

Gerber-Shiu 関数に対する優および劣関数の構成

西 岡 國 雄

A Construction of a Superior and an Inferior Function
to the Gerber-Shiu Function

Kunio NISHIOKA

Let the surplus process $\{R(t)\}$ of a company be the jump diffusion model (I.1). The company goes to ruin at a moment $\tau \equiv \{t > 0 : R(t) < 0\}$, where the surplus $R(\tau-)$ immediately prior to τ , and the deficit $|R(\tau)|$ are important quantities. Then given a suitable penalty function $W(y, z)$ of $y, z \geq 0$, the severity of ruin is measured by

$$\text{the Gerber-Shiu function } \psi(x) = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha \tau} W(R(\tau-), |R(\tau)|)],$$

in which $\alpha \geq 0$ is a discount rate.

ψ is a powerful tool in the risk theory. However it is hard to obtain ψ of an explicit form except very special claim size distributions F . Therefore for general F and W , we present a method to construct an explicit superior function Ψ_U and an explicit inferior Ψ_L with constants B_U and B_L , such that

$$\psi(x) \leq \Psi_U(x) \text{ for } 0 \leq x \leq B_U, \text{ and } \psi(x) \geq \Psi_L(x) \text{ for } 0 \leq x \leq B_L.$$

As examples of general F , we consider the followings and compute the above B_U, Ψ_U and etc. in each case:

1. a truncated exponential distribution, which imitates to contract a reinsure,
2. and, a step function type F , which imitates a practical claim size distribution,

Key Words: the jump diffusion model, a superior and an inferior function to the Gerber-Shiu function, general claim size distributions, the comparison theorem

I 序

1. 破産の深刻度

現在の risk theory は,

保険会社がすべての損益を時刻 t で精算した直後の残存資産 (surplus) $R(t)$

を記述する数学モデルに基づいて展開されている。1930年にLundberg [1930] が、そのモデルとして、Cramèr-Lundberg model (後述の (I.1) で $\sigma = 0$ としたモデル) を提案し、以来、それが risk theory での標準的なモデルとなっている。一方で、Cramèr-Lundberg model では、実務との乖離も指摘されている¹⁾。そこで我々は、次の jump diffusion model で surplus $R(t)$ を記述する：

$$\text{jump diffusion model, } R(t) = x + t + \sigma B(t) - \sum_{k=0}^{N(t)} U_k, \quad x \geq 0, \quad (\text{I.1})$$

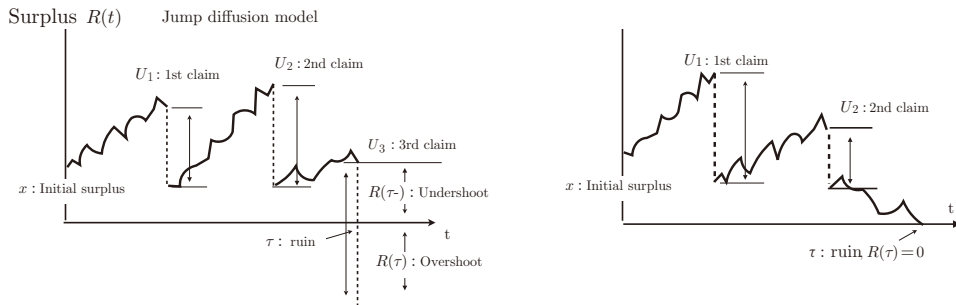
ここで

- (i) $x \geq 0$ は初期資産,
- (ii) $\sigma \geq 0$ は定数 (拡散係数) で, $\{B(t), t \geq 0\}$ は標準 Brown 運動,
- (iii) $\{N(t), t \geq 0\}$ は Poisson rate ρ の Poisson 過程,
- (iv) $\{U_k, k = 1, 2, \dots\}$ は, 正值, 独立, 同分布の確率変数列で, 共通分布測度は $\mu(dx)$ とする。また, 記述の都合上, $U_0 \equiv 0$ と約束する。
- (v) $\{N(t)\}, \{B(t)\}, \{U_k\}$ は互いに独立。平均 $\mathbf{E}[U_1] \equiv m_\mu$ の存在と *safty loading* を仮定する, *i.e.*

$$\text{safty loading, } 1 - \rho m_\mu > 0. \quad (\text{I.2})$$

注意 I.1. (I.1) を説明する。 (i) 会社の損益は、発生と同時に精算する。
 (ii) Poisson 過程 $\{N(t)\}$ が jump するランダムな時刻 (rate ρ の指数分布になる) に保険金請求があり、その k 番目の jump での支払い額が U_k である。

図 1 Jump diffusion model (I.1) での破産 path の例



1) Cramèr-Lundberg model の実務との乖離については、西岡・北村 [2023] を参照のこと。

(iii) 「保険料などの収益から、保険金支払い以外の経費を減じたもの」が、 $t + \sigma B(t)$ である。平均収益は t だが、経営リスクや景気の変動などランダムな変動 $\sigma B(t)$ が加わる。なお $\sigma = 0$ とすると、Cramèr-Lundberg model になる。◇

Surplus $R(t)$ が負になった時点

$$\tau \equiv \inf\{t > 0 : R(t) < 0\} \quad (\text{I.3})$$

で会社は破産し、次の Gerber-Shiu 関数 $\psi(x)$ で、その深刻度を定義する。

定義 I.2. (Gerber-Shiu 関数) $W(x, y)$ を $x, y \geq 0$ で定義された正値有界可測関数とする。破産直前の資産 $R(\tau-)$ と破産額 $|R(\tau)|$ を変数とした $W(R(\tau-), |R(\tau)|)$ を penalty²⁾ とし、その平均を現在価値に割り引いた関数 ψ が破産の深刻度と定義する、*i.e.* $\alpha \geq 0$ を割引率とし、

$$\text{Gerber-Shiu 関数 } \psi(x) = \mathbf{E}_x [e^{-\alpha \tau} W(R(\tau-), |R(\tau)|)], \quad x \geq 0. \quad \diamond \quad (\text{I.4})$$

注意 I.3. ψ は、提案者に因んで Gerber-Shiu 関数と呼ばれる (Gerber-Shiu [1997], [1998]) ψ と (I.1) との関連を調べることは、Gerber-Shiu risk theory と呼ばれ、多くの応用がある。また penalty 関数 W の例としては、上記論文の他、Kyprianov [2013] などを見よ。◇

2. 本報告の概要

「Jump diffusion model (I.1) での共通測度 μ が一般の場合に、Gerber-Shiu 関数 ψ の挙動を調べる」ことが risk theory の目標である。そうした挙動研究では、

初期資産 x 、共通測度 μ 、Poisson rate ρ 、拡散係数 σ 、discount rate α

などと ψ の関数関係を明示することが、「理想的な解決」となる。しかし共通分布測度 μ が一般の場合、この関数関係を求めることは、ほぼ不可能である。実際 Cramèr-Lundberg model の場合でさえ、 μ が指数分布 (もしくはその類似) 以外では、理想的な結果は得られていない。そこで

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gerber-Shiu 関数 } \psi \text{ の厳密解ではなく、その優および} \\ \text{劣関数を明示することで、} \psi \text{ の挙動を調べる} \end{array} \right\} \quad (\text{I.5})$$

2) 通常は、undershoot と overshoot が大きいほど深刻な破産となる。

という方針を採用する。

そのために、共通分布測度 μ と Gerber-Shiu 関数の関連を明確にする展開公式の定理 II.1 (西岡・北村 [2023])³⁾

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \frac{\sigma^2}{2} W(0, 0) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k H_{k+1} * F_{\blacktriangle}^{*k}(x) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+1} W_{\blacktriangle} * H_{k+1} * F_{\blacktriangle}^{*k}(x), \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

を利用する。この F_{\blacktriangle} , (II.11) は μ の tail F^c と (I.1) の係数から計算できる関数である。しかし、 k 重の convolution F_{\blacktriangle}^{*k} を計算することは、一般には極めて困難で、 ψ の挙動もよく判らない。そこで、関数 F_L, F_U と正の定数 B_U, B_L が

$$F_{\blacktriangle}(x) \leq F_U(x) \text{ for } 0 \leq x \leq B_U, \text{ and } F_L(x) \leq F_{\blacktriangle}(x) \text{ for } 0 \leq x \leq B_L$$

を満たすとき、それらから、 ψ の優関数 Ψ_U および劣関数 Ψ_L が求められる (比較定理 III.2)。ここで、 F_U として、特に、優関数が明示できるもの (例 III.4) を選ぶことにより、方針 (I.5) が実現できる。また劣関数についても同様である。

上述の方法の適用例として、2 種類の“扱いが困難な共通分布測度”を取りあげる：

- 再保険を想定し、共通 tail が「切り詰め (truncated) 指数分布」, §IV,
- 実務データを想定し、共通 tail が階段関数 (何の分布か特定できない), §V,

のそれぞれを共通分布測度とする jump diffusion model (I.1), $\{R^D(t)\}, \{R^T(t)\}$ に対し、“ $W \equiv 1$ とした Gerber-Shiu 関数 ψ ” (discounted ruin probability になる) の優および劣関数を構成した。実は §IV の例では、 $0 \leq x \leq B_U$ の範囲で上界と下界が一致し、厳密解の具体形を得た。この厳密解を利用し、

(IV.10) : 「ある一定額以上の保険金請求を補填する」という再保険商品

の価値を算定する方法も提案する, (§IV,3)。

3. 記 号

本報告では、特に断らずに、以下の記号を常用する。

3) $H_k, k = 0, 1, \dots$, は, (II.10) で定義された不完全 Erlang 分布, W_{\blacktriangle} は penalty 関数から導かれる関数で, (II.12) により (I.1) から計算できる。

$$\mathbf{P}_x[\cdot] \equiv \mathbf{P}[\cdot | R(0) = x], \quad \mathbf{E}_x[\cdot] \equiv \mathbf{E}[\cdot | R(0) = x].$$

$\sigma \geq 0$ を拡散係数, $\rho > 0$ を Poisson rate, $\alpha \geq 0$ を discount rate。さらに,

$$F(x) \equiv \mu[0, x] = \mathbf{P}[0 \leq U_1 \leq x] \quad (\text{共通分布}),$$

$$F^c(x) \equiv 1 - F(x) \quad (\text{共通 tail}), \quad m_\mu \equiv \mathbf{E}[U_1],$$

$$\widehat{\mu}(s) \equiv \mathcal{L}_x[\mu(dx)](s) = \int_0^\infty \mu(dx) e^{-sx} \quad (\text{測度の Laplace 変換}),$$

$$\widehat{f}(s) = \mathcal{L}_x[f(x)](s) = \int_0^\infty dx f(x) e^{-sx} \quad (\text{関数の Laplace 変換}),$$

$$\mathcal{L}_s^{-1}[\varphi(s)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iM}^{c+iM} ds e^{sx} \varphi(s) \quad (\text{Laplace 逆変換, } c > 0),$$

$$f \text{ と } g \text{ の convolution を } f * g, \quad k \text{ 重の convolution } f^{*k} \equiv \underbrace{f * \cdots * f}_k.$$

II 展開公式

今後, 必要となる展開公式の概要を述べる (詳しくは, 西岡・北村 [2023] を参照)。

(1) Jump diffusion model (I.1) に対する Gerber-Shiu 関数 ψ の Laplace 変換 $\widehat{\psi}(s) = \mathcal{L}_x[\psi(x)](s)$ は次の方程式を満たす:

$$0 = \widehat{\psi}(s) \left\{ -\alpha + s + \frac{\sigma^2}{2} s^2 + \rho (\widehat{\mu}(s) - 1) \right\} - (1 + \frac{\sigma^2}{2} s) \psi(0) - \frac{\sigma^2}{2} \psi'(0) + \rho \widehat{W}_\mu(s), \quad s \geq 0. \quad (\text{II.1})$$

なお,

$$W_\mu(x) \equiv \int_x^\infty \mu(dy) W(x, y - x),$$

$$\widehat{W}_\mu(s) \equiv \mathcal{L}_x[W_\mu(x)](s) = \int_0^\infty dx e^{-sx} \int_x^\infty \mu(dy) W(x, y - x). \quad (\text{II.2})$$

(2) (II.1) では, $\widehat{\psi}$ だけでなく, $\psi(0)$, $\psi'(0)$ も未知関数である。それらの値を確定するために, $\widehat{\mu}(s)$ に関する代数方程式

$$\text{Lundberg's fundamental equation,} \quad -\alpha + s + \frac{\sigma^2}{2} s^2 + \rho (\widehat{\mu}(s) - 1) = 0, \quad (\text{II.3})$$

を考える。 $s \geq 0$ では, (II.3) には唯一の正值解が存在する。今後, その正值解を γ_\blacktriangle と表し, *Lundberg's positive index* と呼ぶ。 $\sigma > 0$ なら, $\mathbf{P}_0[\tau = 0] = 1$ だから,

$$\psi(0) = \mathbf{E}_0[e^{-\alpha \tau} W(R(\tau-), |R(\tau)|)] = W(0, 0)$$

となり, さらに次が成立する:

$$\left(1 + \frac{\sigma^2}{2} s\right) \psi(0) + \frac{\sigma^2}{2} \psi'(0) = \rho \widehat{W}_\mu(\gamma_\blacktriangle) + \frac{\sigma^2}{2} (s - \gamma_\blacktriangle) W(0, 0). \quad (\text{II.4})$$

また $\sigma = 0$ の場合も, やはり (II.4) が成立している。

$$A(s) \equiv 1 + \frac{\sigma^2}{2} (s + \gamma_\blacktriangle) \quad (\text{II.5})$$

と定め, (II.4) を (II.1) に代入し, 整理すると, 次を得る:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(s) &= \frac{1}{A(s)} \left(\rho \frac{\widehat{W}_\mu(\gamma_\blacktriangle) - \widehat{W}_\mu(s)}{s - \gamma_\blacktriangle} + \frac{\sigma^2}{2} W(0, 0) \right) \times \\ &\quad \times \left(1 - \rho \frac{\widehat{\mu}(\gamma_\blacktriangle) - \widehat{\mu}(s)}{(s - \gamma_\blacktriangle) A(s)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

(3) 「Safty loading (I.2), *i.e.* $\rho m_\mu < 1$ 」を考慮すると

$$\rho \left| \frac{\widehat{\mu}(\gamma_\blacktriangle) - \widehat{\mu}(s)}{(s - \gamma_\blacktriangle) A(s)} \right| \leq \rho m_\mu < 1 \quad (\text{II.7})$$

となるので, 級数展開

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{since } |z| < 1, \quad \text{where } z = \rho \frac{1}{A(s)} \frac{\widehat{\mu}(\gamma_\blacktriangle) - \widehat{\mu}(s)}{s - \gamma_\blacktriangle}.$$

を (II.6) に適用すると, $\widehat{\psi}(s)$ は次の様に展開できる:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(s) &= \left(\rho \frac{\widehat{W}_\mu(\gamma_\blacktriangle) - \widehat{W}_\mu(s)}{s - \gamma_\blacktriangle} + \frac{\sigma^2}{2} W(0, 0) \right) \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \left(\frac{1}{A(s)} \right)^{k+1} \left(\frac{\widehat{\mu}(\gamma_\blacktriangle) - \widehat{\mu}(s)}{s - \gamma_\blacktriangle} \right)^k, \quad s \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

実は, この (II.8), 右辺は容易に Laplace 逆変換が行える形になっている。逆変換を実行して, 展開式を得る:

定理 II.1. (展開公式, 西岡-北村 [2023]) Jump diffusion model (I.1) および penalty 関数 W に対する Gerber-Shiu 関数を $\psi(x) = (I.4)$ とする。

(i) $\sigma > 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \frac{\sigma^2}{2} W(0,0) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k H_{k+1} * F_{\blacktriangle}^{*k}(x) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+1} W_{\blacktriangle} * H_{k+1} * F_{\blacktriangle}^{*k}(x), \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

ここで $0! = 1$, $F_{\blacktriangle}^{*0}(x) = \delta_0(x)$ (Dirac の delta 関数) と約束し,

$$H_k(x) \equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\left(\frac{1}{A(s)} \right)^k \right] (x) = \left(\frac{2}{\sigma^2} \right)^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \exp\left\{-x \left(\gamma_{\blacktriangle} + \frac{2}{\sigma^2} \right)\right\}, \quad (\text{II.10})$$

 $k = 1, 2, \dots$, (不完全 Erlang 分布),

$$\begin{aligned} F_{\blacktriangle}(x) \equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{\widehat{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}} \right] (x) &= \int_x^{\infty} \mu(dy) e^{-\gamma_{\blacktriangle}(y-x)}. \quad (\text{II.11}) \\ &= \gamma_{\blacktriangle} \int_0^{\infty} dy e^{-\gamma_{\blacktriangle}y} \{F^c(x) - F^c(x+y)\} \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\blacktriangle}(x) \equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{\widehat{W}_{\mu}(\gamma_{\blacktriangle}) - \widehat{W}_{\mu}(s)}{s - \gamma_{\blacktriangle}} \right] (x) &= \int_x^{\infty} dz e^{-\gamma_{\blacktriangle}(z-x)} W_{\mu}(z) \quad (\text{II.12}) \\ &= \int_x^{\infty} dz e^{-\gamma_{\blacktriangle}(z-x)} \int_z^{\infty} \mu(dy) W(z, y-z) \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

(ii) $\sigma = 0$ のとき,

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+1} W_{\blacktriangle} * F_{\blacktriangle}^{*k}(x), \quad x \geq 0. \quad \diamond \quad (\text{II.14})$$

III 比較定理

1. An upper and a lower function と比較定理

(II.11) の関数 F_{\blacktriangle} に対し, 次の様な有界可測関数 F_U, F_L と定数 $0 < B_U \leq \infty$, $0 < B_L \leq \infty$ を考える:

$$0 \leq F_{\blacktriangle}(x) \leq F_U(x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq B_U, \quad \text{and} \quad \rho \int_0^{B_U} dx F_U(x) < 1, \quad (\text{III.1})$$

$$\left. \begin{aligned} F_{\blacktriangle}(x) \geq F_L(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq B_L, \\ F_{\blacktriangle}(x) \geq 0 > F_L(x), \quad B_L < x, \end{aligned} \right\} \quad \text{and} \quad \rho \int_0^{B_L} dx |F_L(x)| < 1. \quad (\text{III.2})$$

定義 III.1. (III.1) を満たす関数を *an upper function*, (III.2) を満たす関数を *a lower function* と呼ぶ。 ◇

定理 III.2. (比較定理) Penalty 関数 W に対する Gerber-Shiu 関数を ψ とする。

(i) An upper function F_U に対し, $\widehat{F}_U(s) \equiv \mathcal{L}_x[F_U(x)](s)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \Psi_U(x) \equiv & \frac{\sigma^2}{2} W(0,0) \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F}_U(s)} \right] (x) + \\ & + \rho \left(W_{\blacktriangle} * \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F}_U(s)} \right] \right) (x), \end{aligned}$$

は, $0 \leq x \leq B_U$ で, ψ の優関数となる。 *i.e*

$$\Psi_U(x) \geq \psi(x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq B_U.$$

(ii) A lower function F_L に対し, $\widehat{F}_L(s) \equiv \mathcal{L}_x[F_L(x)](s)$ とする。

$$\begin{aligned} \Psi_L(x) \equiv & \frac{\sigma^2}{2} W(0,0) \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F}_L(s)} \right] (x) + \\ & + \rho \left(W_{\blacktriangle} * \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F}_L(s)} \right] \right) (x) \end{aligned}$$

は, $0 \leq x \leq 2B_L$ で, ψ の劣関数となる。 *i.e* $\Psi_L(x) \leq \psi(x)$ for $0 \leq x \leq 2B_L$. ◇

注意 III.3. Laplace 変換に関しては, “ $f \geq g \Rightarrow \mathcal{L}[f] \geq \mathcal{L}[g]$ ” である。しかし, その逆 “ $\widehat{f} \geq \widehat{g} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[\widehat{f}] \geq \mathcal{L}^{-1}[\widehat{g}]$ ” は, 一般には成立しない。

$$\text{反例, } \quad \frac{1}{s^2+1} > 0 \not\Rightarrow \sin x = \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{s^2+1} \right] (x) > \mathcal{L}_s^{-1}[0](x) = 0.$$

そこで 比較定理 III.2 を証明するためには, Laplace 逆変換を介さない ψ の表現, つまり 定理 II.1 (展開公式) が必要となる。 ◇

定理 III.2 証明 (i) $W(0,0), H_k, W_{\blacktriangle} \geq 0$ だから, (III.1) より, $k = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$\begin{aligned} W(0,0) H_k * F_{\blacktriangle}^{*k}(x) & \leq W(0,0) H_k * F_U^{*k}(x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq B_U, \\ \int_0^x dy W_{\blacktriangle}(x-y) F_{\blacktriangle}^{*k}(y) & \leq \int_0^x dy W_{\blacktriangle}(x-y) F_U^{*k}(y) \quad \text{for } 0 \leq x \leq B_U. \end{aligned}$$

(III.1) より, 大きな $s \geq 0$ で $0 < \rho \widehat{F}_U(s) < 1$ 。さらに

$$\mathcal{L}_x[H_k(x)](s) = \left(\frac{1}{A(s)}\right)^{k+1} \leq 1, \quad A(s) = 1 + \frac{\sigma^2}{2}(s + \gamma_\blacktriangle).$$

に注意すると、以下の計算で現れる級数がすべて一様収束していることが判る。すなわち、個別の Laplace 変換および逆変換を行うことが正当化できる。

$0 \leq x \leq B_U$ のとき、

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq \frac{\sigma^2}{2} W(0,0) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k H_k * F_U^{*k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+1} W_\blacktriangle * H_k * F_U^{*k}(x) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} W(0,0) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \mathcal{L}_s^{-1} \left[\mathcal{L}_y [H_k * F_U^{*k}(y)](s) \right] (x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+1} \mathcal{L}_s^{-1} \left[\mathcal{L}_y [W_\blacktriangle * H_k * F_U^{*k}(y)](s) \right] (x) \\ &= \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{\sigma^2}{2} W(0,0) \sum_k \rho^k \left(\frac{1}{A(s)}\right)^{k+1} (\widehat{F_U}(s))^k + \right. \\ &\quad \left. + \sum_k \rho^{k+1} \widehat{W_\blacktriangle}(s) \left(\frac{1}{A(s)}\right)^{k+1} (\widehat{F_U}(s))^k \right] (x) \\ &= \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{\sigma^2}{2} W(0,0) \frac{1/A(s)}{1 - \rho \widehat{F_U}(s)/A(s)} + \rho \widehat{W_\blacktriangle}(s) \frac{1/A(s)}{1 - \rho \widehat{F_U}(s)/A(s)} \right] (x) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} W(0,0) \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F_U}(s)} \right]_s (x) + \\ &\quad + \rho W_\blacktriangle * \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F_U}(s)} \right] (x). \end{aligned}$$

(ii) (III.2) より, $F_L(x) < 0$ for $x > B_L$ だから, すべての $x \geq 0$ に対し, $F_\blacktriangle(x) \geq F_L(x)$ である。しかし, 必ずしも

$$F_\blacktriangle^{*2}(x) \geq F_L^{*2}(x) = \int_0^x dy F_L(x-y) F_L(y) \quad \text{for } \forall x \geq 0$$

とはならない。実際, $F_L(x-y) < 0 < F_\blacktriangle$ かつ $F_L(y) < 0 < F_\blacktriangle$ であっても,

$$\text{積による正負の逆転で } F_L(x-y) F_L(y) > F_\blacktriangle(x) > 0$$

となる可能性がある。ただし, $0 \leq x \leq 2B_L$ なら, 「 $F_L(x-y)$ と $F_L(y)$ は同時に負にならない」から, この可能性は否定できる。よって, (III.2) より, $k = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$W(0,0) H_k * F_\blacktriangle^{*k}(x) \geq W(0,0) H_k * F_L^{*k}(x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 2B_L,$$

$$\int_0^x dy W_{\blacktriangle}(x-y) F_{\blacktriangle}^{*k}(y) \geq \int_0^x dy W_{\blacktriangle}(x-y) F_L^{*k}(y) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 2B_L.$$

となる。あとは、(i) と同様の議論で、定理の結論を導く。□

2. 比較定理 III.2 の適用

この比較定理に基づいて、Gerber-Shiu 関数 ψ の挙動を調べるためには、(III.1), (III.2) に加えて、

$$G_U(x) \equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F_U}(s)} \right] (x), \quad G_L(x) \equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F_L}(s)} \right] (x)$$

が陽関数となることが必須である。その十分条件を例示する：

例 III.4. An upper function F_U を指数関数の線形結合とする： a_1, a_2, b_1, b_2 を定数とし、

$$F_U(x) \equiv a_1 e^{b_1 x} + a_2 e^{b_2 x}.$$

このとき、

$$\widehat{F_U}(s) = \mathcal{L}_x[F_U(x)](s) = \frac{a_1}{s - b_1} + \frac{a_2}{s - b_2}, \quad s \geq \max\{0, b_1, b_2\}$$

となるので、

$$\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F_U}(s)} = \frac{(s - b_1)(s - b_2)}{s \text{ の 3 次多項式}}, \quad s \geq \max\{0, b_1, b_2\}, \quad (\text{III.3})$$

である。ここで、有理式 (III.3) は、極を除いた複素平面に解析接続で拡張できる。

次に、正定数 $c > \max\{0, b_1, b_2\}$ を任意に定め、(III.3) の Laplace 逆変換

$$G_U(x) \equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F_U}(s)} \right] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iM}^{c+iM} ds e^{sx} \times (\text{III.3})$$

を行う。まず (III.3) の分母 (s の 3 次多項式) の零点を求め、分母を因数分解する。あとは、部分分数分解を行って、各項毎に積分路を適当に設定する。すると、Gursat の定理⁴⁾ により、右辺の積分が実行でき、 G_U を陽関数として得る。 G_L についても同様である。◇

IV 例—— F が切り詰め指数分布

再保険による「倒産リスクの低減効果」を計算するため、共通分布が「切り詰め (truncated)

4) 零点が、重根の場合もある。

指数分布」の場合を考える。

1. Surplus 過程 $\{R^T(t)\}$ の設定

Jump diffusion model (I.1) の surplus 過程 $\{R^T(t)\}$ を次の様に定める：

核酸係数 $\sigma = 1/2$, Poisson rate $\rho = 1/2$, discount rate $\alpha = 1/10$,
共通分布の tail F^c は、切り詰めた (truncated) 指数分布, *i.e.*

$$K \equiv 4 \log 2 \text{ とし, } F^c(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq x < K, \\ 0, & K \leq x, \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

簡単な計算から

$$\hat{\mu}(s) = \frac{1 + s e^{-(s+1)K}}{1 + s}, \quad \text{平均 } m_\mu = \frac{15}{16}.$$

数値解析により Lundberg's fundamental equation (II.3) の正值解 Lundberg's positive index γ_\blacktriangle を求め、 F_\blacktriangle を計算する： $K \equiv 4 \log 2$ として、

$$\gamma_\blacktriangle = 0.1644 \dots, \\ F_\blacktriangle(x) = \frac{1}{1 + \gamma_\blacktriangle} \{e^{-x} - \gamma_\blacktriangle e^{-K(\gamma_\blacktriangle+1)} e^{\gamma_\blacktriangle x}\} I_{\{0 \leq x \leq K\}}. \quad (\text{IV.2})$$

2. $0 \leq x \leq K$ での厳密解

(1) 例 III.4 に従い、upper および lower function に、 F_\blacktriangle 自体を利用する。

$$F_U(x) \equiv \frac{1}{1 + \gamma_\blacktriangle} \{e^{-x} - \gamma_\blacktriangle e^{-K(\gamma_\blacktriangle+1)} e^{\gamma_\blacktriangle x}\}$$

とすると、

$$F_U(x) = F_\blacktriangle(x) \text{ for } 0 \leq x \leq K \quad \text{and} \quad F_\blacktriangle(x) \leq F_U(x) \text{ for } \forall x \geq 0,$$

である。一方、 F_U は指数関数の和だから、Laplace 逆変換が具体的に計算でき、

$$G_U^T(x) = \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F_U}(s)} \right] (x) = \sum_{k=1}^3 p_k^T \exp\{-q_k^T x\}, \\ p_1^T = 7.5544 \dots, \quad q_1^T = 8.6131 \dots, \quad p_2^T = 0.4518 \dots, \quad q_2^T = 0.5547 \dots, \\ p_3^T = -0.0062 \dots, \quad q_3^T = -0.1602 \dots.$$

これにより、 ψ の具体形が定まる。すなわち、§IV.1 の下で、任意の penalty 関数 W に

対する Gerber-Shiu 関数の厳密解は次の通り :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\sigma^2}{2} W(0,0) G_U^T(x) + \rho W_{\blacktriangle} * G_U^T(x) \\ &\text{for } 0 \leq x \leq K \equiv 4 \log 2 \simeq 2.772 \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

一方, 優関数 Ψ_U は $\forall x \geq 0$ で有効だから

$$\psi(x) \leq \frac{\sigma^2}{2} W(0,0) G_U^T(x) + \rho W_{\blacktriangle} * G_U^T(x) \quad \text{for } x \geq K.$$

(2) Penalty 関数を $W(x, y) \equiv 1$ とする。このとき, Gerber-Shiu 関数 ψ は discounted ruin probability $\psi(x) = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha\tau}]$ となる。 W_{\blacktriangle} を求める。

$$\begin{aligned} W_{\mu}(x) &\equiv \int_x^{\infty} \mu(dy) W(x, |y-x|) = F^c(x) = e^{-x} I_{[0,K)}(x), \\ W_{\blacktriangle}(x) &= \int_x^{\infty} dy e^{-\gamma_{\blacktriangle}(y-x)} W_{\mu}^{\circ}(y) \\ &= \left(\frac{1}{\gamma_{\blacktriangle}+1} e^{-x} - \frac{e^{-(\gamma_{\blacktriangle}+1)K}}{\gamma_{\blacktriangle}+1} e^{\gamma_{\blacktriangle}x} \right) I_{[0,K)}(x). \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

となり, $W_{\blacktriangle} * G_U^T$ も計算できる (煩雑を避けて, 具体形を割愛する)。これにより, §IV.1 の $\{R^T(t)\}$ に対する discounted ruin probability $\psi(x) = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha\tau}]$ の優関数と厳密解の具体形を得た: $\alpha = 1/10$ として

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{8} G_U^T(x) + \frac{1}{2} W_{\blacktriangle} * G_U^T(x) \quad \text{for } 0 \leq x < K, \\ 0 \leq \psi(x) &\leq \frac{1}{8} G_U^T(x) + \frac{1}{2} W_{\blacktriangle} * G_U^T(x) \quad \text{for } K \leq x, \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

(3) 切り詰めない指数分布 (通常の指数分布) を共通分布とする surplus 過程 $\{R^E(t)\}$ を考える。すなわち, jump diffusion model (I.1) で, $\{R^E(t)\}$ は, 次の通りとする:

$$\begin{aligned} \text{拡散係数 } \sigma &= 1/2, \text{ Poisson rate } \rho = 1/2, \text{ discount rate } \alpha = 1/2, \\ \text{共通測度 } \mu^E(dx) &= e^{-x} dx, \quad \text{共通の tail 分布 } (F^E)^c(x) = e^{-x}. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

$\{R^E(t)\}$ に対して, 各種の計算を行う。

$$\text{Lundberg's positive index } \gamma_{\blacktriangle}^E = 0.16858 \dots,$$

となり, (II.11) より

$$F_{\blacktriangle}^E(s) = \int_x^\infty \mu^E(dy) e^{-\gamma_{\blacktriangle}^E(y-x)} = \frac{e^{-x}}{1 + \gamma_{\blacktriangle}^E} \equiv F_U^E(x). \tag{IV.7}$$

さらに Laplace 逆変換を実行する。\$A^E(s) \equiv 1 + (s + \gamma_{\blacktriangle}^E)/8\$ として、

$$G^E(x) \equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A^E(s) - \rho \widehat{F_U^E}(s)} \right] = \sum_{k=1}^2 p_k^E e^{-q_k^E x},$$

$$p_1^E = 7.5544 \dots, q_1^E = 8.6179 \dots, p_2^E = 0.4455 \dots, q_2^E = 0.5506 \dots$$

\$W(x, y) = 1\$ の場合

$$W_{\blacktriangle}^E(x) = \int_x^\infty dy e^{-\gamma_{\blacktriangle}^E(y-x)} (F^E)^c(y) = \frac{e^{-x}}{1 + \gamma_{\blacktriangle}^E} \tag{IV.8}$$

だから、\$\{R^E(t)\}\$ に対する discounted ruin probability \$\psi^E(x) = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha \tau}]\$ の厳密解は、

$$\psi^E(x) = \frac{1}{8} G^E(x) + \frac{1}{2} W_{\blacktriangle}^E * G^E(x), \quad x \geq 0. \tag{IV.9}$$

(4) 2 つの surplus 過程、\$\{R^T(t)\}\$ と \$\{R^E(t)\}\$ で、異なるところは、

1. \$\{R^T(t)\}\$ の共通 tail は、切り詰め (truncated) 指数分布 (IV.1),
2. \$\{R^E(t)\}\$ の共通 tail は、通常の指数分布 (IV.6)

であり、前者は

$$\text{size が } K = 4 \log 2 \text{ 以上の claim を担保する} \tag{IV.10}$$

図 2 \$\psi\$ と \$\psi^E\$, \$\psi\$ は \$x \ge K\$ では影領域になる

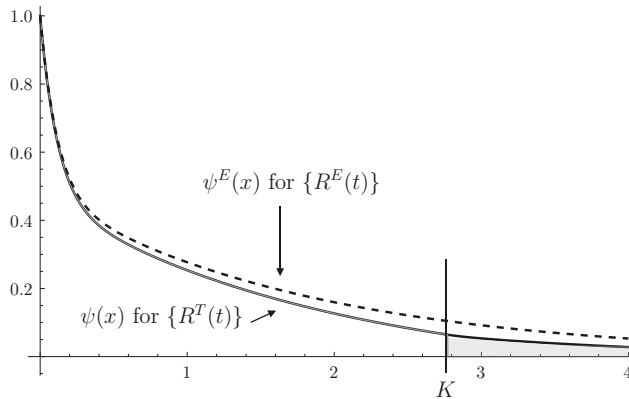
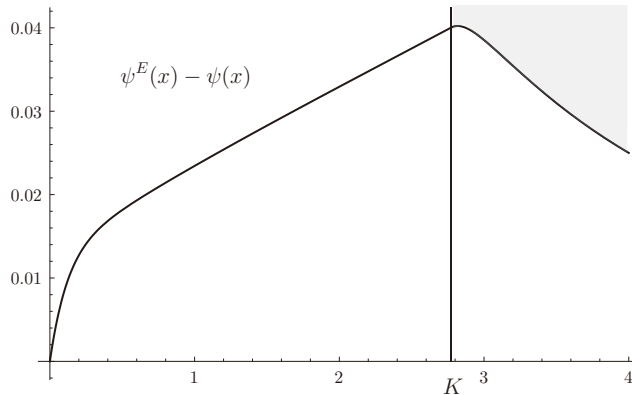


図3 $\psi^E - \psi$ のグラフ

という再保険⁵⁾に加入していることになる。この再保険の有無だけが異なる

2 つの discounted ruin probability $\psi(x), \psi^E(x)$

を比較したグラフが図2である。また、常に $\psi^E > \psi$ だが、両者の差、すなわち「再保険による倒産リスクの低減効果」を図3で示す。差は、 $0 \leq x < K$ では曲線、 $x \geq K$ では影領域である。

3. 再保険商品の価値

再保険会社の

(IV.10) : size が $K = 4 \log 2$ 以上の claim を担保する

という再保険商品の価値を算定する。

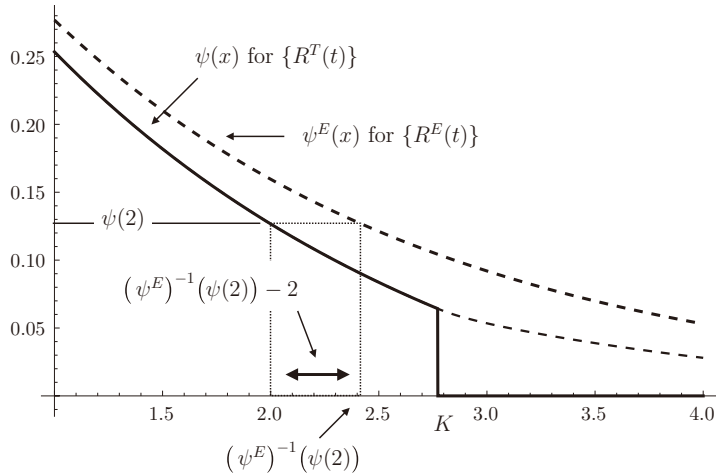
1. 資産 $0 \leq x < K$ の会社が (IV.10) の再保険に加入している。その会社の discounted ruin probability は $\psi(x)$, (IV.5) である。
2. 一方、再保険に非加入の会社で、discounted ruin probability が $\psi(x)$ である会社の資産は $(\psi^E)^{-1}(\psi(x))$ である。ここで $(\psi^E)^{-1}$ は ψ^E , (IV.9) の逆関数である。
3. つまり、再保険商品 (IV.10) は「 $(\psi^E)^{-1}(\psi(x)) - x$ 増資した」ことと等価である
4. Discount rate α で、その増資に必要な資金を借り入れるので、

$$\left((\psi^E)^{-1}(\psi(x)) - x \right) \alpha$$

が、「資産 x の会社に対して、再保険商品 (IV.10) の価値」となる。

5) 車両保険では、普通に販売されている。「5万円未満の車両損害は不担保」というタイプ。

図 4 $x = 2$ の場合に, $\psi(2)$, $(\psi^E)^{-1}(\psi(2))$, $(\psi^E)^{-1}(\psi(2)) - 2$ を示す



例 IV.1. 例えば, $x = 2$ の会社では, $\psi(2) = 0.126629 \dots \Rightarrow (\psi^E)^{-1}(\psi(2)) = 2.4195 \dots$ だから,

$$\left((\psi^E)^{-1}(\psi(2)) - 2 \right) / 10 = 0.04195 \dots$$

が, 「資産が 2 の会社にとっての再保険商品 (IV.10)」の価値となる。◇

V 例—— F が階段関数

1. Surplus 過程 $\{R^S(t)\}$ の設定

ある保険会社の claim size のデータを以下とする :

表 1 Claim size のデータ

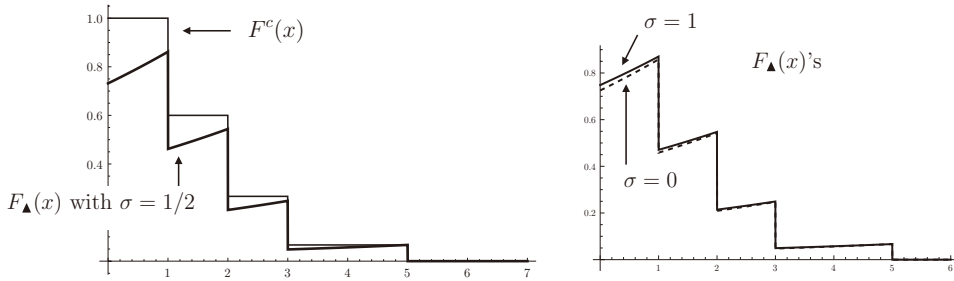
claim size x	1	2	3	4	5	$5 < x$
件数	6	5	3	0	1	0
発生確率	$a_1 = 6/15$	$a_2 = 5/15$	$a_3 = 3/15$	$a_4 = 0$	$a_5 = 1/15$	0

表 1 から

$$F^c(x) = \sum_{k=1}^5 a_k I_{[0,k)}(x), \quad (\text{図 5 参照}), \quad (V.1)$$

$$\hat{\mu}(s) = \sum_{k=1}^5 a_k e^{-ks}, \quad s \geq 0; \quad \text{平均 } m_\mu = 2,$$

図 5 左は F^c と $F_{\blacktriangle} (\sigma = 1/2)$ 。右は参考に $\sigma = 1$ (実線) と $\sigma = 0$ (破線) の F_{\blacktriangle}



となる。

Jump diffusion model (I.1) の surplus 過程 $\{R^S(t)\}$ を次の様に定める：

拡散係数 $\sigma = 1/2$, Poisson rate $\rho = 1/4$, discount rate $\alpha = 1/10$,
 共通分布の tail は階段関数型の (V.1).

数値解析により, Lundberg's fundamental equation (II.3) の正值解, Lundberg's positive index γ_{\blacktriangle} を求める：(σ が与える影響を見るため, 他の値でも計算した。変化は少ない。)

σ	1	1/2	1/4	0
γ_{\blacktriangle}	0.1515...	0.1637...	0.1675...	0.1687...

これより F_{\blacktriangle} も計算できる。今後は, $\sigma = 1/2$ とし,

$$F_{\blacktriangle}(x) = e^{\gamma_{\blacktriangle} x} \sum_{k=1}^5 (a_k e^{-\gamma_{\blacktriangle} x}) I_{[0,k)}(x), \quad \gamma_{\blacktriangle} \equiv 0.1637, \quad a_k \text{ は表 1.}$$

2. An upper and a lower function

$\sigma = 1/2$ とする。例 III.4 に従い, upper function として, $B_U = \infty$,

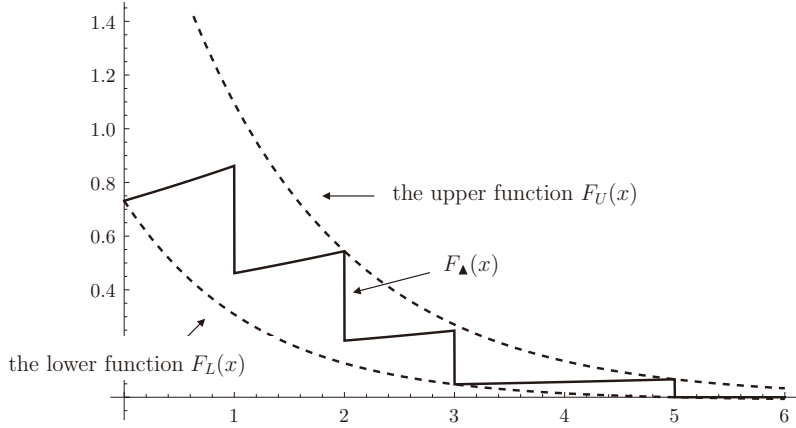
$$F_U(x) \equiv b_1 e^{-b_2 x}, \quad b_1 = 2.2020 \dots, \quad b_2 = 0.6990 \dots$$

と定める。

すると,

$$G_U(x) \equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F_U}(s)} \right] (x) = \sum_{k=1}^2 p_k^{\dagger} \exp\{-q_k^{\dagger} x\},$$

図 6 F_{\blacktriangle} , the upper function F_U , and the lower one F_L



$$p_1^\dagger = 7.4866 \dots, \quad q_1^\dagger = 8.7132 \dots, \quad p_2^\dagger = 0.5133 \dots, \quad q_2^\dagger = 0.1495 \dots$$

また, lower function として, $B_L = 5$,

$$F_L(x) = b_3 e^{-b_4 x} - b_5, \quad b_3 = 0.7426 \dots, \quad b_4 = 0.8437 \dots, \quad b_5 = 0.0109 \dots$$

と定めると,

$$G_L(x) \equiv \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{A(s) - \rho \widehat{F}_L(s)} \right] (x) = \sum_{k=1}^3 p_k^\# \exp\{-q_k^\# x\},$$

$$p_1^\# = 7.7973 \dots, \quad q_1^\# = 8.3587 \dots, \quad p_2^\# = 0.2069 \dots, \quad q_2^\# = 0.6453 \dots,$$

$$p_3^\# = -0.0042 \dots, \quad q_3^\# = 0.0034 \dots.$$

3. Penalty 関数 W からの計算

$W \equiv 1$ とする。このとき, $\psi(x) = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha \tau}]$, discounted ruin probability, となり,

$$W_\mu(x) = F^c(x),$$

$$W_{\blacktriangle}(x) = \frac{1}{\gamma_{\blacktriangle}} \sum_{k=1}^5 a_k (1 - e^{-\gamma_{\blacktriangle}(k-x)}) I_{[0,k)}(x), \quad (a_k \text{ は表 1 の数値}).$$

次に $W_{\blacktriangle} * G_U(x)$ を計算するが⁵, これは面倒である。まず

$$W_{\blacktriangle}^{(k)}(x, k) \equiv \frac{a_k}{\gamma_{\blacktriangle}} (1 - e^{-\gamma_{\blacktriangle}(k-x)}) I_{[0,k)}(x), \quad G(x, p, q) \equiv p e^{-q x}$$

とおくと,

$$V_{\blacktriangle}^{(k)}(x, p, q) \equiv W_{\blacktriangle}^{(k)}(\cdot, k) * G(\cdot, p, q)(x)$$

$$= \begin{cases} \frac{a_k}{\gamma_{\blacktriangle}} \left(\frac{p}{q} (1 - e^{-qx}) - \frac{p}{q + \gamma_{\blacktriangle}} (e^{-\gamma_{\blacktriangle}(k-x)} - e^{-qx - k\gamma_{\blacktriangle}}) \right), & 0 \leq x < k, \\ \frac{a_k}{\gamma_{\blacktriangle}} \left(\frac{p}{q} (e^{-q(x-k)} - e^{-qx}) - \frac{p}{q + \gamma_{\blacktriangle}} (e^{-q(x-k)} - e^{-qx - k\gamma_{\blacktriangle}}) \right), & k \leq x. \end{cases}$$

となり,

$$W_{\blacktriangle} * G_U(x) = \sum_{k=1}^5 \left(V_{\blacktriangle}^{(k)}(x, p_1^{\dagger}, q_1^{\dagger}) + V_{\blacktriangle}^{(k)}(x, p_2^{\dagger}, q_2^{\dagger}) \right),$$

$$W_{\blacktriangle} * G_L(x) = \sum_{k=1}^5 \left(V_{\blacktriangle}^{(k)}(x, p_1^{\#}, q_1^{\#}) + V_{\blacktriangle}^{(k)}(x, p_2^{\#}, q_2^{\#}) + V_{\blacktriangle}^{(k)}(x, p_3^{\#}, q_3^{\#}) \right).$$

4. 優および劣関数

(1) 定理 III.2 より

$$\psi(x) \leq \frac{\sigma^2}{2} G_U(x) + \rho W_{\blacktriangle} * G_U(x) \equiv \Psi_U(x) \quad \text{for } \forall x \geq 0.$$

この右辺を書き下すことは煩雑なので、割愛するが⁵、漸近挙動は

$$x \rightarrow \infty \text{ では, } \psi(x) \leq \Psi_U(x) = \mathcal{O}(e^{-q_2^{\dagger} x}), \quad q_2^{\dagger} \simeq 0.9153.$$

である。また、定理 III.2 より

$$\psi(x) \geq \frac{\sigma^2}{2} G_L(x) + \rho W_{\blacktriangle} * G_L(x) \equiv \Psi_L(x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 10.$$

この右辺を書き下すことも割愛する。「 $\Psi_L(x) < 0$ for $x > 7.331 \dots$ 」となるが⁵、 $\psi(x) \geq 0$ は判っているので、

$$\psi(x) \geq \max\{\Psi_L(x), 0\} \quad \text{for } \forall x \geq 0$$

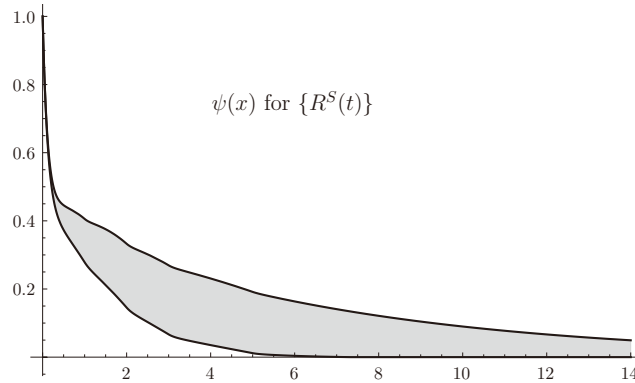
となる。この右辺を ψ への劣関数とする。

(2) 以上を併せて、結果を図示する。§V.1 の jump diffusion model $\{R^S(t)\}$ に対する

$$\psi(x) = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha \tau}] \quad \text{discounted ruin probability.}$$

は図7の影付き領域に存在する (描画には Mathematica Ver.13.0 を使用した)。

図 7 階段関数型の共通分布 (V.1) に対する
discounted ruin probability ψ



5. Cramér-Lundberg model との比較

実務を想定した分布 (V.1) の下で, jump diffusion model と Cramér-Lundberg model それぞれの Gerber-Shiu 関数を比較する。

Cramér-Lundberg model の surplus 過程 $\{R^\circ(t)\}$ を次の様に定める : (I.1) で

拡散係数 $\sigma = 0$, Poisson rate $\rho = 1/4$, discount rate $\alpha = 1/10$,
共通分布の tail は階段関数型の (V.1).

$\{R^\circ(t)\}$ に対し

an upper function $F_U^\circ(x) \equiv b_1^\circ e^{-b_2^\circ x}$, $b_1^\circ = 2.2020 \dots$, $b_2^\circ = 0.6511 \dots$

a lower function $F_L^\circ(x) \equiv b_3^\circ e^{-b_4^\circ x} - b_5^\circ$,

$b_3^\circ = 0.7429 \dots$, $b_4^\circ = 0.8380 \dots$, $b_5^\circ = 0.0112 \dots$

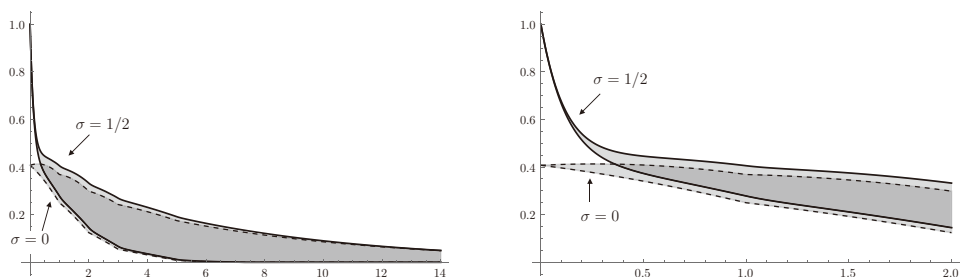
と定め, 後は §V.2 ~ §V.4 を踏襲することで,

$\{R^\circ(t)\}$ に対する discounted ruin probability $\psi^\circ(x) = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha\tau}]$.

の優および劣関数を得る。その結果を, jump diffusion model $\{R^S(t)\}$ に対する discounted ruin probability $\psi(x)$ の場合と併せて図 8 で表示する。

- x が大きいとき, 両者はほぼ重なる。
- しかし x が小さいとき, $\psi(x) > \psi^\circ(x)$ 。すなわち, 資産が小さい会社が早期に倒

図 8 ψ° は破線, ψ は実線で囲まれた領域にある。右は $0 \leq x \leq 2$ を拡大。



産する確率は, jump diffusion model の方が Cramér-Lundberg model より格段に大きい。

参考文献

- 西岡國雄, 北村仁代, Gerber-Shiu 関数の展開公式, 企業研究, 42 (2023), 中央大学企業研究所, 掲載予定。
- Asmussen, S. and Albrecher, H., Ruin Probability, 2nd Ed., Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, Vol. 14, World Scientific, 2010.
- Cramér, H., Historical review of Fillip Lundberg's work on risk theory, Skand. Aktua. (Suppl.), 52 (1969), 6–12.
- Dufresne, F. and Gerber, H. U., Risk theory for a compound Poisson process that is perturbed by a diffusion, Insurance: Mathematics and Economics, 10 (1991), 51–59.
- Embrechts, P. and Samorodnitsky, G., Ruin theory revisit: stochastic models for operational risk, Operations Research and Industrial Engineering, Technical Report, Corneli Univ., 2002.
- Gerber, H. U. and Loisel, S., Why ruin theory should be of interest for insurance practitioners and risk managers nowadays?, Proceedings of Actuarial and Financial Mathematics, 2012, Bruxelles, Belgium.
- Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W., The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin, Insurance: Mathematics and Economics, 21 (1997), 129–137.
- Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W., On the time value of ruin, North American Actuarial J., 2 (1998), 48–72 .
- Kyprianou, A. E., Gerber-Shiu Risk Theory, EAA Series, Springer, 2013.
- Lundberg, F., Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikemasse. Skand. Aktua., 13 (1930), 1–83.