

修士論文要旨 (2023 年度)

無限平板上の方形溝による平面 E 波の回折

Plane Wave Diffraction by a Rectangular Trough on an Infinite Plane:

The Case of E Polarization

電気電子情報通信工学専攻 内田 莉緒

Graduate School of Electrical, Electronic, and Information Engineering Rio UCHIDA

1. はじめに

近年、レーダによる物体の形状認識の分野において、物体の特徴ある形状が散乱・回折に関する解析において重要なのは、物体のレーダ断面積 (Radar Cross Section ; RCS) の予測・低減であり、これはレーダによる航空機等の形状認識に貢献する。

無限平板上の方形溝による、電磁波の散乱問題は、傷やクラック等に対する認識が可能なことから非破壊検査への応用等が考えられる。また、方形溝は航空機の媒体表面にできた亀裂をモデル化したもので、広範囲の入射角に対し、高い RCS 値を示すことが知られている。

RCS の問題に関しては多くの報告がなされてきたが、その中で多数を占める高周波漸近解法、数値解析を用いた報告には周波数、寸法、入射角、観測角に対する制限がある。しかし、波動の散乱・回折問題に対する代表的な厳密解法である、Wiener-Hopf 法を用いた報告では、散乱体の寸法があまり小さくない限り有効となる解が得られている。無限平板上の方形溝に関しても多くの報告がなされているが[1][2]、本論文では、この形状に関し、Wiener-Hopf 法を用いて、平面 E 波の散乱問題の解析を行う。時間因子は $e^{-i\omega t}$ と仮定し、以下において全ての記述から省略する。

2. 変換波動方程式

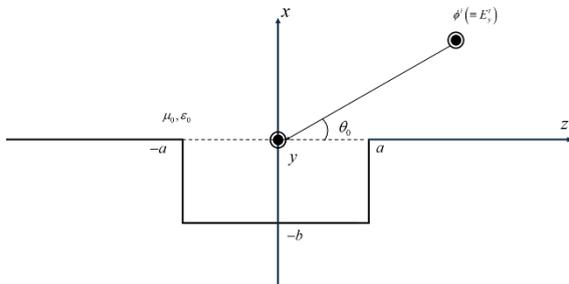


図 2.1. 無限平板上の方形溝

図 2.1 に示すような無限平板上の方形溝による平面 E 波の散乱問題を解析する。方形溝を構成する平板は完全導体で y 軸方向に一様である。

入射界 $\phi^i (\equiv H_y^i)$ は次式で与えられる。

$$\phi^i(x, z) = e^{-ik(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)},$$

$$k = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}, \quad 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}. \quad (2.1)$$

全電界 $\phi^t (\equiv E_y^t)$ を、

$$\phi^t(x, z) = \phi^i(x, z) + \phi^r(x, z) + \phi(x, z), \quad x > 0,$$

$$= \phi(x, z), \quad -b < x < 0 \quad (2.2)$$

で定義する。但し、 $\phi^r(x, z)$ は無限導体平板からの反射界を表し、

$$\phi^r(x, z) = e^{ik(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)} \quad (2.3)$$

により定義される。このとき全電界 ϕ^t は、以下に示す 2 次元波動方程式を満足する。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \phi^t(x, z) = 0. \quad (2.4)$$

また、零でない電磁界成分については次式に示すような関係が成り立つ。

$$(E_y^t, H_x^t, H_z^t) = \left[\phi^t, \frac{i}{\omega \mu_0} \frac{\partial \phi^t}{\partial z}, \frac{1}{i \omega \mu_0} \frac{\partial \phi^t}{\partial x} \right]. \quad (2.5)$$

また、Fourier 積分を

$$\Phi_{\pm}(x, \alpha) = \pm (2\pi)^{-1/2} \int_{\pm a}^{\pm \infty} \phi(x, z) e^{i\alpha(z \mp a)} dz, \quad (2.6)$$

$$\Phi_1(x, \alpha) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-a}^a \phi(x, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.7)$$

により導入する。次に、変換波動方程式を導出する。

(i) 領域 $x > 0$

波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \phi(x, z) = 0 \quad (2.8)$$

に Fourier 変換を施すと、

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \gamma^2 \right) \Phi(x, \alpha) = 0, \quad |\alpha| < k_2 \cos \theta_0 \quad (2.9)$$

を得る。

式(2.9)は領域 $x > 0$ における変換波動方程式である。

(ii)領域 $-b < x < 0$

この領域での波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \phi(x, z) = 0, \quad (2.10)$$

の両辺に $(2\pi)^{-1/2} e^{iaz}$ を掛け、 $a < z < -a$ の範囲で積分し整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \gamma^2 \right) \Phi(x, \alpha) \\ = e^{iaa} f(x) - e^{-iaa} g(x). \end{aligned} \quad (2.11)$$

式(2.11)は領域 $-b < x < 0$ における変換波動方程式である。

3. $x = 0$ における境界条件

まず、方形溝開口面における境界条件について考察する。次の各式が得られる。

$$\frac{\partial \phi(+0, z)}{\partial z} = 0, \quad |z| > a, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \phi(+0, z)}{\partial x} = \frac{\partial \phi(-0, z)}{\partial x}, \quad |z| < a, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(+0, z)}{\partial x} - \frac{\partial \phi(-0, z)}{\partial x} \\ = -2ik \sin \theta_0 e^{-ikz \cos \theta_0}, \quad |z| < a. \end{aligned} \quad (3.3)$$

式(3.1), (3.2), (3.3)は実空間での、 $x = 0$ における境界条件である。

次に、式(3.1), (3.2), (3.3)の Fourier 変換領域における表現を導くと、次の各式が得られる。

$$\Phi_{\pm}'(+0, \alpha) = 0, \quad (3.4)$$

$$\Phi_1'(+0, \alpha) = \Phi_1'(-0, \alpha), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(+0, \alpha) - \Phi_1(-0, \alpha) \\ = \frac{Ae^{-iaa} - Be^{iaa}}{\alpha - k \cos \theta_0}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

式(3.4), (3.5), (3.6)は Fourier 変換領域での $x = 0$ における境界条件である。

4. 散乱界の表現

(i)領域 $x > 0$

式(2.9)の解を x で微分して $x = +0$ と置き、式(3.4)を考慮すると、

$$\Phi(x, \alpha) = \Phi_1'(+0, \alpha) e^{-\gamma x} \quad (4.1)$$

を得る。

(ii)領域 $-b < x < 0$

式(2.11)を便宜上

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \gamma^2 \right) \Phi(x, \alpha) = h(x, \alpha) \quad (4.2)$$

と書く。但し、

$$h(x, \alpha) = e^{iaa} f(x) - e^{-iaa} g(x). \quad (4.3)$$

式(4.2)の解を求め境界条件を考慮し積分を評価すると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \Phi(x, \alpha) = \Phi_1(0, \alpha) \frac{\sinh \gamma(x+b)}{\sinh \gamma b} \\ - \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-iaa} f_n - e^{iaa} g_n}{\alpha^2 + \gamma_n^2} \sin \frac{n\pi}{b} x \end{aligned} \quad (4.4)$$

式(4.1), (4.4)は、Fourier 変換領域における散乱界の表現であり、帯状領域 $|\tau| < k_2 \cos \theta_0$ で成り立つものである。

5. Wiener-Hopf 方程式

式(4.1), (4.4)をそれぞれ $x = +0, -0$ とおき、差をとり式(3.5), (3.6)を考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1'(+0, \alpha)}{N(\alpha)} = e^{-iaa} U_-(\alpha) + e^{iaa} U_+(\alpha) \\ - \frac{2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \frac{e^{iaa} f_n - e^{-iaa} g_n}{\alpha^2 + \gamma_n^2}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

を得る。但し、

$$N(\alpha) = \frac{e^{-\gamma b} \sinh \gamma b}{\gamma}. \quad (5.2)$$

$$U_-(\alpha) = \Phi_-'(+0, \alpha) + \frac{A}{\alpha - k \cos \theta_0}, \quad (5.3)$$

$$U_+(\alpha) = \Phi_+'(+0, \alpha) - \frac{B}{\alpha - k \cos \theta_0}, \quad (5.4)$$

式(5.1)は Wiener-Hopf 方程式であり、帯状領域 $-k_2 < \tau < k_2 \cos \theta_0$ において成り立つ。なお、式中に現れる $N(\alpha)$ は、この問題の核関数である。

6. Wiener-Hopf 方程式の分解

$N(\alpha)$ に和形式の分解を施すと、次式が導かれる。

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{i\alpha a} \Phi_1(0, \alpha)}{N_+(\alpha)} \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{e^{2i\beta a} N_-(\beta) U_{(+)}(\beta)}{\beta - \alpha} d\beta \\
& + \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \frac{N_+(i\gamma_n)(e^{2a\gamma_n} f_n - g_n)}{2i\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} \\
& = N_-(\alpha) U_-(\alpha) \\
& + \int_{c_2} \frac{e^{2i\beta a} N_-(\beta) U_{(+)}(\beta)}{\beta - \alpha} d\beta \\
& - \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \frac{n\pi}{b} \frac{1}{\alpha + i\gamma_n} \\ \frac{N_-(\alpha)(e^{2i\alpha a} f_n - g_n)}{\alpha - i\gamma_n} \\ + \frac{N_+(i\gamma_n)(e^{2a\gamma_n} f_n - g_n)}{2i\gamma_n} \end{array} \right\}. \quad (6.1)
\end{aligned}$$

同様に和形式の分解を施すと、次式が導かれる。

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-i\alpha a} \Phi'_1(+0, \alpha)}{N_-(\alpha)} \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{e^{-2i\beta a} N_+(\beta) U_-(\beta)}{\beta - \alpha} d\beta \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{N_+(\beta) U_{(+)}(\beta)}{\beta - \alpha} d\beta \\
& + \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \frac{N_+(i\gamma_n)(f_n - e^{2a\gamma_n} g_n)}{2i\gamma_n(\alpha - i\gamma_n)} \\
& = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{e^{-2i\beta a} N_+(\beta) U_-(\beta)}{\beta - \alpha} d\beta \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{N_+(\beta) U_{(+)}(\beta)}{\beta - \alpha} d\beta \\
& + \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \frac{n\pi}{b} \frac{1}{\alpha - i\gamma_n} \\ \frac{N_+(\alpha)(f_n - e^{-2i\alpha a} g_n)}{\alpha + i\gamma_n} \\ - \frac{N_+(i\gamma_n)(f_n - e^{2a\gamma_n} g_n)}{2i\gamma_n} \end{array} \right\}. \quad (6.2)
\end{aligned}$$

式(6.1), (6.2)は Wiener-Hopf 方程式(5.1)に対し、帯状領域 $|\tau| < k_2 \cos \theta_0$ で分解操作を施したものである。式(6.1), (6.2)の両辺は Liouville の定理より恒等的に零となることが知られている。両式の右辺, 左辺を零と置き, 整理することで式が得られる。これ

らは, 2 個の未知関数 $U_-(\alpha), U_{(+)}(\alpha)$ の解を満足する連立積分方程式である。

7. 形式解

(6.1) と (6.2) の積分を評価し, 形式解を求める。

$$\begin{aligned}
& -N_-(\alpha) U_-(\alpha) \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2i\beta a} \sinh^2 \left\{ (\beta^2 - k^2)^{1/2} b \right\}}{2(\beta - k)^{1/2}} \frac{U_{(+)}(\beta)}{N_+(\beta)(\beta - \alpha)} d\beta \\
& + \frac{BN_-(k \cos \theta_0)}{\alpha - k \cos \theta} \\
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b^2} \frac{1}{\alpha + i\gamma_n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{N_-(\alpha)(f_n - e^{2i\alpha a} g_n)}{\alpha - i\gamma_n} \\ + \frac{N_+(i\gamma_n)(f_n - e^{2\gamma_n} g_n)}{2i\gamma_n} \end{array} \right\} \\
& = 0, \quad (7.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -N_+(\alpha) U_{(+)}(\alpha) \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2i\beta a} \sinh^2 \left\{ (\beta^2 - k^2)^{1/2} b \right\}}{2(\beta^2 - k^2)^{1/2}} \frac{U_-(\beta)}{N_+(\beta)(\beta + \alpha)} d\beta \\
& - \frac{BN_+(k \cos \theta_0)}{\alpha - k \cos \theta_0} \\
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b^2} \frac{1}{\alpha - i\gamma_n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{N_+(\alpha)(e^{2i\alpha a} f_n - g_n)}{\alpha + i\gamma_n} \\ - \frac{N_+(i\gamma_n)(e^{2a\gamma_n} f_n - g_n)}{2i\gamma_n} \end{array} \right\} \\
& = 0, \quad (7.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{i\alpha a} \Phi_1(0, \alpha)}{N_+(\alpha)} \\
& + e^{2i\alpha a} N_-(\alpha) U_{(+)}(\alpha) \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2i\beta a} \sinh^2 \left\{ (\beta^2 - k^2)^{1/2} b \right\}}{2(\beta^2 - k^2)^{1/2}} \cdot \\
& \frac{U_{(+)}(\beta)}{N_+(\beta)(\beta - \alpha)} d\beta + \frac{BN_-(k \cos \theta_0)}{(\alpha - k \cos \theta_0)} \\
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b^2} \frac{N_+(i\gamma_n)(f_n - e^{2a\gamma_n} g_n)}{2i\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} \\
& = 0, \tag{7.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-i\alpha a} \Phi_1(0, \alpha)}{N_-(\alpha)} \\
& + e^{-2i\alpha a} N_+(\alpha) U_-(\alpha) \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2i\beta a} \sinh^2 \left\{ (\beta^2 - k^2)^{1/2} b \right\}}{2(\beta^2 - k^2)^{1/2}} \cdot \\
& \frac{U_-(-\beta)}{N_+(\beta)(\beta + \alpha)} d\beta - \frac{BN_+(k \cos \theta_0)}{\alpha - k \cos \theta_0} \\
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b^2} \frac{N_+(i\gamma_n)(e^{2a\gamma_n} f_n - g_n)}{2i\gamma_n(\alpha - i\gamma_n)} \\
& = 0. \tag{7.4}
\end{aligned}$$

Wiener-Hopf 方程式に分解操作を行い、それぞれの式に現れる積分を評価すると式(7.1), (7.2), (7.3), (7.4)が得られる。式(7.1), (7.2), (7.3), (7.4)は Wiener-Hopf 方程式(5.1)に対する厳密解であり、Wiener-Hopf 方程式に対する解 $U_-(\alpha), U_{(+)}(\alpha), \Phi_1'(0, \alpha)$ の具体形を与える。ところが、式中には未知関数を被積分関数にもつ無限積分並びに無限個の未知数を一般項に持つ無限級数が含まれているため、これらは形式解にすぎない。

8. 散乱界

実空間における散乱界は、式(4.1), (4.4)に対し、次式で定義される Fourier 逆変換を施すことによって得られる。

$$\phi(x, z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty+iC}^{\infty+iC} \Phi(x, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha. \tag{8.1}$$

8.1 方形溝内部の散乱界

$$\begin{aligned}
& \phi'(x, \alpha) \\
& = (2\pi)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b\gamma_n} \sin \frac{n\pi}{b} x \begin{bmatrix} f_n e^{-\gamma_n(z-a)} \\ -g_n e^{\gamma_n(z+a)} \end{bmatrix} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} [T_{1n} e^{-\gamma_n(z-a)} - T_{2n} e^{\gamma_n(z+a)}] \sin \frac{n\pi}{b} x. \tag{8.2}
\end{aligned}$$

式(8.2)は方形溝内部への透過界を表し、方形溝内の TE モードとなっている。

8.2 方形溝外部の散乱遠方界

方形溝から十分離れた遠方における散乱界の漸近表現を導出する方形溝から十分離れた遠方では、領域 $-b < x < 0$ の存在は無視しうから、この微小領域における散乱遠方界はあまり重要ではない。故に、以下においては領域 $x > 0$ における散乱遠方界の導出のみ行うこととする。

$$\begin{aligned}
& \phi(\rho, \theta) \sim \Phi_1(0, -k \cos \theta) \\
& k \sin |\theta| \frac{e^{i(k\rho - \frac{\pi}{4})}}{(k\rho)^{1/2}}, \tag{8.3} \\
& -\pi < \theta < \pi,
\end{aligned}$$

を得る。式(8.3)は方形溝外部の散乱遠方界である。

9. 結論

本論文では、無限平板上の方形溝による散乱問題を取り上げ、E 波入射の場合について Wiener-Hopf 法を用いて厳密に解析した。

未知の散乱界に対し、Fourier 変換を導入し、変換領域において境界条件を適用し、Wiener-Hopf 方程式として定式化した。また、Wiener-Hopf 方程式より求めた核関数に対して、分解操作を施した。更に、Wiener-Hopf 方程式を解くことにより厳密解(形式解)を導出し、Fourier 逆変換により方形溝内部及び外部の散乱界を得た。特に、方形溝外部の散乱界は鞍部点法を適用し、散乱遠方界を導出した。

本研究では E 波を扱い導体平板上の方形溝による平面波の散乱界の導出を行った。これらの結果から導出した平面波における無限平板上の方形溝の Wiener-Hopf 方程式に表れる、核関数を分解した $N_+(\alpha)$ の数値計算をガウス・ルジャンドル法を用いて行い、グラフにしてその特性を検討する予定であった。しかし、数値計算が終了しなかったため、本研究は同研究室の学生に引き継いでもらう予定である。

参考文献

- [1] A. Buyukaksoy, F. Birbir and E. Erdogan, "Scattering characteristics of a rectangular groove in a reactive surface", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 43, no. 12, Dec 1995.
- [2] 白井宏, 佐藤亮一, "導体平板上のギャップによる平面電磁波の散乱", 電子情報通信学会論文誌. C-1, エレクトロニクス 1-光・波動, vol 80, No. 5, pp179-185, 1997.