_jL_j})}}\\&:=\sqrt{\Big(\prod_{j=1}^m\det{(A_j)}^{-c_j}\Big)\det{(\sum_{j=1}^m c_jL_j^*A_jL_j)}}.\end{aligned}$$

あとは，(4.7) を引用すれば (4.12) がわかる．

また (4.13) については，定義に基づいて

$$\begin{aligned}&\mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})\cdot\mathrm{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})\\&=\inf_{\mathbf{A}\in\prod_{j=1}^m\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})}\mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g}_{\mathbf{A}})\cdot\sup_{\tilde{\mathbf{A}}\in\prod_{j=1}^m\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})}\mathrm{BL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{A}}})\\&\le\sup_{\tilde{\mathbf{A}}\in\prod_{j=1}^m\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})}\mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}})\cdot\mathrm{BL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{A}}})=1.\end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned}&\mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})\cdot\mathrm{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})\\&=\inf_{\mathbf{A}\in\prod_{j=1}^m\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})}\mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g}_{\mathbf{A}})\cdot\sup_{\tilde{\mathbf{A}}\in\prod_{j=1}^m\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})}\mathrm{BL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{A}}})\\&\ge\inf_{\mathbf{A}\in\prod_{j=1}^m\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j})}\mathrm{RBL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g}_{\mathbf{A}})\cdot\mathrm{BL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g}_{\mathbf{A}^{-1}})=1.\end{aligned}$$

となって (4.13) もわかる． □

Proof of Lemma 4.6. 定義を念頭に，

$$\begin{aligned}
\Lambda_R(g_{A_1},\dots,g_{A_m}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{y_j\in\mathbb{R}^{n_j}:x=\sum_j c_jL_j^*(y_j)} e^{-\sum_{j=1}^m c_j\langle y_j,A_j(y_j)\rangle}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\big[-\inf_{y_j\in\mathbb{R}^{n_j}:x=\sum_j c_jL_j^*(y_j)} \sum_{j=1}^m c_j\langle y_j,A_j(y_j)\rangle\big]\,dx \\
&=: \int_{\mathbb{R}^n} e^{-R_{\mathbf{A}}(x)}\,dx
\end{aligned}$$

を計算したい．実はこの $R_{\mathbf{A}}(x)$ は 2 次形式になっていてさらに

$$R_{\mathbf{A}}(x) = Q^*_{\sum_{j=1}^m c_jL_j^*A_j^{-1}L_j}(x) \tag{4.14}$$

が成り立つことがわかる．これを以下で確認しよう．論文に沿って，下限の定義により，まず $R_{\mathbf{A}}(x) \ge Q^*_{\sum_{j=1}^m c_jL_j^*A_j^{-1}L_j}(x)$ を示す．それには，$y_1,\dots,y_m,y$ で条件

$$x = \sum_j c_jL_j^*(y_j), \quad y \in B_{Q_{\sum_{j=1}^m c_jL_j^*A_j^{-1}L_j}} \tag{4.15}$$

つまり

$$x = \sum_j c_jL_j^*(y_j), \quad \langle y, \sum_{j=1}^m c_jL_j^*A_j^{-1}L_j(y)\rangle \le 1$$

を満たすものを任意に fix し，

$$\sum_{j=1}^m c_j\langle y_j, A_j(y_j)\rangle \ge |\langle x,y\rangle|^2 \tag{4.16}$$

を示せばよい．まず注意として (4.15) の 2 つ目の条件

$$y \in B_{Q_{\sum_{j=1}^m c_jL_j^*A_j^{-1}L_j}}$$

は

$$\sum_{j=1}^m c_j|A_j^{-1/2}L_j(y)|^2 \le 1 \tag{4.17}$$

と同値．

(4.15) の１つ目の条件

$$x = \sum_j c_j L_j^*(y_j)$$

を用いて

$$\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle|^2 &= \Big|\sum_{j=1}^m c_j \langle L_j^*(y_j), y\rangle\Big|^2 = \Big|\sum_{j=1}^m c_j \langle y_j, A_j^{1/2} A_j^{-1/2} L_j(y)\rangle\Big|^2 \\
&= \Big|\sum_{j=1}^m c_j \langle A_j^{1/2}(y_j), A_j^{-1/2} L_j(y)\rangle\Big|^2 \\
&= \Big|\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_j [A_j^{1/2}(y_j)]_i \cdot [A_j^{-1/2} L_j(y)]_i\Big|^2.
\end{aligned}$$

ここで $A_j^{1/2} A_j^{-1/2}$ を挟むのはトリッキーだが，(4.17) が念頭にある．そこで Cauchy-Schwarz の不等式を使うと

$$\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle|^2 &\leq \Big(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_j |[A_j^{1/2}(y_j)]_i|^2\Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_j |[A_j^{-1/2} L_j(y)]_i|^2\Big) \qquad (4.18) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^m c_j |A_j^{1/2}(y_j)|^2\Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^m c_j |A_j^{-1/2} L_j(y)|^2\Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^m c_j |A_j^{1/2}(y_j)|^2 \quad (\because (4.17)) \\
&= \sum_{j=1}^m c_j \langle y_j, A_j(y_j)\rangle
\end{aligned}$$

となり，(4.16) がわかる．逆にこの計算の等号条件を考えると，逆向きの不等式も確認できる．実際 Cauchy-Schwarz の不等式 (4.18) の等号条件は，$\exists \lambda > 0$ s.t.

$$[A_j^{1/2}(y_j)]_i = \lambda [A_j^{-1/2} L_j(y)]_i, \quad (\forall i, j) \quad \text{i.e.} \quad A_j(y_j) = \lambda L_j(y)$$

なので y_j, y をこの constraint の下で (4.15) を満たすように選べるとよいであろう．(4.15) の１つ目をふまえると

$$x = \lambda \sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j^{-1} L_j(y)$$

が成立していないといけないが，これより y の形が決定する:（$\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j^{-1} L_j \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^n)$ なので特に逆行列を持つことに注意）

$$y = \lambda^{-1}\big(\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j^{-1} L_j\big)^{-1}(x).$$

さてこの y は (4.15) の 2 つ目の条件も満たさないといけないので，そうなるように $\lambda > 0$ を調節する: (4.15) の 2 つ目の条件があると

$$\lambda^{-2}\langle\big(\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j^{-1} L_j\big)^{-1}(x), x\rangle \le 1$$

が成立していないといけない．したがってこれらを逆算すると，

$$\lambda = \sqrt{\langle\big(\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j^{-1} L_j\big)^{-1}(x), x\rangle}$$

にとり，y_j^*, y^* を

$$y^* = \lambda^{-1}\big(\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j^{-1} L_j\big)^{-1}(x), \quad y_j^* = \lambda A_j^{-1} L_j(y^*)$$

に選べば，y_j^*, y^* は条件 (4.15) を満たしかつ (4.18) の不等式はすべて等号になる．つまり，

$$R_{\mathbf{A}}(x) \le \sum_{j=1}^m c_j \langle y_j^*, A_j(y_j^*)\rangle = |\langle x, y^*\rangle|^2 \le Q^*_{\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j^{-1} L_j}(x)$$

となって (4.14) が確認できた．

さて，この (4.14) と $Q^*_{\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j^{-1} L_j}(x)$ が二次形式であることを踏まえて (1.3) から

$$\Lambda_R(g_{A_1}, \ldots, g_{A_m}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q^*_{\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j^{-1} L_j}(x)}\, dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det\big(Q^*_{\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j^{-1} L_j}\big)}}.$$

あとはシンプルに確認できる (スケーリング条件 $\sum_j c_j n_j = n$ を使って)

$$\prod_{j=1}^m \big(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_{A_j}\big)^{c_j} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\prod_{j=1}^m \det(A_j)^{c_j}}}$$

を考慮に入れれば目標であった (4.11) がわかる． □

4.3 Key lemma への reduction

以上で Guassian input に対しては，状況は判然としてきた．あとは一般の input に対して物事を考える必要がある．Theorem 4.2 の証明は次の lemma を示すことで完結する．

Lemma 4.8. $f_j, h_j : \mathbb{R}^{n_j} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は $\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{n_j}} h_j$ を満たすものとする．このとき，

$$\Lambda_R(f_1, \ldots, f_m) \geq \mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c})^2 \Lambda_F(h_1, \ldots, h_m) \tag{4.19}$$

が成立する．

まずは証明の前に，この Lemma 4.8 が Theorem 4.2 を導くことを確認しておく．

Proof of Lemma 4.8 ⇒ Theorem 4.2. 正規化を考えれば明らかに

$$\mathrm{RBL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) = \inf_{f_j : \int f_j = 1} \Lambda_R(f_1, \ldots, f_m), \quad \mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) = \sup_{h_j : \int h_j = 1} \Lambda_F(h_1, \ldots, h_m)$$

である．したがって，(4.19) に対して $\inf_{f_j : \int f_j = 1}$ と $\sup_{h_j : \int h_j = 1}$ をとることで，

$$\mathrm{RBL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) \geq \mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c})^2 \mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c})$$

が従う．他方で定義より明らかに

$$\mathrm{RBL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) \leq \mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c}), \quad \mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) \geq \mathrm{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c})$$

なので Corollary 4.7 - (4.13) を用いて，

$$\begin{aligned}
\mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) &\geq \mathrm{RBL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) \geq \mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c})^2 \mathrm{BL}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) \geq \mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c})^2 \mathrm{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) \\
&= \mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c})^2 \mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c})^{-1} \quad (\because (4.13)) \\
&= \mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L}, \mathbf{c})
\end{aligned}$$

がわかり，これは以上の不等式がすべて等号であったことを意味する．これで Theorem 4.2 の証明は完了する． □

これで後は Lemma 4.8 を示すのみとなった．

4.4 Lemma 4.8 の証明（mass transport method）

Lemma 4.8 は mass transport method と呼ばれる手法で証明できる．そのため，以下の道具を準備する．

Theorem 4.9 (Brenier mapping [19, 20], improved version [29, 30])**.** $\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} h$ を満たす $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して，$\exists \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*: convex function s.t.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(\nabla\phi(x))f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} b(x)h(x)\,dx, \quad \forall b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

特にこの *convex potential* ϕ は，*Monge-Ampére* 方程式

$$\det(\nabla^2\phi(x))f(\nabla\phi(x)) = h(x) \tag{4.20}$$

の *generalized solution* になる．

この結果を用いる際に strong solution であったほうが都合がよいので，次の結果も引用しておく．

Theorem 4.10 (Caffarelli [22])**.**

仮定 *:* $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し，$\Omega_f := \{f > 0\}, \Omega_h := \{h > 0\} \subset \mathbb{R}^n$*: bounded domain* で，$f, f^{-1} \in L^\infty(\Omega_f)$ *and* $h, h^{-1} \in L^\infty(\Omega_h)$，さらに Ω_h*: convex* で f, h*: Lipschitz* とする．

主張 *:* このとき，*Theorem 4.9* の *Brenier mapping* ϕ は C^2-級.

これらの道具を用いて Lemma 4.8 の証明を完成させよう．まず，適当に近似することで f_j は f_j^0: Lipschitz on $\mathbb{R}^n$ によって $f_j = f_j^0|_{\Omega_{f_j}}$ と書け，Ω_{f_j}: open Euclidean ball としてよい（詳細はもと論文 [5] を参照）．また，h_j も同様. これによって，f_j, h_j らはそれぞれ Theorem 4.10 の仮定を満たすので Brenier mapping $\phi_j : \mathbb{R}^{n_j} \to \mathbb{R}$, C^2-級がとれ

$$\det(\nabla^2\phi_j(y_j))f_j(\nabla\phi_j(y_j)) = h_j(y_j), \quad (y_j \in \mathbb{R}^{n_j}) \tag{4.21}$$

が成立する．これと $\prod_{j=1}^m h_j \circ L_j$ のサポートが $\bigcap_{j=1}^m L_j^{-1}(\Omega_{h_j})$ であることを踏まえて，

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_F(h_1, \ldots, h_m) \\
&= \int_{\bigcap_{j=1}^m L_j^{-1}(\Omega_{h_j})} \prod_{j=1}^m h_j(L_j(x))^{c_j}\, dx \\
&= \int_{\bigcap_{j=1}^m L_j^{-1}(\Omega_{h_j})} \prod_{j=1}^m \left[\det\left(\nabla^2 \phi_j(L_j(x))\right) f_j(\nabla \phi_j(L_j(x)))\right]^{c_j} dx \quad (\because (4.21)) \\
&=: \int_{\bigcap_{j=1}^m L_j^{-1}(\Omega_{h_j})} \prod_{j=1}^m \left[\det\left(dT_j(L_j(x))\right) f_j(T_j \circ L_j(x))\right]^{c_j} dx, \quad (T_j := \nabla \phi_j)
\end{aligned}
$$

がわかる．そこで，

$$
\prod_{j=1}^m \det\left(dT_j(L_j(x))\right)^{c_j}
$$

を評価したいところだが，x を fix して考えると $dT_j(L_j(x)) =: A_j$ は各 (k,l) 成分が $\partial_l \partial_l \phi_j(L_j(x))$ で与えられる対称行列であった．さらにこの

$$
\prod_{j=1}^m \det\left(dT_j(L_j(x))\right)^{c_j} = \prod_{j=1}^m \det\left(A_j\right)^{c_j}
$$

は (4.7) を彷彿とさせる．そこで，$A_j := dT_j(L_j(x))$ が positive definite になればしめたものである．まず T_j の定義から $dT_j(L_j(x)) = \nabla^2 \phi_j(L_j(x))$: Hessian of ϕ_j で ϕ_j は Ω_{h_j} で convex かつ C^2-級であった．よって多変数関数の凸性に関する事実[4]より，少なくとも $dT_j(L_j(x))$: semi-positive definite $(\forall x \in L_j^{-1}(\Omega_{h_j}))$ がわかる．また $dT_j(L_j(x)) := \nabla^2 \phi_j(L_j(x))$ であることと (4.21):

$$
\det\left(\nabla^2 \phi_j(L_j(x))\right) f_j(\nabla \phi_j(L_j(x))) = h_j(L_j(x))
$$

を思い返せば，$\forall x \in L_j^{-1}(\Omega_{h_j})$ に対し $h_j(L_j(x)) > 0$ だったので

$$
\det\left(dT_j(L_j(x))\right) = \det\left(\nabla^2 \phi_j(L_j(x))\right) > 0, \quad (\forall x \in L_j^{-1}(\Omega_{h_j}))
$$

となり，実際に $dT_j(L_j(x))$: positive definite がわかる．よって

$$
A_j := dT_j(L_j(x)) \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n_j}), \quad (\forall x \in L_j^{-1}(\Omega_{h_j})) \tag{4.22}
$$

[4]つまり，C^2-級関数 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: convex domain 上で convex $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \Omega^\circ$, $\nabla^2 \phi(x)$: Hessian of ϕ at x が semi-positive definite.

がしたがう．すると (4.7) と (4.13) より

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^m \det(dT_j(L_j(x)))^{c_j} &= \mathrm{BL}(\mathbf{L},\mathbf{c};\mathbf{g_A})^2 \det(\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j L_j) \quad (\because (4.7))\\ &\le \mathrm{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})^2 \det(\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j L_j)\\ &= \mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})^{-2} \det(\sum_{j=1}^m c_j L_j^* A_j L_j) \quad (\because (4.13))\\ \text{where} \quad & A_j := dT_j(L_j(x)).\end{aligned}$$

この評価を片手に $\Lambda_F(h_1,\ldots,h_m)$ の評価に戻ると

$$\begin{aligned}&\Lambda_F(h_1,\ldots,h_m)\\ \le &\mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})^{-2}\\ &\quad \times \int_{\bigcap_{j=1}^m L_j^{-1}(\Omega_{h_j})} \prod_{j=1}^m f_j(T_j \circ L_j(x))^{c_j} \det(\sum_{j=1}^m c_j L_j^*(dT_j(L_j(x)))L_j)\, dx\end{aligned}$$

ここで

$$d\Theta(x) = \sum_{j=1}^m c_j L_j^*(dT_j(L_j(x)))L_j$$

となるように $\Theta : \bigcap_{j=1}^m L_j^{-1}(\Omega_{h_j}) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ をとれると，

$$\det(\sum_{j=1}^m c_j L_j^*(dT_j(L_j(x)))L_j)$$

は Θ による変数変換のヤコビアンに思えてくる．それには

$$\Theta(x) := \sum_{j=1}^m c_j L_j^*(T_j \circ L_j(x))$$

ととればよいであろう[5]．すると

$$y_j(x) = T_j \circ L_j(x)$$

---

[5]実際，一般に $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ が

$$S(x) = (s_1(x),\ldots,s_k(x)), \quad T(y) = (t_1(y),\ldots,t_l(y)), \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^k)$$

と書くと Reverse Brascamp-Lieb 不等式の sup の条件

$$\Theta(x)=\sum_{j=1}^{m}c_jL_j(y_j(x)) \tag{4.24}$$

と表されるとき，チェインルールより $T\circ S(x)=(t_1(S(x)),\ldots,t_l(S(x)))$ の微分の (i,j)-成分は

$$\begin{aligned}&(d[T\circ S](x))_{ij}\\ =&\partial_j[t_i\circ S](x)\\ =&\frac{\partial t_i}{\partial y_1}(S(x))\cdot\frac{\partial s_1}{\partial x_j}(x)+\frac{\partial t_i}{\partial y_2}(S(x))\cdot\frac{\partial s_2}{\partial x_j}(x)+\cdots+\frac{\partial t_i}{\partial y_m}(S(x))\cdot\frac{\partial s_m}{\partial x_j}(x)\\ =&\big(\frac{\partial t_i}{\partial y_1}(S(x)),\frac{\partial t_i}{\partial y_2}(S(x)),\cdots,\frac{\partial t_i}{\partial y_m}(S(x))\big)\cdot\big(\frac{\partial s_1}{\partial x_j}(x),\frac{\partial s_2}{\partial x_j}(x),\cdots,\frac{\partial s_m}{\partial x_j}\big)\\ &\ (1\le i\le l,\ 1\le j\le n)\end{aligned}$$

で最後の形は $dF(S(x))$ の i 行と $dS(x)$ の j 列の内積をしている．したがって，

$$d[T\circ S](x)=dF(S(x))\circ dS(x) \tag{4.23}$$

が分かる．よって，$L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$: linear に対して

$$dL(x)=L,\quad (x\in\mathbb{R}^n)$$

であることに注意して，$T=T_j$，$S=L_j$ に対し (4.23) をあてがうと

$$d\Theta(x)=\sum_{j=1}^{m}c_jL_j^*(d[T_j\circ L_j](x))=\sum_{j=1}^{m}c_jL_j^*(dT_j(L_j(x)))L_j$$

がわかる．

が成立していることがわかる．なので $\Lambda_F(h_1,\ldots,h_m)$ に戻ると

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_F(h_1,\ldots,h_m)\\
\le&\mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})^{-2}\int_{\bigcap_{j=1}^m L_j^{-1}(\Omega_{h_j})}\prod_{j=1}^m f_j(T_j\circ L_j(x))^{c_j}\det\big(\sum_{j=1}^m c_jL_j^*(dT_j(L_j(x)))L_j\big)\,dx\\
=&\mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})^{-2}\int_{\bigcap_{j=1}^m L_j^{-1}(\Omega_{h_j})}\prod_{j=1}^m f_j(y_j(x))^{c_j}\det\big(d\Theta(x)\big)\,dx\quad(\because\text{definition of }\Theta)\\
\le&\mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})^{-2}\\
&\quad\times\int_{\bigcap_{j=1}^m L_j^{-1}(\Omega_{h_j})}\sup_{y_j\in\mathbb{R}^{n_j}:\Theta(x)=\sum_{j=1}^m c_jL_j^*(y_j)}\prod_{j=1}^m f_j(y_j)^{c_j}\det\big(d\Theta(x)\big)\,dx\\
&\quad(\because y_j(x)\ \text{ satisfies }\ (4.24)).
\end{aligned}
$$

よってあとは変数変換

$$x\mapsto\tilde{x}:=\Theta(x)$$

ができればよさそうである．それには

$$\Theta:\bigcap_{j=1}^m L_j^{-1}(\Omega_{h_j})\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

が単射であることを確認しておかないといけない．これは次の事実 “dF: positive definite $\Rightarrow$ F: 単射” を使うと確認できる．実際，(4.22) で確認したように各 x につき $dT_j(L_j(x))$ は positive definite であった．よって (4.6) の注意から $d\Theta(x)$: positive definite で特に Θ は単射であることがわかる．

何がともあれ，これで安心して変数変換ができ

$$
\begin{aligned}
\Lambda_F(h_1,\ldots,h_m)\le\mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{L},\mathbf{c})^{-2}&\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{y_j\in\mathbb{R}^{n_j}:\tilde{x}=\sum_{j=1}^m c_jL_j^*(y_j)}\prod_{j=1}^m f_j(y_j)^{c_j}\,d\tilde{x}\\
=:\mathrm{RBL}_{\mathbf{g}}&(\mathbf{L},\mathbf{c})^{-2}\Lambda_R(f_1,\ldots,f_m).
\end{aligned}
$$

コメント

- ここで用いた mass transport method のベーシックなアイデアは Barthe のひとつ前の論文 [4] にある．というのも [4] では Theorem 4.2 を rank-1 の場合，つまり $n_1 = \cdots = n_m = 1$ の特別な場合に証明しており，またそこでは証明が幾分シンプルである．

- Barthe-Cordero-Erausquin[7] において，rank-1 の reverse Brascamp-Lieb 不等式の別証明が heat flow を用いて証明されている．

- 一般の場合の reverse Brascamp-Lieb 不等式の heat flow による証明は [8] の Theorem 4 にある．

5 Mass transportation method を用いた rank-1 Brascamp-Lieb 不等式の証明

Section 4 での一般の場合の reverse Brascamp–Lieb 不等式の証明は，2 次形式など色々と複雑であったが，rank-1 の場合に限れば，それらの技術的な困難はなくなり，証明のアイデアが見やすくなる．そこで，Barthe [4] あるいは [15] に基づき，mass transportation method を用いた rank-1 Brascamp-Lieb 不等式の証明を以下に与える．

5.1 Forward rank-1 Brascamp-Lieb via mass transport method

Geometric BL data つまり

$$\sum_{j=1}^{m} c_j |u_j\rangle\langle u_j| = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

を満たす $c_j \in (0,\infty)$ と $u_j \in \mathbb{S}^{n-1}$ を考え，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(\langle u_j, x\rangle)^{c_j}\, dx \le \prod_{j=1}^{m} \Big(\int_{\mathbb{R}} f_j \Big)^{c_j} \tag{5.1}$$

を示そう．

次は線形代数だが，大事な lemma になる．

Lemma 5.1. $c_j \in (0,\infty)$ と $u_j \in \mathbb{S}^{n-1}$ は例の如く，*geometric* つまり

$$\sum_{j=1}^{m} c_j |u_j\rangle\langle u_j| = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

を満たすとする．このとき，

1. $t_1, \ldots, t_m > 0$ に対し，

$$\prod_{j=1}^{m} t_j^{c_j} \le \det\Big(\sum_{j=1}^{m} t_j c_j |u_j\rangle\langle u_j| \Big) \tag{5.2}$$

が成立する．

2. $\tau_1,\dots,\tau_m\in\mathbb{R}$ に対し，

$$\Big|\sum_{j=1}^m \tau_j c_j u_j\Big|^2 \le \sum_{j=1}^m c_j\tau_j^2 \tag{5.3}$$

という，ある種のピタゴラスの定理が成立する．

Proof. (5.2) は，線形代数の Cauchy–Binet formula を用いて証明できる．その証明は全く自明ではないが，[5] にあるので，ここでは省略する．(5.3) のアイデアを以下に与えておく．実は *Geometric* 条件のおかげで

$$\sum_{j=1}^m c_j|\tau_j|^2-\Big|\sum_{j=1}^m \tau_j c_j u_j\Big|^2=\sum_{j=1}^m c_j|\langle u_j, w_j-\overline{w}\rangle|^2,\quad w_j:=\tau_j u_j,\quad \overline{w}:=\sum_{j=1}^m c_j\tau_j u_j \tag{5.4}$$

が成立することを確認できる（右辺を展開してみるとよい）．したがって $c_j>0$ なので

$$\sum_{j=1}^m c_j|\tau_j|^2-\Big|\sum_{j=1}^m \tau_j c_j u_j\Big|^2\ge 0$$

となり (5.3) がわかる．なお，この identity には，heat flow による証明でも使われる大事な補題である． □

f_j は正規化を踏まえ $\int_{\mathbb{R}} f_j=1$ としてよい．$g_*(t):=e^{-\pi t^2}$ とすると $\int g_*=1$ なので，Theorem 4.9 の Brenier mapping を念頭に，各 j につき $T_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$\int_{-\infty}^t f_j(s)\,ds=\int_{-\infty}^{T_j(t)} g_*(s)\,ds \tag{5.5}$$

を満たすようにとる．すると両辺を微分すると，微積分の基本定理から

$$f_j(t)=g_*(T_j(t))T_j'(t),\quad t\in\mathbb{R} \tag{5.6}$$

が従う（ここで Brenier mapping の regularity 等の詳細は無視して議論をしている[6]）．このとき，$f_j, g_*>0$ より (5.6) から $T_j'>0$ が成立していること

[6]状況が特殊なので，Brenier mapping の regularity は比較的基本的な方法で得ることができる．$\int_{-\infty}^{\cdot} g_*(s)ds$ の逆写像は C^∞ である．f は可積分なので，絶対連続であり，特に $\int_{-\infty}^{\cdot} f(s)ds$ は微分可能である．よって，ほとんどいたるところ T_j は微分可能である．

に注意．すると，(5.1) の左辺は

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j(\langle u_j,x\rangle)^{c_j}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m g_*(T_j(\langle u_j,x\rangle))^{c_j}\cdot T_j'(\langle u_j,x\rangle)^{c_j}\,dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\pi\sum_{j=1}^m c_j|T_j(\langle u_j,x\rangle)|^2}\prod_{j=1}^m T_j'(\langle u_j,x\rangle)^{c_j}\,dx.$$

ここでまず，荷重のファクターに対して (5.2) の不等式を $t_j=T_j'(\langle u_j,x\rangle)$ で適用し

$$\prod_{j=1}^m T_j'(\langle u_j,x\rangle)^{c_j}\le\det\big(\sum_{j=1}^m c_jT_j'(\langle u_j,x\rangle)|u_j\rangle\langle u_j|\big)$$

を得るがここから，適切な変数変換を導く写像が作れそうである．つまり，

$$d\Theta(x)=\sum_{j=1}^m c_jT_j'(\langle u_j,x\rangle)|u_j\rangle\langle u_j| \tag{5.7}$$

ように $\Theta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を選べばよいであろう．それには $L_j=\langle u_j|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ としたとき $L_j^*=|u_j\rangle:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ で

$$\sum_{j=1}^m c_jT_j'(\langle u_j,x\rangle)|u_j\rangle\langle u_j|=\sum_{j=1}^m c_jL_j^*(T_j'(L_j(x)))L_j$$

となっていることに気づけば，

$$\Theta(x):=\sum_{j=1}^m c_jL_j^*(T_j\circ L_j(x))=\sum_{j=1}^m c_jT_j(\langle u_j,x\rangle)u_j$$

ととることで (5.7) を達成できる（(4.24) の上の方の計算と同じ）．つまり，これらの話から

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j(\langle u_j,x\rangle)^{c_j}\,dx\le\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\pi\sum_{j=1}^m c_j|T_j(\langle u_j,x\rangle)|^2}\det\left(d\Theta(x)\right)dx$$

がわかる．さらに，指数関数の肩にある量について u_j に対するピタゴラス (5.3) を $\tau_j=T_j(\langle u_j,x\rangle)$ で用いると

$$\sum_{j=1}^m c_j|T_j(\langle u_j,x\rangle)|^2\ge\big|\sum_{j=1}^m c_jT_j(\langle u_j,x\rangle)u_j\big|^2=|\Theta(x)|^2$$

であることがわかるので,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle u_j, x\rangle)^{c_j}\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\Theta(x)|^2} \det\left(d\Theta(x)\right) dx$$

である．あとは，$\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が単射であることなどを確認して変数変換すれば

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle u_j, x\rangle)^{c_j}\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\Theta(x)|^2} \det\left(d\Theta(x)\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|y|^2}\, dy = 1$$

として (5.1) が従う．

5.2 Reverse rank-1 Brascamp-Lieb via mass transport method

$L_j = \langle u_j|$ に対し，$L_j^* = |u_j\rangle : \mathbb{R} \ni \mu \mapsto \mu u_j \in \mathbb{R}^n$ であったので，目標は

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{y_j \in \mathbb{R} : x = \sum_{j=1}^m c_j y_j u_j} \prod_{j=1}^m f_j(y_j)^{c_j}\, dx \ge \prod_{j=1}^m \Big(\int_{\mathbb{R}} f_j \Big)^{c_j} \tag{5.8}$$

を示すことになる．再び正規化して $\int_{\mathbb{R}} f_j = 1$ とする．そこで今度は (5.5) とは逆むきの $S_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ つまり

$$\int_{-\infty}^t g_*(s)\, ds = \int_{-\infty}^{S_j(t)} f_j(s)\, ds$$

を満たすようにとる．すると両辺を微分して

$$g_*(t) = f_j(S_j(t)) \cdot S_j'(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.9}$$

が成立する.[7] これを踏まえ変数変換を試みるがまず，geometric condition

$$\sum_{j=1}^m c_j |u_j\rangle\langle u_j| = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

---

[7] 状況が特殊なので，Brenier mapping の regularity は比較的基本的な方法で得ることができる．f_j の代わりに，$(1-\varepsilon)f_j + g_*$ を考えることにして，ほとんどいたるところ $f_j > 0$ を仮定してよい．すると $\int_{-\infty}^{\cdot} f_j(s)ds$ は狭義単調増加でほとんどいたるところ微分が存在する．よって，S_j もほとんどいたるところ微分可能である．

より

$$|z|^2 = \langle z, \big(\sum_{j=1}^m c_j |u_j\rangle\langle u_j|\big) z\rangle = \sum_{j=1}^m c_j |\langle u_j, z\rangle|^2, \quad z \in \mathbb{R}^n$$

が成立していることに注意して,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|z|^2}\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \sum_{j=1}^m c_j |\langle u_j, z\rangle|^2}\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \big(e^{-\pi|\langle u_j, z\rangle|^2}\big)^{c_j}\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_*(\langle u_j, z\rangle)^{c_j}\,dz. \end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(S_j(\langle u_j, z\rangle))^{c_j} \cdot S_j'(\langle u_j, z\rangle)^{c_j}\,dz \quad (\because (5.9)) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \big(\prod_{j=1}^m f_j(S_j(\langle u_j, z\rangle))^{c_j}\big) \cdot \det\big(\sum_{j=1}^m c_j S_j'(\langle u_j, z\rangle) |u_j\rangle\langle u_j|\big)\,dz \quad (\because (5.2)). \end{aligned}$$

よって前回のように $\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$d\Theta(z) = \sum_{j=1}^m c_j S_j'(\langle u_j, z\rangle) |u_j\rangle\langle u_j|$$

となるように，つまり

$$\Theta(z) = \sum_{j=1}^m c_j S_j(\langle u_j, z\rangle) u_j$$

にとる．するとこのとき，$y_j = S_j(\langle u_j, z\rangle)$ に対して reverse Brascamp–Lieb 不等式の条件

$$\Theta(z) = \sum_{j=1}^m c_j y_j u_j$$

が成立するので,

$$\prod_{j=1}^m f_j(S_j(\langle u_j, z\rangle))^{c_j} \leq \sup_{y_j \in \mathbb{R} : \Theta(z) = \sum_{j=1}^m c_j y_j u_j} \prod_{j=1}^m f_j(y_j)^{c_j}.$$

これを踏まえて，最終的に $\Theta(z)=x$ で変数変換をして

$$
\begin{aligned}
1 &\le \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\prod_{j=1}^m f_j(S_j(\langle u_j, z\rangle))^{c_j}\Big) \cdot \det\Big(\sum_{j=1}^m c_j S_j'(\langle u_j, z\rangle)|u_j\rangle\langle u_j|\Big)\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\prod_{j=1}^m f_j(S_j(\langle u_j, z\rangle))^{c_j}\Big) \cdot \det\big(d\Theta(z)\big)\, dz \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{y_j\in\mathbb{R}:\Theta(z)=\sum_{j=1}^m c_j y_j u_j} \Big(\prod_{j=1}^m f_j(y_j)^{c_j}\Big) \cdot \det\big(d\Theta(z)\big)\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{y_j\in\mathbb{R}:x=\sum_{j=1}^m c_j y_j u_j} \prod_{j=1}^m f_j(y_j)^{c_j}\, dx.
\end{aligned}
$$

5.3 Rank-1 BL と Young の不等式のより明示的な関係

rank-1 BL の詳細に立ち入ったので，オマケとして rank-1 BL がシャープな Young の不等式を含んでいることを見ておこう．なお以下では 1 次元の Young の不等式のみを考えるが（というのも rank-1 BL は高次元の Young の不等式を含まないので），高次元のシャープな Young の不等式は 1 次元のものから従う（Beckner [10] の tensor trick）．なお Bennett-Bez [11] でシャープな Young の不等式の高次元かつ直接的な heat flow による証明がある．

Claim 5.2. Rank-1 *Brascamp-Lieb* は特別な場合として，シャープな Young の不等式: $\sum_{j=1}^3 \frac{1}{p_j} = 2$, and $p_1, p_2, p_3 \ge 1$ に対し，

$$
\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x-y)^{\frac{1}{p_1}} f_2(x)^{\frac{1}{p_2}} f_3(y)^{\frac{1}{p_3}}\, dxdy \le C_{\vec{p}} \prod_{j=1}^3 \Big(\int_{\mathbb{R}} f_j\Big)^{\frac{1}{p_j}} \tag{5.10}
$$

を含んでいる．ここで $C_{\vec{p}}$ は Beckner constant，正確な形は [10] 参照.

Proof. 以下の話は Barthe [6] に基づく．まず，指数 $p_1, p_2, p_3 > 1$ を fix する ($p_j = 1$ for some j の場合は $C_{\vec{p}} = 1$ なのでここでは考える必要はない)．まず，$\sum_{j=1}^3 1/p_j = 2$ より

$$
\Big(\sqrt{\frac{p_3}{p_2'}}\Big)^2 + \Big(\sqrt{\frac{p_3}{p_1'}}\Big)^2 = p_3\Big(2 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\Big) = 1
$$

が成立していることに気づく．すると $\theta \in [0, 2\pi]$ で

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{p_3}{p_2'}}, \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{p_3}{p_1'}}$$

を満たすものがとれる．これを踏まえて，変数変換

$$y \mapsto \tilde{y} := \cos\theta y, \quad x \mapsto \tilde{x} := \frac{x - \cos\theta\tilde{y}}{\sin\theta}$$

を施すと[8]

$$\begin{aligned}
&\text{L.H.S of (5.10)}\\
=&C_\theta \int_{\mathbb{R}^2} f_1(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(\cos\theta\tilde{x} - \sin\theta\tilde{y}))^{\frac{1}{p_1}} f_2(\sin\theta\tilde{x} + \cos\theta\tilde{y})^{\frac{1}{p_2}} f_3(\frac{\tilde{y}}{\cos\theta})^{\frac{1}{p_3}}\, dxdy\\
=:&C_\theta \int_{\mathbb{R}^2} g_1(\cos\theta\tilde{x} - \sin\theta\tilde{y})^{\frac{1}{p_1}} g_2(\sin\theta\tilde{x} + \cos\theta\tilde{y})^{\frac{1}{p_2}} g_3(\tilde{y})^{\frac{1}{p_3}}\, dxdy,
\end{aligned}$$

where

$$g_1 := f_1(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot), \quad g_2 := f_2, \quad g_3 := f_3(\frac{\cdot}{\cos\theta}).$$

そこで R_θ を θ-回転行列つまり

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\text{L.H.S of (5.10)} = C_\theta \int_{\mathbb{R}^2} g_1(\langle e_1, R_\theta(\tilde{x}, \tilde{y})\rangle)^{\frac{1}{p_1}} g_2(\langle e_2, R_\theta(\tilde{x}, \tilde{y})\rangle)^{\frac{1}{p_2}} g_3(\tilde{y})^{\frac{1}{p_3}}\, dxdy.$$

よってさらに

$$R_\theta(\tilde{x}, \tilde{y}) = (u_1, u_2) \text{ i.e. } (\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}(u_1, u_2)$$

---

[8] このとき

$$x - y = \sin\theta\tilde{x} + \cos\theta\tilde{y} - \frac{\tilde{y}}{\cos\theta} = \sin\theta\tilde{x} + \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos\theta}\tilde{y} = \sin\theta\tilde{x} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\tilde{y} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}(\cos\theta\tilde{x} - \sin\theta\tilde{y})$$

で変換して $(u=(u_1,u_2))$

$$\begin{aligned}&\text{L.H.S of (5.10)}\\ =&C_\theta \int_{\mathbb{R}^2} g_1(\langle e_1,u\rangle)^{\frac{1}{p_1}} g_2(\langle e_2,u\rangle)^{\frac{1}{p_2}} g_3(\langle -\sin\theta e_1+\cos\theta e_2,u\rangle)^{\frac{1}{p_3}}\,du_1du_2.\end{aligned}$$

つまり

$$a_1:=e_1,\ a_2:=e_2,\ a_3:=-\sin\theta e_1+\cos\theta e_2$$

とおいて

$$\text{L.H.S of (5.10)}=C_\theta \int_{\mathbb{R}^2} g_1(\langle a_1,u\rangle)^{\frac{1}{p_1}} g_2(\langle a_2,u\rangle)^{\frac{1}{p_2}} g_3(\langle a_3,u\rangle)^{\frac{1}{p_3}}\,du$$

となり rank-1 BL に帰着する．なお，$a_3\in\mathbb{S}^1$ は e_2 軸からさらに θ 回転させたベクトルである． $\square$

6　謝辞

本稿は，2021 年に中央大学で行った集中講義の内容をまとめたものである．このような機会をいただいた，中央大学の澤野嘉宏先生，津川光太郎先生，松山登喜夫先生に，改めて感謝の意を記したい．また，本研究は科研費 (19K03546, 19H01796, 21K13806) の助成を受けたものである．

著者，大阪大学　中村昌平，メールアドレス:srmkn@math.sci.osaka-u.ac.jp
（５６０－００４３，大阪府豊中市待兼山町１－１，大阪大学理学部数学科）

References

[1] K. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*, In: Lindenstrauss, J., Milman, V.D. (eds.) Geometric Aspects of Functional Analysis. Springer Lecture Notes in Math., vol. 1376, pp. 251–260. Springer, Berlin (1989)

[2] K. Ball, *An elementary introduction to modern convex geometry*, Flavor of geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **31**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, 1–58.

[3] Z. M. Balogh, A. Kristály, *Equality in Borell–Brascamp–Lieb inequalities on curved spaces*, Adv. Math, **339** (2018), 453–494.

[4] F. Barthe, *Inégalités de Brascamp-Lieb et convexité*, C. R. Acad. Sci. Paris, **324** (1997), 885–888.

[5] F. Barthe, *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*, Invent. math. **134** (1998), 335–361.

[6] F. Barthe, *Optimal Young's inequality and its converse: a simple proof*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), 234–242.

[7] F. Barthe, D Cordero-Erausquin, *Inverse Brascamp-Lieb inequalities along the Heat equation*, In: Geometric Aspects of Functional Analysis. Lecture Notes in Math., vol 1850, pp. 65–71. Springer, Berlin (2004).

[8] F. Barthe, N. Huet, *On Gaussian Brunn-Minkowski inequalities*, Studia. Math. **191** (2009), 283-304.

[9] F. Barthe, P. Wolff, *Positive gaussian kernels also have gaussian minimizers*, arXiv in https://arxiv.org/abs/1805.02455v1.

[10] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. Math. **102** (1975), 159–182.

[11] J. Bennett, N. Bez, *Closure properties of solutions to heat inequalities*, J. Geom. Anal. **19** (2009), 584–600.

[12] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, T. Tao, *The Brascamp–Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals*, Geom. Funct. Anal. **17** (2007), 1343–1415.

[13] N. Bez, *Recent development in the heat-flow semigroup interpolationmethod*, Mini-course given at the International Workshop on Fundamental Problems in Mathematics and Theoretical Physics (Waseda Univewrsity).

[14] L. J. Böröczky, D. Hug, *Isotropic measures and stronger forms of the reverse isoperimetric inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), 6987–7019.

[15] L. J. Böröczky, F. Fodor, D. Hug, *Strengthened volume inequalities for L^p zonoids of even isotropic measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), 505–548.

[16] K.M. Ball, K.J. Böröczky, *Stability of the Prékopa–Leindler inequality*, Mathematika **56** (2010), 339–356.

[17] K.M. Ball, K.J. Böróczky, *Stability of some versions of the Prékopa–Leindler inequality*, Monatsh. Math. **163** (2011), 1–14.

[18] H. J. Brascamp, E. H. Lieb, *Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*, Adv. Math. **20** (1976), 151–173.

[19] Y. Brenier, *Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305** (1987), 805–808.

[20] Y. Brenier. *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*, Comm. Pure Appl. Math, **44** (1991), 375–417.

[21] D. Bucur, I. Fragalá, *Lower bounds for the Prékopa–Leindler deficit by some distances modulo translations*, J. Convex Anal. *21* (2014), 289–305.

[22] L. Caffarelli, *The regularity of mappings with a convex potential*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1992), 99–104.

[23] E. Carlen, E. Lieb, M. Loss, *A sharp analog of Young's inequality on $\mathbb{S}^N$ and related entropy inequalities*, J. Geom. Anal. **14** (2004), 487–520.

[24] D. Cordero-Erausquin, *Inégalité de Prékopa-Leindler sur la sphére*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. **329** (1999), 789–792.

[25] S. Dubuc, *Criteres de convexite et inegalites integrales*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **27** (1977), 135–165.

[26] E.H. Lieb, *Gaussian kernels have only Gaussian maximizers*, Inventiones Mathematicae, **102** (1990), 179–208.

[27] E. Lutwak, D. Yang, G. Zhang, *Volume inequalities for subspaces of L^p*, J. Differential Geom. **68** (2004), 159–184.

[28] E. Lutwak, D. Yang, G. Zhang, *A volume inequality for polar bodies*, J. Differential Geom. **84** (2010), 163–178.

[29] R. J. McCann. *A Convexity Theory for Interacting Gases and Equilibrium Crystals*, PhD thesis, Princeton University, 1994.

[30] R. J. McCann. *Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps*, Duke Math. Journal, **80** (1995), 309–323.