

Value at Risk の拡張とその応用

A. M. モリナ バレート 石 村 直 之

On an Extension of Value at Risk and Its Applications

Andres Mauricio MOLINA BARRETO and Naoyuki ISHIMURA

In the quantitative risk management, the estimation of risks plays an important step, and for this purpose, various kind of risk measures have been introduced so far. Value at Risk (VaR), which is defined normally on single random variable, is one of well employed risk measures. In this report, a new definition of copula-based conditional Value at Risk (CCVaR) is introduced, which is defined on multivariate random variables with copulas and real-valued. It is recognized that copula functions provide flexible tools to model possible nonlinear relations among several risk factors; the combination of VaR and copula gives a natural procedure to estimate risk of multivariate risk factors in a sense. We show several properties of this new copula-based risk measure. Empirical studies are also implemented, which verifies the usefulness of our CcVaR.

Main contents of the present article are a summary of the part of the thesis by Andres Mauricio Molina Barreto (2020).

Key Words: Value at Risk, Conditional Value at Risk, copula, risk management

I はじめに

リスク管理において、リスクの計量は極めて重要な要素である。リスク計量が現実をうまく記述できなければ、その管理もうまく行えない。そのリスクの計量のため、いくつかのリスク指標が考案されてきた。リスクを単一の実数値で判断しようとするものである。これらリスク指標のうちで、実務においてもよく用いられる代表例として Value at Risk (VaR) がある (II.1 参照)。VaR は、その意味がとらえやすいことや、その計量が比較的可能なことなどから、リスク指標といえまず第一に挙げられる指標となっている。しかしながら、VaR はリスク指標として望ましいとされる coherent 性 (III.1 参照) を満たさないことも知られている。そのため、conditional VaR やその他いくつかの VaR を改良した指標が導入されている。

ところで、VaR は主に1つの確率変数に対して定義される実数値であり、2つ以上の確率変数に対してはそのままでは適用が難しい。一般に2つ以上のリスク変量を考察する際は、各々のリスク変量間の関係が問題となる。通常は、計算や理論を進める際の容易さから独立性を仮定することが多い。しかしながら現実では、必ずしも独立とは限らない非線形な関係も多い。これら非線形な関係を記述する道具として、コピュラ (copula) 関数がよく用いられている (II.2 参照)。そこで、2つ以上の確率変数からなるポートフォリオ問題において、コピュラを用いて VaR を考えることは自然な発想となる。実際に、この方向でのいくつかの指標が考案されているが、取り扱いにはやや難があるものが多いようである。

本論文では、コピュラを用いた新しい conditional VaR (CCVaR) を導入し、その性質や、独立性との比較を調べ、さらに実際のデータを用いて数値的に検証する。新しい CcVaR は、2つの確率変数のポートフォリオ問題に対して大変うまく振舞うことが検証される。特に、独立性との関係では、独立の場合と比較して、より危険性を示すコピュラと、そうでないコピュラの存在を実証する。計算が比較的容易な指標となっており、リスク管理の実務においても用いられることが期待される。

なお本論文は、第1著者 Andres Mauricio Molina Barreto の学位論文 “Estimation of Value at Risk and Conditional Value at Risk” (2020) の一部を中心にまとめたものである。ただし、本論文第IV節はデータの新しい組合せに対して改めて計算した内容である。また、参考論文は少数にとどめた。詳しくは Molina Barreto (2020) あるいは Molina Barreto and Ishimura (2021) を参照いただきたい。

II 基礎概念および既存結果

1 Value at Risk

確率変数 X に対して、信頼度 β ($0 \leq \beta < 1$) Value at Risk (VaR_β) とは

$$\text{VaR}_\beta(X) = F_X^{(-1)}(\beta) = \inf\{u | F_X(u) \geq \beta\}$$

により定められる実数値である。ただし、簡単のため確率変数 X は連続とし、また、 $F_X(x) = P(X \leq x)$ は分布関数を表す。

この定義で分かるように VaR は簡単にかつ見通しよく定められるため、実務においても多く用いられ重要な役割を担っている。しかしながら、リスク指標として望ましい重要な性質を完全には満たさないことも知られている。その改善のため、例えば次の conditional Value at Risk (CVaR_β) が導入されている。

$$\text{CVaR}_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 \text{VaR}_t(X) dt = \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 F_X^{(-1)}(t) dt$$

本論文の目標は、コピュラを用いてこの CVaR_β を複数個の確率変数に対して、よりよく拡張することである。注意しておくが、 VaR は一般には通常 1 つの確率変数に対して定められる。一方でコピュラでは 2 つ以上の確率変数を考え、さらにその確率変数間の必ずしも独立とは限らない関係性を考慮する。よって、複数個の確率変数に関して VaR を定めようとするとき、コピュラ関数を用いるのはむしろ自然な発想である。実際、既にいくつかの定義が知られているが、本論文では見通しよくかつ計算に簡便な新しい定義を提唱する。

2 コピュラ

簡単のため 2 変数で考える。平面上の単位正方形 $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ の上で定められ、単位区間 $I = [0, 1]$ に値をとる連続関数 $C(u, v)$ がコピュラであるとは、次の条件を満たすときにいう。

(1) 任意の $(u, v) \in I^2$ に対して

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0, \quad C(u, 1) = u, \quad C(1, v) = v$$

(2) 任意の $(u_i, v_i) \in I^2 (i = 1, 2)$, ただし $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$ に対して

$$C(u_1, v_1) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_2, v_2) \geq 0$$

コピュラの重要性と簡便性は、次の Sklar の定理に基づく。簡単のため 2 変数の場合に述べておく。

Sklar の定理 周辺分布が $F_{X_1}(x)$ および $F_{X_2}(y)$ である同時分布 $H(x, y)$, すなわち

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y) = F_{X_2}(y), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y) = F_{X_1}(x)$$

に対して、コピュラ $C(u, v)$ がただ 1 つ定まり

$$H(x, y) = C(F_{X_1}(x), F_{X_2}(y))$$

が成り立つ。

逆に、コピュラ $C(u, v)$, および分布関数 $F_{X_1}(x), F_{X_2}(y)$ を任意にとれば、上記の $H(x, y) = C(F_{X_1}(x), F_{X_2}(y))$ は、周辺分布が $F_{X_1}(x), F_{X_2}(y)$ である同時分布関数を表す。

すなわち、2 つの確率変数間の関係は、それぞれの分布関数とコピュラによって完全に記

述されるのである。例えば、確率変数 X, Y が独立であることは、このコピュラが

$$C(u, v) = uv$$

であることに他ならない。

コピュラ関数は、接合関数とも訳されており、上で述べたように、まさにリスク変量間の接合関係を問題とするものである。

3 既存の試み

リスク変数が複数個以上あるとき、それらリスク変数間の関係を考慮したリスク指標はより望ましいことが想像される。一方で、金融数理や保険数理においては、一般にリスク変数間は独立性を仮定することが多い。現実には、リスク変数間の関係は必ずしも独立とは限らず、非線形な関係の場合もある。そこでコピュラを用いて、それら非線形関係を表そうという発想になる。ただし、容易に想像されるように単純な一般化ではうまくいかない。例えば、確率変数の組 $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ に対して

$$\begin{aligned} \text{CCVaR}'_{\beta}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{\beta} \min_{V_{\beta}} \int_0^u \int_0^v (F_{X_1}^{(-1)}(p) + F_{X_2}^{(-1)}(q)) dC(p, q), \\ V_{\beta} &= \{(u, v) | C(u, v) = \beta\} \end{aligned}$$

などは、いくつかのよき性質を満たすが個別の計算には難があるようである。詳しくは Molina Barreto (2020) を参照されたい。

次の節では、我々のコピュラを用いた新しい VaR を導入し、いくつかの望ましい性質が満たされていることを示す。

III コピュラを用いた新しい VaR

1 新しい CCVaR とその性質

確率変数の組 $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ に対して

$$\begin{aligned} (*) \quad \text{CCVaR}_{\beta}(\mathbf{X}) &= \frac{\iint_{U_{\beta}} (\lambda F_{X_1}^{(-1)}(u) + (1 - \lambda) F_{X_2}^{(-1)}(v)) dC(u, v)}{\iint_{U_{\beta}} dC(u, v)}, \\ U_{\beta} &= \{(u, v) | C(u, v) \geq \beta\} \end{aligned}$$

とおく。ただし、コピュラ C は

$$P(X_1 \leq x, X_2 \leq y) = C(F_{X_1}(x), F_{X_2}(y))$$

により定められ, また, $0 < \lambda < 1$ はポートフォリオの重みである。

このように定められた CCVaR は次の性質を満たす。

- (i) $\text{CCVaR}_\beta(\mathbf{0}) = 0$
- (ii) $\text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X} + k\mathbf{e}) = \text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X}) + k(k \in \mathbf{R}, \mathbf{e} = (1, 1))$
- (iii) \mathbf{X}_1 の各成分が \mathbf{X}_2 の各成分より stochastic order により小さければ

$$\text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X}_1) \leq \text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X}_2)$$

- (iv) $\text{CCVaR}_\beta(s\mathbf{X}) = s\text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X})(s > 0)$
- (v) $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ が連続で対応する各成分が独立ならば

$$\text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) \leq \text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X}_1) + \text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X}_2)$$

ただし, 確率変数 X_1 が stochastic order により確率変数 X_2 より小さいとは

$$P(X_1 > t) \leq P(X_2 > t) \quad t \in \mathbf{R}$$

が満たされるときと定める。

この (i)–(v) の性質は, (iii)(v) における仮定なしにすべて成立する場合に, そのリスク指標は coherent であると呼ばれる。リスク指標が満たすべき望ましい性質として知られている。

2 Archimedes コピュラの場合

コピュラの重要な族として Archimedes コピュラがよく用いられている。これは, generator と呼ばれる関数 φ によって決まるコピュラである。単調減少かつ凸である関数 $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ は $\varphi(0) = 1$ を満たすとする。関数 φ の拡張された逆関数を $\varphi^{(-1)}$ とする。すなわち, $\varphi^{(-1)}$ の定義域は $[0, \infty]$ であり値域は \mathbf{I} , さらに

$$\varphi^{(-1)}(s) = \begin{cases} \varphi^{-1}(s) & (0 \leq s \leq \varphi(0)) \\ 0 & (\varphi(0) \leq s \leq \infty) \end{cases}$$

である。このとき

$$C(u, v) = \varphi^{(-1)}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

によって定められる関数はコピュラの性質を満たし, コピュラを与える。これを, generator φ の Archimedes コピュラと呼ぶ。

例えば $\varphi(t) = -\log t$ のときは, $C(u, v) = uv$ と独立のコピュラを導く。

定理 確率変数の組 $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ に対するコピュラが, generator φ の Archimedes コピュラである場合, (*) で定められた CCVaR は

$$\text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X}) = \frac{\int_\beta^1 (\lambda F_{X_1}^{(-1)}(u) + (1-\lambda) F_{X_2}^{(-1)}(v)) \left(1 - \frac{\varphi'(t)}{\varphi'(\beta)}\right) dt}{1 - \beta + \frac{\varphi(\beta)}{\varphi'(\beta)}}$$

により与えられる。

証明は Molina Barreto (2020) あるいは Molina Barreto and Ishimura (2021) を参照されたい。特に確率変数の組 $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ の成分が独立のとき, これは

$$\text{MCVaR}_\beta(\mathbf{X}) = \frac{\int_\beta^1 (\lambda F_{X_1}^{(-1)}(u) + (1-\lambda) F_{X_2}^{(-1)}(v)) \left(1 - \frac{\beta}{t}\right) dt}{1 - \beta + \beta \log \beta}$$

となり, 既に知られている指標となる。

次の項では, 独立性の場合と独立でない場合の明確な比較を与えたい。

3 独立性との比較

以下では, generator が φ である Archimedes コピュラ C の CCVaR_β の場合と, 独立性の MCVaR_β の場合の大小関係を例示する。信頼度 β は, $\beta = 0.95$ あるいは $\beta = 0.99$ を用いるため, $\beta \approx 1$ の場合の大小関係を考える。

例 1 $\varphi = \log(t^{-1}(1 - \theta(1-t)))$ ($-1 \leq \theta < 1$) のとき, すなわち, Ali-Mikhail-Haq 族コピュラ

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$$

の場合は, $\beta \approx 1$ のとき

$$\text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X}) \leq \text{MCVaR}_\beta(\mathbf{X})$$

が成り立つ。以下同じであるが, 不等号は一般には狭義で成立する。

例 2 $\varphi = \log(1 - \theta \log t)$ ($0 < \theta \leq 1$) のとき, すなわち, Gumbel-Barnett 族コピュラ

$$C(u, v) = uv \exp(1 - \theta \log u \log v)$$

の場合は, $\beta \approx 1$ のとき

$$\text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X}) \leq \text{MCVaR}_\beta(\mathbf{X})$$

が成り立つ。

例 3 $\varphi = (-\log t)^\theta$ ($1 \leq \theta < \infty$) のとき, すなわち, Gumbel 族コピュラ

$$C(u, v) = \exp(-((-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta)^{1/\theta})$$

の場合は, $\beta \approx 1$ のとき

$$\text{CCVaR}_\beta(\mathbf{X}) \geq \text{MCVaR}_\beta(\mathbf{X})$$

が成り立つ。

どのコピュラが, 独立性より大きいあるいは小さい値を与えるかの理論的な判定条件は, まだ知られていないようである。

IV 実証研究

この節では, 実際のデータを用いた実証研究を行う。

1 データの情報

データは WSJ Markets website から FTSE 100 および Euro STOXX50 指数をダウンロードした。データは, 2017年9月9日から2022年9月2日までの総計1265個の終値である。また, ポートフォリオの重みは等分としている。

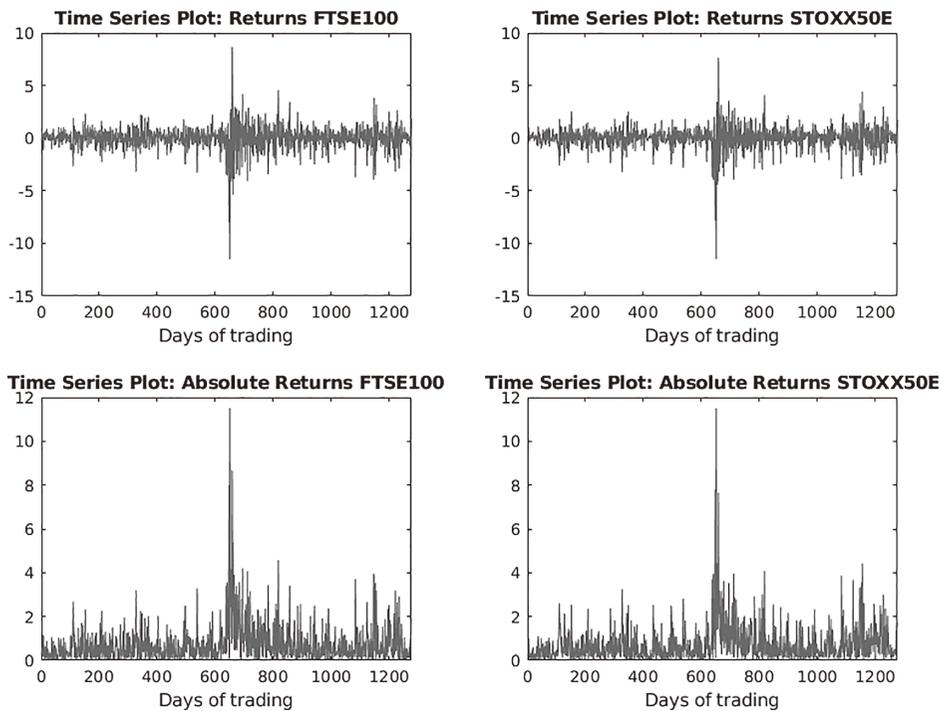
両データの日次対数収益の各種統計量, すなわち平均 (mean), 標準偏差 (standard deviation), 最小値 (minimum), 中央値 (median), 最大値 (maximum), 尖度 (kurtosis), 非対称性 (asymmetry) を次の表1にまとめている。

ポートフォリオを構成するどちらのデータに関しても, 非対称性, および尖度が大きいことが示されている。非対称性は負の値であり, これは負の収益を示唆している。尖度が大きいことは, 正規分布より裾が厚いことを示す。さらに, ボラティリティ・クラスターも認められる (図1参照)。

表 1 FTSE100 および Euro STOXX50 の
日次対数収益の統計量

| Statistics | FTSE100 | STOXX50E |
|----------------|---------|----------|
| Mean | 0.0010 | -0.0113 |
| Std. Deviation | 1.1116 | 1.0753 |
| Minimum | -8.6668 | -7.6518 |
| Median | -0.0523 | -0.0704 |
| Maximum | 11.5124 | 11.5021 |
| Kurtosis | 18.4289 | 18.7375 |
| Asymmetry | 1.1391 | 1.3201 |

図 1 FTSE100 および Euro STOXX50 の日次および絶対収益



2 周辺分布モデル

周辺分布のモデルは表 2 にまとめている。記号などの詳しい情報は Molina Barreto (2020) を参照されたい。

FTSE100 および Euro STOXX 50 のどちらの時系列に対しても、AR(1)-GARCH(1,1) モデルを用いて革新の過程として推定した。ただし初期モデルは、標準化残差として特定の 3 通りの分布、すなわち正規分布、Student-t 分布、Skewed-t 分布を用いた。

残差には自己相関も 2 乗自己相関も認められないことが分かる。また、Ljung Box テストを行い、遅れが 1 から 10 までに対しては帰無仮説が棄却されないことを結論付けた。

計算は ARMA(1,1)-GARCH(1,1) モデルおよび AR(2)-GARCH(1,1) に対しても行ったが、AR(1)-GARCH(1,1) モデルの方がデータに対してよい適合を示すことを確認した。これは、赤池情報量規準 (Akaike's Information Criteria : AIC) がより小さい値を示したからである。

表 2 FTSE100 および Euro STOXX 50 に対する AR(1)-GARCH(1-1) モデルの
パラメータ推定

| | FTSE100 | | | STOXX50E | | |
|-----------|-------------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------|
| | Normal | Student-t | Skewed-t | Normal | Student-t | Skewed-t |
| a_0 | -0.018794 (0.025432) | -0.049112 (0.020741) | -0.0117 (0.0220) | -0.065006 (0.023052) | -0.086856 (0.018831) | -0.0477 (0.0215) |
| b_0 | -0.029458 (0.030818) | 0.049491 (0.029091) | -0.0616 (0.0295) | -0.041727 (0.033017) | -0.06474 (0.030142) | -0.0814 (0.0290) |
| c_0 | 0.055674 (0.0092301) | 0.044912 (0.01478) | 0.0402 (0.0140) | 0.059705 (0.0078071) | 0.042663 (0.012728) | 0.0372 (0.0113) |
| c_1 | 0.14436 (0.016676) | 0.1482 (0.031492) | 0.1388 (0.0317) | 0.20845 (0.023966) | 0.21983 (0.042341) | 0.1967 (0.0359) |
| d_1 | 0.80441 (0.021367) | 0.82105 (0.03339) | 0.8342 (0.0357) | 0.74719 (0.023174) | 0.7755 (0.033905) | 0.7946 (0.0302) |
| λ | | | 0.1537 (0.0375) | | | 0.1742 (0.0363) |
| V | | 4.4947 (0.62123) | 4.7713 (0.6788) | | 4.0963 (0.55104) | 4.5297 (0.6112) |
| AIC | 3405 | 3289 | 3275 | 3311 | 3178 | 3161 |
| $Q^2(1)$ | 0.6236 | 0.2841 | 0.1416 | 0.4341 | 0.1461 | 0.0424 |
| $Q^2(10)$ | 0.7975 | 0.0092 | 0.6739 | 0.7359 | 0.0049 | 0.4725 |
| KS | 0* | 1.01E-05 | 0.1365 | 0* | 1.9866E-8 | 0.0439 |
| χ^2 | 0* | 0* | 0.0944 | 0* | 0* | 0.0476 |
| AD | 8.83E-05 | 4.70E-07 | 0.5560 | 3.28E-02 | 4.7022E-7 | 0.1171 |

さらに、標準化残差時系列の一様性テストとして、Kolmogorov-Smirnov (KS) テスト、Chi-square goodness-of-fit (CSG) テスト、および Anderson-Darling テストの値を導出した。変換された時系列が、一様分布に近いほどモデルの適合がよいと考えられる。

図 2、図 3 では、正規分布、Student-t 分布、Skewed-t 分布の場合の比較を示す。また図 4 では、変換された時系列の経験分布を示す。

さらに図 5 では、周辺分布が正規分布、Student-t 分布、Skewed-t 分布の場合の、一様変換されたデータの散布図の比較を示す。

図 2 FTSE100 の標準分布、Student-t 分布、Skewed-t 分布の場合の条件付分散と標準化残差

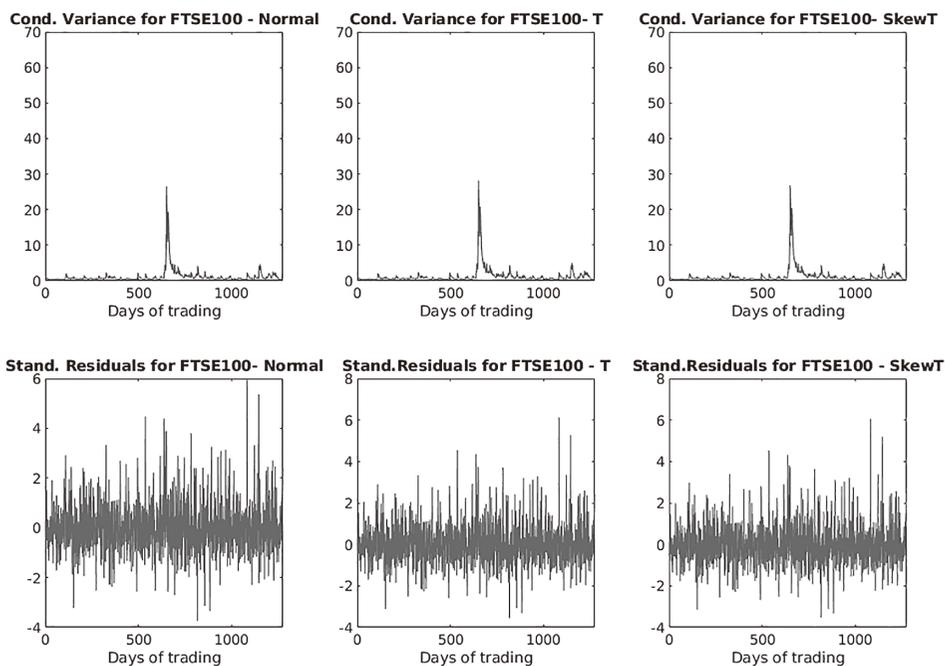


図 3 Euro STOXX50 の標準分布, Student-t 分布, Skewed-t 分布の場合の条件付分散と標準化残差

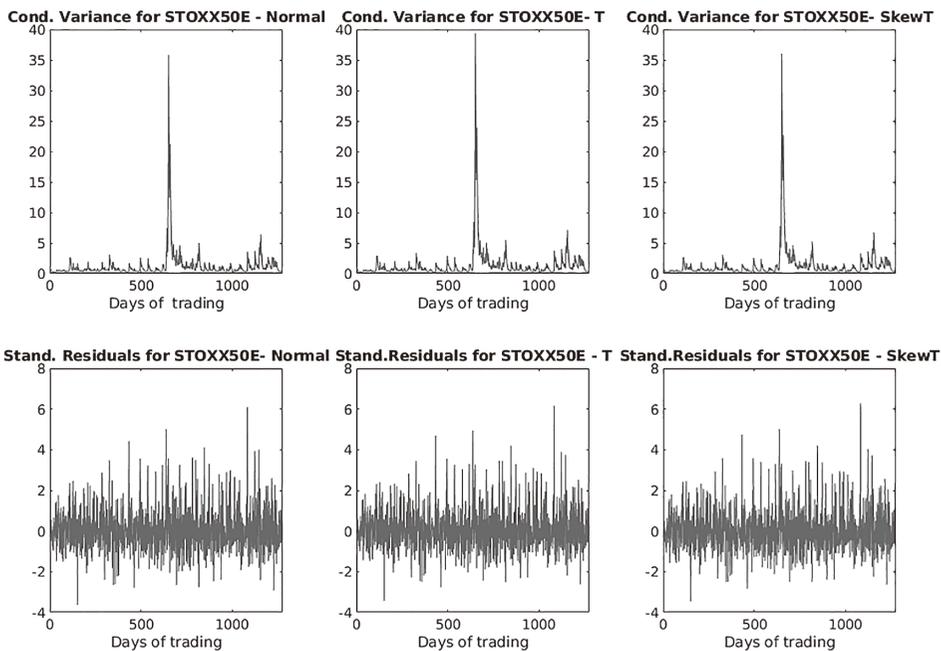


図 4 FTSE100 および Euro STOXX50 の変換された時系列の経験分布

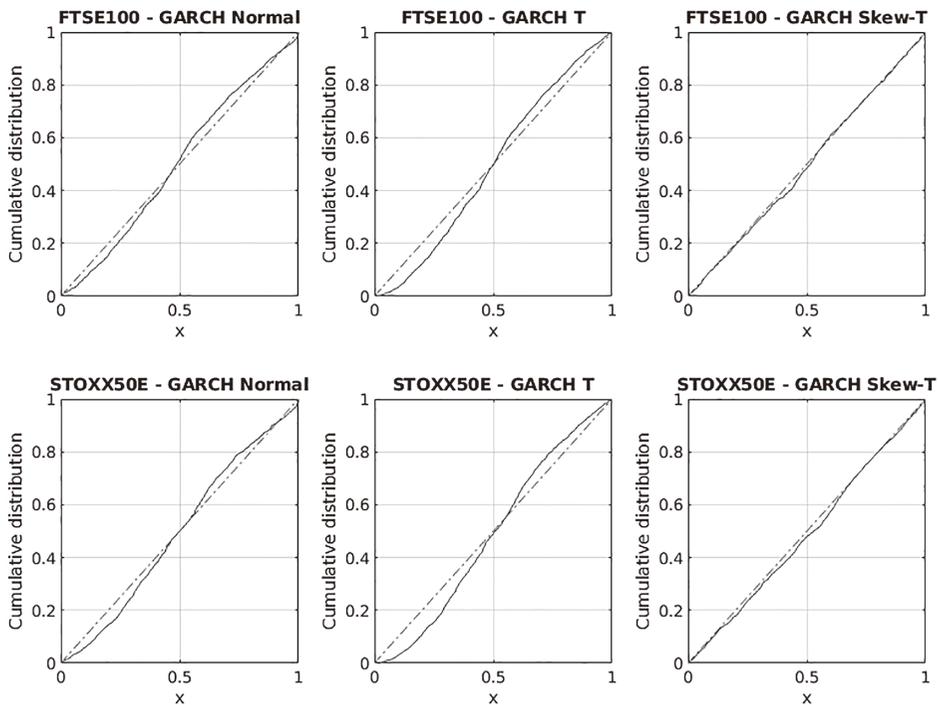
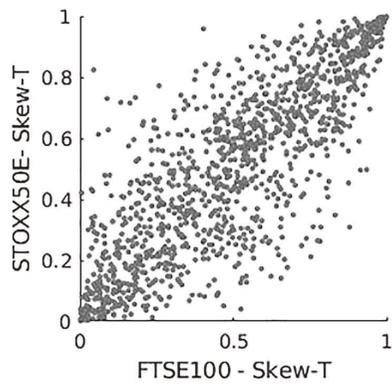
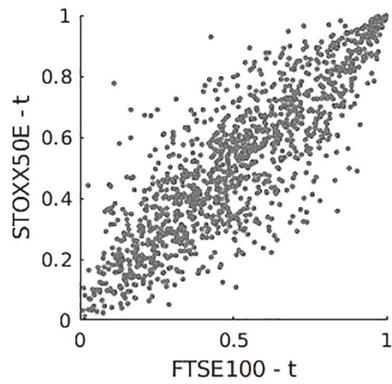
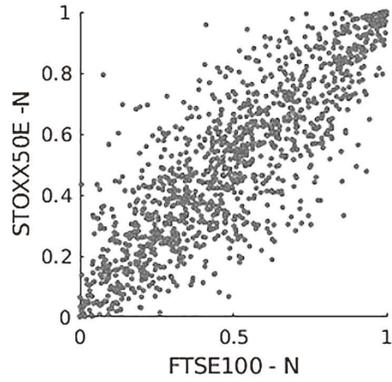


図 5 FTSE100 および Euro STOXX50
に対する周辺分布が正規分布,
Student-t 分布, Skewed-t 分布の場
合の一樣変換されたデータの散布図



3 コピュラのパラメータ推定

コピュラのパラメータ推定は、周辺分布推論関数法 (inference function for margins (IFM) method) を用いて行った。

まず、周辺分布のパラメータを、ARMA-GARCH モデルにより望ましい分布のもとで革新の過程として計算する。データが一樣なデータに変換されたならば、尤度関数を構成しコピュラのパラメータを推定する。対数尤度関数は次を用いる。

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(z_{1t}; \theta_1), F_2(z_{2t}; \theta_2)) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^2 \ln f_i(z_{jt}; \theta_j)$$

革新の過程の間には通常の独立性を仮定し、周辺分布に対して尤度関数を用いることとする。表 3 において、2 種のポートフォリオに対して、3 つの異なるコピュラの異なる周辺分布のもとでの最尤推定量を提示する。

標準誤差、最適値における対数尤度関数の値、および AIC をそれぞれ示す。いくつかのモデルの比較においては、最適なモデルとして最小の AIC をもつモデルを選ぶ。

さらに、有限個の点における推定値と経験コピュラの値の 2 乗距離を考える。例えば、経験コピュラの値が β より大きい点を考える。

表 3 FTSE 100 および Euro STOXX 50 に対する Ali-Mikhail-Haq コピュラ, Gumbel-Barnett コピュラ, Gumbel コピュラのパラメータ推定と標準誤差

| Copula | Margins | θ | Std, Error | Log-lik | AIC | $d_{0.95}$ | $d_{0.99}$ |
|-----------------|-----------|----------|------------|-----------|----------|------------|------------|
| Ali-Mikhail-Haq | Normal | 0.9985 | 6.84E-04 | -415.7783 | 833.5566 | 13.1517 | 13.6988 |
| | Student-t | 0.999 | 25.0000 | -372.3306 | 746.6612 | 13.1276 | 13.5698 |
| | Skewed-t | 0.999 | 25.0000 | -448.5727 | 899.1454 | 13.5418 | 14.2950 |
| Gumbel-Barnett | Normal | 1.06E-05 | 0.0370 | 0.0085 | 1.9829 | 14.1135 | 14.6217 |
| | Student-t | 1.00E-05 | 1.4336 | 0.0047 | 1.9906 | 14.1233 | 14.5327 |
| | Skewed-t | 1.05E-05 | 0.0315 | 0.0095 | 1.9810 | 14.3583 | 15.0670 |
| Gumbel | Normal | 2.7085 | 0.1454 | -810.4336 | 1.62E+03 | 13.2172 | 13.7962 |
| | Student-t | 3.512 | 0.0390 | -891.9042 | 1.79E+03 | 13.1560 | 13.6301 |
| | Skewed-t | 2.8068 | 0.0688 | -846.1839 | 1.69E+03 | 13.7298 | 14.5204 |

4 MCVaR と CCVaR の値の比較

MCVaR および CCVaR の値を、 $\beta = 0.95$ と $\beta = 0.99$ に対して求めた。コピュラと分位関数のそれぞれについて、定理の CCVaR の公式により MATLAB を用いて計算した。結果を表 4 に示す。

表 4 異なる周辺分布をもつ Ali-Mikhail-Haq コピュラ, Gumbel-Barnett コピュラ, Gumbel コピュラの場合の, FTSE 100 と Euro STOXX 50 のポートフォリオに対する MCVaR と CCVaR の値の比較

| | | $\beta = 0,95$ | | $\beta = 0,99$ | |
|-----------------|-----------|----------------|--------|----------------|--------|
| Copula | Margins | MCVaR | CCVaR | MCVaR | CCVaR |
| Ali-Mikhail-Haq | Normal | 2.578 | 2.5755 | 3.2585 | 3.2581 |
| | Student-t | 4.3622 | 4.3541 | 6.9453 | 6.9431 |
| | Skewed-t | 3.3209 | 3.3146 | 5.2946 | 5.2929 |
| Gumbel-Barnett | Normal | 2.578 | 2.578 | 3.2585 | 3.2585 |
| | Student-t | 4.3622 | 4.3622 | 6.9453 | 6.9453 |
| | Skewed-t | 3.3209 | 3.3209 | 5.2946 | 5.2946 |
| Gumbel | Normal | 2.578 | 2.5202 | 3.2585 | 3.21 |
| | Student-t | 4.3622 | 4.0575 | 6.9453 | 6.5194 |
| | Skewed-t | 3.3209 | 3.1602 | 5.2946 | 5.0785 |

Ali-Mikhail コピュラと Gumbel コピュラについては, 独立性の MCVaR の値が CCVaR の値より大きい, Gumbel-Barnett コピュラについては CCVaR の値が MCVaR の値を上回らない。今回の Gumbel-Barnett コピュラの計算結果では, CCVaR の値と MCVaR の値に差が認められないが, 解析的には, CCVaR の値が MCVaR の値よりわずかに大きいことが示されている。

この MCVaR と CCVaR の大小関係は, 周辺分布が正規分布, Student-t 分布, Skewed-t 分布それぞれに関して安定している。これらは解析結果ともよく一致している。詳しくは Molina Barreto (2020) を参照されたい。

V おわりに

コピュラを用いた新しい conditional Value at Risk (CCVaR) の導入を行った。これは, 主に 1 変数リスク変量に対して定義される Value at Risk (VaR) を改善し, 複数個以上のリスク変量間の非線形な関係を含めて記述できるリスク指標となっている。そのため用いられたコピュラ関数は, 多変数リスク変量間の非線形な関係を解析するのに有用な手法として知られているものである。

我々の CCVaR に関して, Archimedes コピュラの場合に計算しやすい公式を導いた。さらに, 独立性との比較のための判定条件を確立した。実際のデータを用いた実証研究によれば, この CCVaR は有効であることが確かめられた。特に独立性の場合との大小関係は, 既存の研究ではあまり触れられていない内容であり, 我々の研究の独自性として主張される。

今後の課題として, コピュラによって MCVaR と CCVaR の大小関係は異なるが, その

簡便な判定法が期待される。また、より挑戦的な問題として、2変数以上の場合への拡張がある。コピュラは、3変数以上では取り扱いの難解さが増すことが知られており、その多変数コピュラの CCVaR への適用や、扱いやすい公式の導出は求められるところである。

謝辞 科学研究費補助金 (Kakenhi) 15K04992, 20K03737, および中央大学基礎研究費の援助に感謝します。

参考文献

- Molina Barreto, A. M. (2020) “Estimation of Value at Risk and Conditional Value at Risk,” Thesis, Graduate School of Commerce, Chuo University. (中央大学学術リポジトリ (nii.ac.jp))
- Molina Barreto, A. M., and Ishimura, N. (2021) “Remarks on a copula-based conditional Value at Risk for the portfolio problem” (submitted).