Discussion Paper No.401

情報構造におけるフォーカルポイントの定式化

Formulation of Focal Points in Information Structure

中央大学経済学部
多田 由彦

May 2024

INSTITUTE OF ECONOMIC RESEARCH
Chuo University
Tokyo, Japan

情報構造におけるフォーカルポイントの定式化*

Formulation of Focal Points in Information Structure

多田由彦（中央大学）

2024 年 4 月 24 日

概要

本稿は標準的な状態空間モデルにおいて戦略の突出とフォーカルポイントを定式化する．フォーカルポイントを静学的にかつ数理的に分析した分野の 1 つとして可変フレーム理論があるが，フレームを用いた定式化はいささか冗長であるように感じられる．本稿では情報構造において抽象化して定式化することによってこの冗長さを省いた．さらに本稿はプレイヤーたちに与えられる情報集合によってフォーカルポイントの候補が絞られた時，その絞られた中からどれが最も各人の利得を高めるのかについて共有知識となっている場合には，そのフォーカルポイントをプレイすることを証明した．

キーワード：フォーカルポイント，共有知識.
JEL Classification: C70, C72, D80, D82.

1. イントロダクション

プレイヤーたちがコーディネーションゲームにおいて意思決定をするとき，相手が特定の均衡に注目していることを信じて，意思決定を行うことがあるかもしれない．すべてのプレイヤーがその均衡に注目し，互いにそれを注目していることを信じている場合，そのような均衡を Schelling (1960) はフォーカルポイント（focal point）と名付けた.[1] フォーカルポイントは多くの文献で参照される概念である．このフォーカルポイントを数理的にか

* 本稿は拙著「フォーカルポイントの定式化」(IERCU Discussion Paper, No. 393）並びに "Note on Focal Points: Formulation in Information Structure" (2023, SSRN）に対して加筆修正したものであり, 2023 年度数理経済学会研究集会（早稲田大学, 2023 年 11 月 25 日-26 日），ゲーム理論ワークショップ 2024（京都大学, 2024 年 3 月 8 日-10 日）で発表した．本稿に有益なコメントをしてくださった瀧澤弘和氏に感謝する．

[1] 「お互い相手がそうしようとしていることを知っているならば、人々はしばしば自分の意図や予測を他者に合わせることができるのである．多くの状況、そしてこの種のゲームを行う人々が直面するおそらくすべての状況は、行動を調整するいくつかの手がかりを与えてくれる。つまり、相手がどう予測すると自分が予測するかについての相手の予測を各人がどう予測するかについてのフォーカル・ポイントがそれである。」Schelling (1960/2008)，邦訳 pp.61.

つ静学的に定式化した研究分野の一つが可変フレーム理論（variable frame theory）である．

可変フレーム理論は Bacharach (1993) で提案された理論であり，「フレーム」と呼ばれる属性を用いて，戦略集合上の分割を定義し，ある特定の戦略の突出（salience）を表現することでフォーカルポイントについて議論を行おうとする．例えば赤色と黄色のそれぞれの色で塗られたボールが５つ存在し、そのうちの１つに傷が入っていたとする．この時,「色」というフレームを取り出した場合、５つのボールは「赤色のボール」と「黄色のボール」で分けられ，それぞれまとめられる．「傷」というフレームで分けた場合には，「傷のあるボール」と「傷のないボール」とに分けられ，それぞれまとめられる．この時，ただ１つだけ存在する「傷のあるボール」は５つのボールの中でも突出していると考えることができる．可変フレーム理論におけるフォーカルポイントの数理的な定式化は彼以後の研究でも試みられ，Bacharach and Bernasconi (1997), Bacharach and Stahl (2000), Casajus (2000), Janssen (2001) などで行われた．また Bacharach and Bernasconi (1997) と Bacharach and Stahl (2000) ではフレームの認識とフォーカルポイントの関係を分析した実験研究を行っている．直近の研究では，Charness and Sontuoso (2023) が Heifetz, Meier, and Schipper (2013) で提案された「不可知信念構造」(unawareness belief structure) のモデルと可変フレーム理論を組み合わせ，一部のフレームに対する無知が一意のフォーカルポイントを導き出す可能性を示唆した．

このように可変フレーム理論はコーディネーションゲームにおけるフォーカルポイントに関して極めて示唆的な結論を導き出しており，今後の研究の発展も期待される．その一方で可変フレーム理論はある種の冗長さを感じる．モデルの分析者は各プレイヤーが持っている戦略を「フレーム」という概念を使い分けて解釈し，分類している．例えば，待ち合わせゲームの場合，同じ待ち合わせ場所でも象徴的な目印として表現することができるし，住所で表現することもできるし，緯度経度を用いて表現することもできる．その分類によって，特定の戦略の突出を表現しようとしている．しかしながら，本質的には戦略集合を分割して特定の戦略の突出を表現しているに過ぎない．となると我々はモデル分析者によって外生的に与えられるフレームを用いることなくより抽象的に戦略集合の分割と特定の戦略の突出を表現することができるはずである．また可変フレーム理論の場合，フレームによる分類から戦略の突出を表現し，各プレイヤーの推論の帰結としてのフォーカルポイントを定式化するが，現実のゲーム的状況では，特定の戦略が突出していることを他者から知識として受け取り，それをフォーカルポイントと認識することがありうる．例えば「渋谷で待ち合わせするならハチ公像の前だよね」という会話を耳にした人は，その会話をフレームで分析して突出している待ち合わせ場所が「ハチ公像」だと特定しているとは言えない．どちらかというと，その会話から直接的に突出している待ち合わせ場所が「ハチ公像」だと特定していると考える方が自然である．確かに，初めて直面するようなゲーム的状況では，それぞれのプレイヤーたちが戦略集合に対してフレームを用いて解釈するという作業が入るかもしれないが，過去に何度もプレイがされているようなゲーム的状況であれば，過去のプレイを知

識として戦略の突出を理解していると考えられる．また，フレームを用いて分類することができないようなゲーム的状況が存在するかもしれない．

上述の観点から本稿ではフレームは用いず標準的な情報構造モデルを用いて戦略の突出とフォーカルポイントの定式化を試みる．我々は情報構造モデルにおける状態空間上の各状態には，それぞれのプレイヤーにとってどの戦略が突出しているのかが記述されていると解釈する． この時，各プレイヤーは受け取った情報集合からすべてのプレイヤーにとって共通で突出している戦略を見つけ出し，フォーカルポイントを見つけ出そうとするだろう．フォーカルポイントはナッシュ均衡の 1 つであるが，どのナッシュ均衡がフォーカルポイントになるかは，すべてのプレイヤーの間でどのナッシュ均衡が突出していると認識しているのかの信念に依存することは明らかである．したがって，本稿はある特定の戦略がすべてのプレイヤーにとって突出していることが共有知識となっている場合に，その戦略をフォーカルポイントと名付けることにする．

さまざまなフォーカルポイントの候補があったとしても，プレイヤーたちが入手する情報集合によってはその候補が絞られることがあるかもしれない．本稿は主要定理として，そうして絞られた候補の中で，すべてのプレイヤーの利得を最も高めるフォーカルポイントの候補が実際にプレイされうることを示す．我々の定理は一意のフォーカルポイントがプレイされうることを指摘した点で，可変フレーム理論における対称行列ゲームにおいてフォーカルポイントと解釈できるような一意の均衡がプレイされうることを示した Casajus (2000) と Janssen (2001) と関連性があるように見えるが，彼らがフォーカルポイントを一意に定義しているのに対して，本稿はフォーカルポイントの候補が複数存在したり，あるいはそもそも存在しなかったりすることを認めた上で，一定の条件のもとでは一意のフォーカルポイントがプレイされうることを示している点で本質的に異なっている．

本稿は以下のように構成される．2 節では数学的な準備として標準形ゲームと情報構造，そして情報構造をベースにした戦略集合上の分割をそれぞれ定義する．3 節では戦略の突出とフォーカルポイントを定式化し，フォーカルポイントのプレイについての主要定理を示す．最後の 4 節では結論と議論を述べる．

2. 準備

2.1 標準形ゲームの定義と状態空間

まず標準形ゲーム $G=(I,\{S_i\}_{i\in I},\{u_i\}_{i\in I})$ を定義する．以下では単に「ゲーム」と呼ぶときは，標準形ゲームのことを指す．I はプレイヤーの集合である．S_i はプレイヤー i の戦略集合であり，プレイヤー i の戦略を $s_i\in S_i$ と表す．直積集合 $S=\times_{i\in I} S_i$ について，$s=(s_i)_{i\in I}\in S$ を戦略プロファイルとする．任意の $i\in I$ に対して，$u_i\colon S\to\mathbb{R}$ を i の効用関数とおく．

続いてゲーム G における情報構造 (Ω,Π_i) について考える．Ω は状態空間であり，各プ

レイヤー i ごとに Ω 上で分割が定義されているものと仮定する．プレイヤー i の Ω 上の分割を $\mathcal{Q}_i$ と記す．続いてプレイヤー i の情報関数 $\Pi_i\colon\Omega\to 2^\Omega\setminus\{\emptyset\}$ を用意する．任意の $\omega\in\Omega$ に対して，情報集合 $\Pi_i(\omega)$ は分割 $\mathcal{Q}_i$ の要素であるとする，e.g.，$\Pi_i(\omega)\in\mathcal{Q}_i$．情報関数 Π_i は以下の条件を満たすものとする．

C1　任意の $\omega\in\Omega$ に対して，$\omega\in\Pi_i(\omega)$.

C2　任意の $\omega,\omega'\in\Omega$ に対して，$\omega'\in\Pi_i(\omega)$ ならば，$\Pi_i(\omega')=\Pi_i(\omega)$.

プレイヤーたちの間で Ω 上の分割が束として定義できるものとする．$\bigvee_{i\in I}\mathcal{Q}_i$ をすべてのプレイヤーの Ω 上の coarsest common refinement な分割の結び（join）とし，$\bigwedge_{i\in I}\mathcal{Q}_i$ をすべてのプレイヤーの Ω 上の finest common coarsening な分割の交わり（meet）とする．ここで $\widehat{\Pi}\colon\Omega\to 2^\Omega$ を finest common coarsening な分割の関数とおき，ω を含む分割の交わりの要素を $\widehat{\Pi}(\omega)$ と記す．すなわち $\widehat{\Pi}(\omega)\in\bigwedge_{i\in I}\mathcal{Q}_i$.

例 1　2 人の主体 1 と 2 について，それぞれの $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 上の分割を以下のように定義する：

$$P_1=\big\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6,7,8\},\{9,10\}\big\}$$
$$P_2=\big\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7\},\{8,9,10\}\big\}$$

このとき，分割の結びは，

$$P_1\vee P_2=\big\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6,7\},\{8\},\{9,10\}\big\}$$

であり，分割の交わりは，

$$P_1\wedge P_2=\big\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8,9,10\}\big\}$$

となる．各主体の情報関数 Π_1,Π_2 をとる．真の状態が $2\in\Omega$ であるとき，

$$\Pi_1(2)=\{1,2\},\ \Pi_2=\{1,2,3,4\}$$

となり，$\omega=2$ を含む分割の交わりの要素は，

$$\widehat{\Pi}(2)=\{1,2,3,4\}$$

となる．□

　Ω 上の確率測度 $\mu\colon 2^\Omega\to[0,1]$ について考える．μ について共通事前確率（common prior）を仮定し，$\sum_{\omega\in\Omega}\mu(\{\omega\})=1$ とする．

　これらの準備をもとに，共有知識（common knowledge）を定義する．そのためにまず自明（self-evident）な事象を定義する．

定義 1　事象 $F\subseteq\Omega$ が ω で自明であるとは，すべての i 対して，$\Pi_i(\omega)\subseteq F$ が成立することである．

定義 2　事象 $E \subseteq \Omega$ が ω で共有知識になっているとは，$\omega \in F \subseteq E$ を満たす自明な事象 F が存在することである．

補題 1　事象 F が ω で自明であるならば，F はすべてのプレイヤーの Ω 上の分割の交わりの要素である．

証明　事象 F が ω で自明であると仮定する．このときすべての i に対して，$F = \bigcup_{\omega \in \Omega} \Pi_i(\omega)$ であり，かつ $\bigcup_{\omega \in \Omega} \Pi_i(\omega) \in \bigwedge_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ であるから，$F \in \bigwedge_{i \in I} \mathcal{Q}_i$．■

Aumann (1976) では，以下の定理が証明されている．

定理 1（Aumann 1976）Ω 上で共有事前確率が存在し，各プレイヤーの Ω 上の分割が共有知識になっていると仮定する．ω ですべてのプレイヤーの事象 E の事後確率が共有知識になっているならば，すべてのプレイヤーの事後確率は同じ値を取る．

証明　各プレイヤー $i \in I$ の事象 E の事後確率を q_i とする．ここで ω で事象 E の事後確率 q_i であることが共有知識になっていることを事象 F とおく．このとき，$\hat{F} \subseteq F$ を満たすような自明な事象 $\hat{F}$ が存在する．補題 1 より $\hat{F} \in \bigwedge_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ であるから任意のプレイヤーの事後確率は $q_i = \mu(E|\hat{F})$ と記せる．すなわちすべてのプレイヤーの事後確率が同じになる．■

2.2 戦略集合上の分割

本節では，戦略集合上の分割を定義する．まず $\mathbb{P}$ を戦略集合 S 上の分割の集合とする．このとき，$\bigcup_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} \mathcal{P} \subseteq S$ とする．任意の要素 $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ は S 上の分割であり，分割の各要素 $P \in \mathcal{P}$ は $P \subseteq S$ を満たす.[2] ここで i の注目関数 $\pi_i : \Omega \to \mathbb{P}$ を定義する．これは $\omega \in \Omega$ を与えられたとき，プレイヤー i が注目している S 上の分割は $\pi_i(\omega) \in \mathbb{P}$ であると解釈する．以下では π_i が共有知識になっていることを仮定する．このとき，それぞれのプレイヤーの注目関数から各プレイヤーがどのように戦略集合を分割しているのか推論することが可能となる．したがって，Ω 上の各状態 ω は，それぞれのプレイヤーの戦略集合上の分割についても記述されていると解釈することができる．

ここで ω での S 上の分割の要素を定義するために i の関数 $P_i^{\omega} : S \to S$ をとる．これ

[2] ここでは S 上の分割が相関しているものと考えている．もし S 上の分割が独立であることを仮定した場合 $\bigcup_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} \mathcal{P} \subseteq \times_{i \in I} (2^{S_i} \setminus \emptyset)$ となり，分割の各要素 $P \in \mathcal{P}$ は $P \in \times_{i \in I} (2^{S_i} \setminus \emptyset)$ を満たす．この場合，分割の関数も $P_i^{\omega} : S \to \times_{i \in I} (2^{S_i} \setminus \emptyset)$ と定義することができる．

は ω での各戦略 s がどのような分割の要素になっているのかを表したものであり，定義より $P_i^{\omega}(s) \in \pi_i(\omega)$ となる．このとき P_i^{ω} は以下の性質を満たすものとする．

P1　任意の $s \in S$ に対して，$s \in P_i^{\omega}(s)$.
P2　任意の $s, s' \in S$ に対して，$s' \in P_i^{\omega}(s)$ ならば，$P_i^{\omega}(s') = P_i^{\omega}(s)$.

ここで純粋戦略ナッシュ均衡を定義する．

定義３　ゲーム G において $s^* \in S$ が純粋戦略ナッシュ均衡であるとは，任意の $i \in I$ と $s_i \in S_i$ に対して，$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$ を満たすことである．

ここでゲーム G におけるナッシュ均衡の集合を S^{NE} と記す．

例２　テーブルの上に５つのボール $\{1,2,3,4,5\}$ があり，ボール１と２は赤色，ボール３，４，５は黄色であるとする．ただし，ボール３には傷が入っているものとする．プレイヤー A と B はそれぞれ同時に１つのボールを選択する．このとき，ボールの番号が同じであれば，両者ともに１０点，ボールの番号が違っていれば，両者ともに 0 点を獲得するものとする．これを $G = (I, \{S_A, S_B\}, \{u_A, u_B\})$ で定式化すると，

$I = \{A, B\}$；

$S_A = S_B = \{1,2,3,4,5\}$；

$$u_i(s_A, s_B) = \begin{cases} 10 & if\ \ s_A = s_B \\ 0 & otherwise \end{cases},\ i = A, B.$$

このとき，ナッシュ均衡の集合は $S^{NE} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$ となる．

ここで３つの状態 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ について考える．ω_1 を与えられたとき，各プレイヤーの戦略集合の分割は色で仕切られ，以下のようになっていると：

$P_1^{\omega_1} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$；

$P_2^{\omega_1} = \{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$；

$P_3^{\omega_1} = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$.

ω_2 は色だけでなく，ボール３に傷が入っていることを A も B も知っている場合を表し，戦略集合の分割は以下のようになっているとする：

$P_1^{\omega_2} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$；

$P_2^{\omega_2} = \{(3,3)\}$；

$P_3^{\omega_2} = \{(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$；

$P_4^{\omega_3} = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$.

ω_3 は色だけでなく，ボール３に傷が入っていることを A は気づいているが，B は気づいていない場合を表し，各プレイヤーの戦略集合の分割は以下のようになっているとする：

$P_{A1}^{\omega_3} = P_1^{\omega_2}, P_{A2}^{\omega_3} = P_2^{\omega_2}, P_{A3}^{\omega_3} = P_3^{\omega_2}, P_{A4}^{\omega_3} = P_4^{\omega_2}$；
$P_{B1}^{\omega_3} = P_1^{\omega_1}, P_{B2}^{\omega_3} = P_2^{\omega_1}, P_{B3}^{\omega_3} = P_3^{\omega_1}$. □

3. フォーカルポイント

本節では突出（salience）とフォーカルポイント（focal point）の定義を行う．まず突出を以下のように定義する．

定義 4　ゲーム G において $s^* \in S$ が $\omega \in \Omega$ で i にとって突出しているとは，$s^* \in S^{NE}$ であり，かつ s^* が以下の条件を満たすことである：任意の $s \in S^{NE} \setminus \{s^*\}$ に対して，

- $s \notin P_i^{\omega}(s^*)$；
- $s' \in P_i^{\omega}(s)$ であるような $s' \in S^{NE} \setminus \{s\}$ が少なくとも 1 つ存在する．

これはある戦略 s^* が ω で i にとって顕著であるとき，s^* がナッシュ均衡であり，s^* 以外のナッシュ均衡は s^* を同じ分割の要素に含まれておらず，かつ s^* 以外のナッシュ均衡を含む分割の要素には 2 つ以上のナッシュ均衡が含まれていることを意味する．

続いて共有突出（common salience）を定義する．

定義 5　ゲーム G において $s^* \in S$ が $\omega \in \Omega$ で共有突出であるとは，すべてのプレイヤー i にとって s^* が ω で突出していることである．

注目関数 π_i は共有知識となっているので，プレイヤーたちは ω で共有突出となっている戦略を推論で導き出すことができる．したがって，Ω 上の各状態 ω は，それぞれのプレイヤーにとってどの戦略が突出しているのかが記述されていると解釈することができる．

続いて関数 $s^f : \Omega \to S \cup \{\phi\}$ をとり，$s^f(\omega) = \left(s_i^f(\omega)\right)_{i \in I}$ を ω での共有突出とする．また ω での共有突出が存在しない場合は，$s^f(\omega) = \phi$ と記す．そして $S^f = \left\{s^f(\omega) \in S \middle| \omega \in \Omega \wedge s^f(\omega) \neq \phi\right\}$ を共有突出の集合とする．

例 2（続き）　5 つのボールのケースでは，$s^f(\omega_1) = s^f(\omega_3) = \phi$，$s^f(\omega_2) = (3,3)$ となる．□

最後にフォーカルポイントを定義する．フォーカルポイントはナッシュ均衡であるが，どのナッシュ均衡がフォーカルポイントとなるかは各プレイヤーがどのナッシュ均衡が共有突出であると認識しているのかに依存する．ここで各状態 ω は各プレイヤーの戦略集合上の分割や共有突出について記述がされているわけであるから，どれがフォーカルポイントとなるのかも併せて推論することが可能である．このとき，フォーカルポイントは次の

ように定義される．

定義 6　ゲーム G において $s^* \in S$ が $\omega \in \Omega$ でフォーカルポイントであるとは，s^* が ω で共有突出となっており，かつそれが共有知識となっていることである．

本稿のフォーカルポイントの定義には利得の条件を含めていない．これはパレート劣位なナッシュ均衡がフォーカルポイントになる可能性を認めるためである．なお，各プレイヤーの情報関数 Π_i と注目関数 π_i は共有知識となっているので，すべてのプレイヤーはどれが共有突出となっているのか推論することができる．したがって，「s^* が ω で共有突出となっている」という事象は自明な事象となるので，定義 2 からそれ自身が共有知識である．したがって，以下の注釈は明らかに成り立つ．

注釈 1　ゲーム G においてすべてのプレイヤーの情報関数と注目関数が共有知識となっているならば，共有突出とフォーカルポイントは同値な概念である．したがって，ω を与えられたとき，$s^f(\omega) \neq \phi$ ならば，$s^f(\omega)$ はフォーカルポイントである．

フォーカルポイントは以下の性質を持つ．

注釈 2　任意のゲーム G においてフォーカルポイントが存在しないような $\omega \in \Omega$ が存在するかもしれない．

集合 X に対して $|X|$ は X の要素の個数と定義する．このとき，次の注釈が成り立つ．

注釈 3　フォーカルポイントが存在するならば，$|S^{NE}| \neq 2$.

これはすなわち，ゲーム G においてナッシュ均衡の数が 2 個であるとき，フォーカルポイントは存在しないことを意味する．この注釈は，プレイヤーは 2 つの均衡に対して均衡選択を迫られた場合，戦略集合の分割だけでは区別ができず，結果としてフォーカルポイントは定まらないと解釈することができる．この場合，ナッシュ均衡がただ 2 個のみである場合には，フォーカルポイントは静学的に定まるものではなく，動学的に決まるものであると考えることができる．例えば，歴史的な背景によってどちらがフォーカルポイントとなるのか変わるかもしれない．

以下では $s^f(\omega)$ をフォーカルポイント戦略とよび，フォーカルポイント戦略に対するプレイヤーたちの期待効用について考える．ここで $\omega \in \Omega$ を与えたときに，$s^f(\omega) = \phi$ であるならば，任意のプレイヤー $i \in I$ と $s_i \in S_i$ に対して，

$$u_i\left(s^f(\omega)\right) = \frac{\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sum_{s_i\in S_i} u_i(s_i, s_{-i})}{|S|}$$

とする．これはフォーカルポイントがない場合において，i は s_i をプレイし，他のプレイヤーはランダムに戦略をプレイした場合の i の期待効用となる．このとき，任意の $i \in I$ に対して，i が戦略 s^* に注目し，他のプレイヤーは ω で $s^f(\omega)$ に注目したとき，i が s_i^* をプレイした場合の期待効用は，

$$Eu_i(s_i^*) = \sum_{\omega\in\Omega} \mu(\{\omega\}) \cdot u_i\left(s_i^*, s_{-i}^f(\omega)\right)$$

となる．なお，$s^f(\omega) = \phi$ の時の i の戦略 $s_i^f(\omega) = \phi_i$ については i は S_i 上の戦略をランダムにプレイしているものと考える．すなわち，

$$Eu_i(\phi_i) = \sum_{s_i\in S_i} \frac{Eu_i(s_i)}{|S_i|}$$

とする．以上の準備のもとで以下の命題が成立する．

命題 1　任意の $\Gamma = (G, \Omega)$ において，Ω 上の共有事前確率 μ が存在し，各プレイヤーの Ω 上の分割が共有知識になっていると仮定する．ある $\omega \in \Omega$ が与えられたとき，s^* が ω で共有突出となっており，かつ任意の $\omega' \in \widehat{\Pi}(\omega)$（$\omega' \neq \omega$）と任意の i に対して $Eu_i(s_i^*) \geq Eu_i\left(s_i^f(\omega')\right)$ であることが共有知識になっているならば，s^* は ω で最適である．

証明　$\Gamma = (G, \Omega)$ において，Ω 上の共有事前確率 μ が存在し，各プレイヤーの Ω 上の分割が共有知識になっていると仮定する．ある $\omega \in \Omega$ が与えられたとき，ω の共有突出が s^* であり，かつ任意の $\omega' \in \widehat{\Pi}(\omega)$ と任意の i に対して $u_i(s^*) \geq u_i\left(s^f(\omega)\right)$ であることが共有知識になっているとする．ここで「ω の共有突出が s^* であり，かつ任意の $\omega' \in \widehat{\Pi}(\omega)$ と任意の i に対して $u_i(s^*) \geq u_i\left(s^f(\omega)\right)$ である」という事象を E とおく．E が共有知識になっているとき，その事前確率は $\mu(E)$ であり，任意の事象 F の事後確率は $\mu(F|E) = \frac{\mu(E\cap F)}{\mu(E)}$ となるから，E が起きた場合にすべてのプレイヤー i が s^* に注目し，それをプレ

イした場合の期待効用と任意のプレイヤー i が任意の $s_i \in S_i$ をプレイした場合の期待効用との関係は，

$$Eu_i(s_i^*|E) = \sum_{\omega\in\Omega} \mu(\{\omega\}|E) \cdot u_i\left(s_i^*, s_{-i}^f(\omega)\right) \geq \sum_{\omega\in\Omega} \mu(\{\omega\}|E) \cdot u_i\left(s_i, s_{-i}^f(\omega)\right) = Eu_i(s_i|E).$$

従って，s^* は ω で最適である．■

この定理は真の状態におけるフォーカルポイントが必ずプレイされることを意味するわけではない．あくまで真の状態 ω において，ω でのフォーカルポイントが最適な解の 1 つになることを意味しているに過ぎない．これは ω を含む finest common coarsening な分割の要素 $\widehat{\Pi}(\omega)$ の別の要素 ω' を取り出した時，その ω' でのフォーカルポイントを選択するときに得られる期待利得が ω でのフォーカルポイントを選択するときに得られる期待利得と同じである場合には，均衡選択の問題が残ってしまうことを暗に示している．言い換えれば，真の状態でのフォーカルポイントが一意の解になり得るとは限らないことを意味している．

しかしながら，ω でのフォーカルポイント戦略を選ぶことが他の $\omega' \in \widehat{\Pi}(\omega)$ でのフォーカルポイント戦略を選ぶことよりも期待利得を厳密に高めることができるならば，ω でのフォーカルポイント戦略は一意の解になりうることは明らかである．従って，以下の定理は明らかに成り立つ．

定理 2　任意の $\Gamma = (G, \Omega)$ において，Ω 上の共有事前確率 μ が存在し，各プレイヤーの Ω 上の分割が共有知識になっていると仮定する．ある $\omega \in \Omega$ が与えられたとき，s^* が ω で共有突出となっており，かつ任意の $\omega' \in \widehat{\Pi}(\omega)$（$\omega' \neq \omega$ かつ $s^f(\omega') \neq s^*$）と任意の i に対して $Eu_i(s_i^*) > Eu_i\left(s_i^f(\omega')\right)$ であることが共有知識になっているならば，すべてのプレイヤーは s^* をプレイする．

この定理では，ω' でのフォーカルポイント $s^f(\omega')$ が ω でのフォーカルポイント s^* と比べてパレート優位であったとしても，$\omega' \notin \widehat{\Pi}(\omega)$ である場合，各プレイヤーが $s_i^f(\omega')$ をプレイすることは最適にはなり得ないので，パレート劣位なフォーカルポイント s^* がプレイされうる余地を残している．

この定理は一意のフォーカルポイントを推論によってプレイしうることを主張している点で Casajus (2000) と Janssen (2001) の定理を一般化したものであるように感じるかもしれない．しかしながら，Casajus (2000) ではフォーカルポイントを一意に定義しているのに対して，本稿はフォーカルポイントの候補が複数存在したり，あるいは存在しなかった

りすることを認めている．その上で定理 2 は複数のフォーカルポイントの候補の中から実際にプレイされるフォーカルポイントがただ 1 つに決まることを示している点で彼らの研究とは本質的には異なっている．むしろ本稿の主要定理は Aumann（1976）の同意定理を用いた定理であり，Milgrom and Stokey（1982）の no-trade theorem の亜種と考えるのが妥当である．

例 2 を用いて定理 2 の内容を確認する．

例 2 （続き）　5 つのボールのケースにおいて，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ 上の共有事前確率を $\mu(\omega_1)=0.2$，$\mu(\omega_2)=0.6$，$\mu(\omega_3)=0.2$ とおく．プレイヤー A と B の Ω 上の分割をそれぞれ

$$\Pi_A(\omega_1)=\{\omega_1\},\ \Pi_A(\omega_2)=\Pi_A(\omega_3)=\{\omega_2,\omega_3\}；$$
$$\Pi_B(\omega_1)=\{\omega_1\},\ \Pi_B(\omega_2)=\{\omega_2\},\ \Pi_B(\omega_3)=\{\omega_3\}$$

とし，真の状態は ω_2 であると仮定する．このときフォーカルポイントは $(3,3)$ であり，ω_2 を含む分割の交わりは $\widehat{\Pi}(\omega_2)=\{\omega_2,\omega_3\}$ となっている．また $\omega_3\in\widehat{\Pi}(\omega_2)$ に対して，$s^f(\omega_3)=\phi$ が成立する．すなわち，$u_i\left(s^f(\omega_3)\right)=u_i(\phi)=2.$

今，ω_2 のフォーカルポイントが $(3,3)$ であり，かつ $Eu_i(3)=6>Eu_i\left(s_i^f(\omega_3)\right)$ が共有知識になっているとする．このとき，補題から $\widehat{\Pi}(\omega_2)$ は自明な事象であるから，「ω_2 のフォーカルポイントが $(3,3)$ であり，かつ $u_i(3,3)=10>u_i\left(s^f(\omega_3)\right)$ が共有知識になっている」という事象 E に対して，$\widehat{\Pi}(\omega_2)\subseteq E$ でなければならない．このときプレイヤー A もプレイヤー B もフォーカルポイントであるボール 3 を選択した場合の期待効用は

$$Eu_i(3|E)=\frac{0.6}{0.8}\cdot u_i(3,3)+\frac{0.2}{0.8}\cdot u_i\left(3,s_{-i}^f(\omega_3)\right)=8$$

であり，それ以外のボール $s_i\neq 3$ を選んだ場合の期待効用は

$$Eu_i(s_i|E)=\frac{0.6}{0.8}\cdot u_i(s_i,3)+\frac{0.2}{0.8}\cdot u_i\left(s_i,s_{-i}^f(\omega_3)\right)=\frac{1}{2}$$

であり，明らかに $Eu_i(3|E)>Eu_i(s_i|E)$ となっている．従って，プレイヤー A も B もボール 3 を選択する．□

4.　結論と議論

本稿では突出とフォーカルポイントを静学的に定義し，ある状態でのフォーカルポイントが共有知識になっていること，その状態でのフォーカルポイント戦略が同じ情報集合における他の状態のフォーカルポイント戦略と比べてパレート優位になっていることが共有

知識になっているならば，すべてのプレイヤーがフォーカルポイントを選択することを証明した．本稿のアプローチは可変フレーム理論とは異なるが，フレームと呼ばれるラベルの集合を用いずにフォーカルポイントを抽象的にかつ静学的に定義することができた．また可変フレーム理論で証明された一意の均衡のプレイとは本質的には異なる一意のフォーカルポイントのプレイについて，同意定理を用いた証明を提示した．

本稿の主要定理は一見すると Aumann and Brandenburger (1995) が示した予備的観察を焼き直したもの，あるいはその劣化版のように見えるかもしれない．Aumann and Brandenburger (1995) では相互作用的信念体系（interactive belief system）と呼ばれる枠組みを用いて，均衡のプレイについての条件を分析した．このとき彼らの予備的観察では「すべてのプレイヤーが合理的であり，自身の利得関数を知っていて，他のプレイヤーの選択を知っているならば，その時のプレイヤーたちのプレイはナッシュ均衡になる」ことが示された．この予備的観察では我々の定理 2 とは異なり共有知識を仮定していない点で，我々の定理 2 は彼らの予備的観察よりも劣化しているように感じるかもしれない．しかしながら Aumann and Brandenburger (1995) では状態空間上の状態について，どのプレイヤーが何を選択するのかについてまで記述されていることを仮定しているのに対して，我々の状態空間上の状態は，あくまでどの戦略がフォーカルポイントとなりうるのかのみを記述している．したがって，ある特定の状態を与えられたからといって直ちにその状態から他のプレイヤーの行動を予想できるわけではなく，他のプレイヤーの行動を予想するためには，さらに推論を重ねなくてはならない．すなわち，我々の情報構造モデルは Aumann and Brandenburger (1995) の相互作用的信念体系とは異なっている．

ただし，本稿にはいくつかの課題がある．本稿のモデルの場合，ナッシュ均衡の数が 2 個しかない場合には定義上フォーカルポイントが存在しないことになっている．これは一度きりのゲーム的状況に突然直面した場合に，判断材料がないために特定の均衡戦略に着目することができないようなケースを反映していると解釈できるかもしれない．しかし Schelling (1960) では被験者に表か裏かを選ばせてパートナーと同じものを選んだ場合には報酬がもらえるような実験において，表を選ぶ被験者が多かったことを実験で示している．また繰り返し的な状況であれば，ナッシュ均衡が 2 個しかない場合でも学習によって特定の均衡がフォーカルポイントとなることがありうるかもしれない．そうした場合，本稿での定式化とどのように整合性を取るのかが重要な点となるだろう．

また Charness and Sontuoso (2023) のように他のプレイヤーの戦略集合の分割についての無知を加味する必要があり，本稿で用いられている標準的な状態空間モデルを Heifetz, Meier, and Schipper (2013) が提案した不可知信念構造モデルに置き換えて分析していくことも視野に入れる必要があるだろう．Charness and Sontuoso (2023) のモデルは具体例を用いた分析にとどまっているが，無知とフォーカルポイントとの関係について「知識の節約」という観点から極めて重要な点をついているように思われる．これらの点を今後の課題として取り組んでいきたい．

【参考文献】

Aumann, R.J., (1976), “Agreeing to disagree”, *The Annals of Statics*, Vol. 4, pp. 1236-1239.

Aumann, R.J., and Brandenburger, A., (1995), “Epistemic Conditions for Nash Equilibrium”, *Econometrica*, Vol. 63, pp. 1161-1180.

Bacharach, M., (1993), “Variable Universe Games”, in K. Binmore, A. Kirman, P. Tani (Eds.), Frontiers of Game Theory, MIT Press, pp. 255-276.

Bacharach, M., and Bernasconi, M., (1997), “The variable frame theory of focal points: An experimental study”, *Games and Economic Behavior*, Vol. 19, pp. 1-45.

Bacharach, M., and Stahl, D.O., (2000), “Variable-frame level-n theory”, *Games and Economic Behavior*, Vol. 32, pp. 220-246.

Charness, G., and Sontuoso, A., (2023), “The doors of perception: Theory and evidence of frame-dependent rationalizability”, *American Economic Journal: Microeconomics*, Vol.15, pp. 309-344.

Casajus, A., (2000), “Focal Points in Framed Strategic Forms”, *Games and Economic Behavior*, Vol. 32, pp. 263-291.

Heifetz, A., Meier, M., and Schipper, B.C., (2013), “Unawareness, Beliefs, and Speculative Trade”, *Games and Economic Behavior*, Vol. 77, pp.100-121.

Janssen, M.C.W., (2001), “Rationalizing focal points”, *Theory and Decision*, Vol. 50, pp. 119-148.

Milgrom, P., and Stokey, N., (1982), “Information, Trade and Common Knowledge”, *Journal of Economic Theory*, Vol. 26, pp.17-27.

Schelling, T.C., (1960), *The Strategy of Conflict*, Harvard University Press. (河野勝監訳『紛争の戦略：ゲーム理論のエッセンス』2008 年、勁草書房)

中央大学経済研究所
(INSTITUTE OF ECONOMIC RESEARCH, CHUO UNIVERSITY)
代表者　阿部　顕三　（Director: Kenzo Abe）
〒192-0393　東京都八王子市東中野　742-1
(742-1 Higashi-nakano, Hachioji, Tokyo 192-0393　JAPAN)
TEL: 042-674-3271　　+81 42 674 3271
FAX: 042-674-3278　　+81 42 674 3278
E-mail: keizaiken-grp@g.chuo-u.ac.jp
URL: https://www.chuo-u.ac.jp/research/institutes/economic/