AdS/CFT 対応を用いた磁気抵抗効果の現象論的解析

- Phenomenological analysis of magnetoresistance in AdS/CFT correspondence -

物理学専攻　大曲悠馬
Yuma Omagari

概要

カイラル量子異常がある系には、印加する磁場の増大とともに電気抵抗が減少する負の磁気抵抗効果が存在する。一般的に、ゲージ理論と重力理論の対応関係である AdS/CFT 対応を用いることで、ゲージ理論で記述される系の電気伝導度の計算が可能である。本論文では AdS/CFT 対応の代表的なモデルの D3-D7 モデルに着目する。D3-D7 モデルで磁場の存在下で電気伝導度を計算すると、カイラル量子異常の効果があらわに現れない場合でも負の磁気抵抗効果が発現することが知られている。本研究では、D3-D7 モデルにおける電気伝導度の磁場依存性を明らかにするために D3-D7 モデルを簡略化したモデルで電気伝導度の磁場依存性を調べた。その結果、本研究でモデルに導入した相互作用では正の磁気抵抗効果しか発現しないことがわかった。ここから、負の磁気抵抗効果の発現には本研究で導入しなかったタイプの相互作用が必要であることがわかった。

D3-D7 モデル

ここで考える D3-D7 モデルは、N_c（$N_c \gg 1$）枚の D3-brane と 1 枚の D7-brane で構成される [1]。荷電粒子の質量 m は D3-brane と D7-brane の距離によって与えられる。Dp-brane の p は空間方向に広がる次元の数を表していて、D3-brane、D7-brane はそれぞれ空間方向に 3 次元、7 次元の広がりを持つ brane を表す。上記のモデルは、AdS/CFT 対応を用いると 5 次元 AdS-Schwarzschild ブラックホールと 5 次元球面 S^5 からなる時空に D7-brane が埋め込まれたモデルとなる。ここでは、string の張力が 1 となるように、超弦理論における string の長さ l_s を選択する。

AdS-Schwarzschild ブラックホールの時空の計量は、

$$ds^2 = \frac{du^2}{u^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\left(1-u^4/u_H^4\right)^2}{1+u^4/u_H^4}dt^2 + \frac{1}{u^2}\left(1+u^4/u_H^4\right)d\vec{x}^2 \tag{1}$$

である。u はブラックホールの動径座標で、horizon の位置は $u = u_H$、boundary の位置は $u = 0$ である。Hawking 温度は $T = \frac{\sqrt{2}}{\pi u_H}$ となる。また、$d\vec{x}^2$ は 3 次元 Euclid 空間の方向を表す。5 次元球面 S^5 の計量は、

$$d\Omega_5^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2 + \cos^2\theta d\Omega_3^2 \tag{2}$$

である。$d\Omega_d$ は d 次元単位球面の体積要素である。D7-brane は S^3（$S^3 \subset S^5$）に巻き付いている。ここでは $\cos\theta = 1$ の場合を考える。DBI 作用は、

$$S_{D7} = -T_{D7}\int d^8\zeta\sqrt{-\det\left(g_{ab}+F_{ab}\right)} \tag{3}$$

で与えられる。また、T_{D7} は D7-brane の張力、ζ は世界体積の座標、g_{ab} は世界体積の誘導計量、$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ は世界体積上の $U(1)$ ゲージ場の強さである。また、a と b は世界体積の添字であり、荷電粒

子の $U(1)$ ゲージ場に対する電荷は ± 1 であるとする。なお、以下で考察する設定では Wess-Zumino 項はスイッチオンされない。

このモデルでの電気伝導度の磁場依存性を評価してみよう [2]。ゲージ場の成分が

$$\begin{cases} A_x(t,u) = -Et + f_x(u) \quad , \\ A_y(x,u) = -B_z x + f_y(u) \quad , \\ A_z(y,u) = -B_x y + f_z(u) \quad , \end{cases} \tag{4}$$

で与えられるとする。ここで、

$$\xi = (|g_{tt}|g_{xx} - \tilde{E}^2)(g_{xx}^2 + \tilde{B}_x^2) + |g_{tt}|g_{xx}\tilde{B}_x^2 \quad , \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \chi = \quad & |g_{tt}|g_{xx}^2 \mathcal{N} \cos^6\theta - \left(\langle J^x \rangle^2 + \langle J^y \rangle^2 \right) \\ & + \left(\frac{|g_{tt}|g_{xx}}{g_{xx}^2 + \tilde{B}_x^2} \langle J^t \rangle^2 - \frac{|g_{tt}|g_{xx}}{|g_{tt}|g_{xx} - \tilde{E}^2} \langle J^z \rangle^2 \right) \quad , \end{aligned} \tag{6}$$

$$a_1 = \left(|g_{tt}|g_{xx} B_z \langle J^t \rangle + \left(g_{xx}^2 + \tilde{B}_x^2 \right) E \langle J^y \rangle \right) \quad , \tag{7}$$

$$a_2 = \left((|g_{tt}|g_{xx} - \tilde{E}^2) B_x \langle J^x \rangle + |g_{tt}|g_{xx} B_z \langle J^z \rangle \right) \tag{8}$$

と定義する。有効ホライズン u_* は $\xi(u_*) = 0$ から求めることができ、

$$\frac{u_*^4}{u_H^4} = G - \sqrt{G^2 - 1} \tag{9}$$

となる。ここで $0 < u_*/u_H < 1$ となるように符号を選んだ。また、これに伴い以下の無次元量を導入した。

$$G \equiv e^2 - b_z^2 - b_x^2 + \sqrt{(e^2 - b_z^2)^2 + (b_x^2 + 1)\,(b_x^2 + 1 + 2(e^2 + b_z^2))} \quad , \tag{10}$$

$$e \equiv \pi\alpha' u_H^2 E = \frac{E}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}T^2} \quad , \tag{11}$$

$$b_z \equiv \pi\alpha' u_H^2 B_z = \frac{B_z}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}T^2} \quad , \tag{12}$$

$$b_x \equiv \pi\alpha' u_H^2 B_x = \frac{B_x}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}T^2} \quad . \tag{13}$$

$u = u_*$ における g_{xx}^2 は (9) 式より、

$$g_{xx}(u)^2\big|_{u=u_*} = \frac{\pi^4 T^4}{2}(1 + G) \equiv \pi^4 T^4 \mathcal{F}(e, b_x, b_z) \tag{14}$$

のように得られる。

ここで $b_z = 0$ の場合を考えると、これらより伝導度テンソルは

$$\sigma_{xx} = \frac{N_c T}{4\pi}\sqrt{\frac{(\mathcal{F}+b_x^2)}{\sqrt{\mathcal{F}}}} \quad , \tag{15}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0 \quad , \tag{16}$$

が求まる。$b_x \ll 1$ の領域では

$$\sigma_{xx} = \frac{N_c T}{4\pi}\left((1+e^2)^{\frac{1}{4}} + \frac{b_x^2}{2(1+e^2)^{\frac{3}{4}}}\right) + \mathcal{O}(b_x^3) \quad . \tag{17}$$

となり、この系は負の磁気抵抗効果を示すことが分かる [3]。

解析

本研究では (3) のモデルの高階微分項を落として簡単化し、現象論的に一般化して解析をおこなった。

$$S = \int d^4x du \mathcal{L} = \int d^4x du \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{c}{2}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)^2\right] \quad . \tag{18}$$

ここで、現象論的に一般化したモデルとするためにパラメータ c を導入した。また、Eddington-Finkelstein 座標を導入し、(1) の時空の計量を

$$ds^2 = -\frac{f(u)}{u^2}d\tau^2 - \frac{2}{u^2}d\tau du + \frac{1}{u^2}d\vec{x}^2 \quad , \tag{19}$$

$$f(u) = 1 - \frac{u_H^4}{u^4} \tag{20}$$

として計算する。ここで τ は時間座標である。

本研究ではここに以下の電場と磁場を印加して電気伝導度を計算した。

$$A_x = -E_x\tau + h(u) \quad , \tag{21}$$

$$F_{yz} = -F_{zy} = B_x \quad . \tag{22}$$

電流密度の期待値は

$$J_x = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_x'(u)} \tag{23}$$

である。ここで、J_x は A_x の運動方程式を解いた際の積分定数であり、J_x の具体的な値を求めることができない。そのため、解の正則性の観点から J_x の値を定める。解の正則性として $\mathcal{F} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ が重力側の時空中で発散しないことを要請する。そのために patchwork 条件とよばれる条件を課す必要がある。それは以下の 2 式で表すことができる [4]。

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial J_x(u,h')}{\partial u}\right|_{u=u_*} = 0 \quad , \\ \left.\dfrac{\partial J_x(u,h')}{\partial h'}\right|_{u=u_*} = 0 \quad . \end{cases} \tag{24}$$

これを解いて代入すると、$c=0$ のとき電流密度の期待値は

$$J_x = -\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x'(u)}\right|_{u=u_*} = \left.\frac{E + h^{'} f(u)}{u}\right|_{u=u_*} \tag{25}$$

となる。(25) 式の右辺からは B_x が消えており、$c=0$ のモデルでは電気伝導度に磁場依存性が現れないことが分かる。

$c \neq 0$ のときも同様の計算をすると、

$$J_x = -\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x'(u)}\right|_{u=u_*} = \left(2 - \frac{B_x^2}{(\pi T)^4} c\right) \frac{E_x}{(\pi T)^2} - \frac{c E_x^3}{2(\pi T)^6} + O\left(\left(\frac{E_x}{T^2}\right)^4\right) \tag{26}$$

となる。

この結果から分かるように、$c>0$ である限り、B_x の増加とともに電流密度の期待値が減少するため、このモデルの磁気抵抗効果は正となる。また、$c<0$ とすると解の正則性が保たれないことも知られている。これより、ここで扱った範囲のモデルでは、負の磁気抵抗効果は実現されないことが分かった。そのため、この簡略化したモデルに導入した相互作用のみでは、(3) のモデルが示す負の磁気抵抗効果を説明することができないことが判明した。

考察

本研究では、DBI 作用を用いた先行研究での計算結果の理解を深めるため、DBI 作用をゲージ場のべきで展開して単純化したモデルにおいて $F_{yz} = -F_{zy} = B_x$ を導入して電気伝導度の磁場依存性を計算した。展開の最低次のみを採用した最も単純なモデルにおける電気伝導度の計算結果では、電気抵抗の磁場依存性は確認できなかった。その次に単純な非線形項を追加したモデルにおいて電気抵抗を計算したところ、磁場依存性が確認できた。また、その振る舞いからこれは正の磁気抵抗効果であることが確認できた。このため、元のモデルに存在していたが、本研究では簡略化のために落とした項のいずれかが負の磁気抵抗効果に寄与していると考えられる。

参考文献

[1] Andreas Karch and Emanuel Katz. Adding flavor to AdS/CFT. *JHEP*, Vol. 06, p. 043, 2002.

[2] Martin Ammon, Thanh Hai Ngo, and Andy O'Bannon. "Holographic Flavor Transport in Arbitrary Constant Background Fields". *JHEP*, Vol. 10, p. 027, 2009.

[3] Andrew Baumgartner, Andreas Karch, and Andrew Lucas. Magnetoresistance in relativistic hydrodynamics without anomalies. *JHEP*, Vol. 06, p. 054, 2017.

[4] Shuta Ishigaki, Shin Nakamura, and Kazuaki Takasan. On the regularity conditions for holographic nonlinear responses: electric conductivity and friction coefficient. arXiv:2303.02633 [hep-th].