エレファントランダムウォークによる市場について

The Market composed of elephant random walk

ビジネスデータサイエンス専攻 平山凌太朗

1 研究目的

本論文においては [4] にて最初に紹介された過去に依存して現在の動きが決定される離散時間の確率過程である、エレファントランダムウォーク (以下では ERW と表記する) を用いて離散時間の 2 項タイプの完備な市場モデルを構成する。離散時間の 2 項タイプの市場モデルとしては CRR モデルが広く知られているが、例えば [1] では CRR モデルの問題点としてとり得る原資産価格の範囲が大きく、オプションの価格を過大評価してしまうことを挙げている。そのために [1] では平均回帰性を持つ 2 項モデルを構成してその問題を改善しているが、このモデルは完備性を持たない。そこで本論文では過去に依存してパラメータの設定によっては平均回帰に近い性質、あるいはその逆の性質を持つ ERW をリスク中立測度における原資産価格変動として取り入れることでその問題を回避することが可能と考え、ERW を用いた市場を構成し、その性質について考察する。

2 ERW

本論文では ERW を以下のように定義する。

定義 1. *ERW* をフィルトレーション $\mathcal{F}_t$ 付きの確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上で定義する。初期位置を X_0 として *ERW* の時刻 t での位置は

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^{t} x_k \tag{1}$$

このように表される。簡単のため以降では $X_0 = 0$ とする。$0 < p, q < 1$ として、時刻 t での動き x_t については

1. $P(x_1 = 1) = q,\ P(x_1 = -1) = 1 - q$
2. $P(x_{t+1} = 1 | x_1, \ldots, x_t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(2p-1)\sum_{k=1}^{t} x_k}{2t},$

   $P(x_{t+1} = -1 | x_1, \ldots, x_t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{(2p-1)\sum_{k=1}^{t} x_k}{2t}$

このように条件付き確率を用いて決まる。次の図は増分の相関係数 $\rho(X_t, X_t - X_s)$ をプロットしたものである。パラメータは $t = 20, s = 10, q = 0.5$ とし $a(:= 2p-1)$ については -0.9 から 0.9 までを 0.1 刻みとしている。

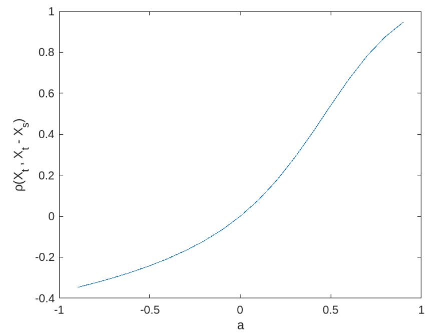

図 1

図 1 を見ると相関係数は $a > 0$ のときは正、$a < 0$ のときは負となっており、それぞれ s 時点から t 時点までの動きは s 時点での位置と正か負の意味で同じ方向に、あるいは逆方向になりやすいことが分かる。

3　ERW による市場

市場モデルをフィルトレーション $\mathcal{F}_t$ 付きの有限な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で構成する。市場には価値の推移が確率的な株と決定的な債券が 1 つずつ存在しているとする。具体的には以下のように構成する。
株価の初期値は S_0 とし、$0, 1, 2, \ldots, T$ 時点での株価は以下のように表される。

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t(1 + r - \frac{\alpha\sigma X_t}{t} + x_{t+1}\sigma) & t = 1, 2, \ldots, T-1 \text{ のとき}, \\ S_t(1 + r + x_1\sigma) & t = 0 \text{ のとき}, \end{cases} \tag{2}$$

t 時点における安全債券の価格は

$$B_t = (1 + r)^t \tag{3}$$

各パラメータについては、$-1 < \alpha < 1, 0 < \sigma < \frac{1+r}{1+\alpha}, r \in \mathbb{R}$ であるものとする。起こり得る状態全体の集合は $\Omega = \{1, -1\}^T$ とし、$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_T = \mathcal{F} = 2^\Omega,\ \mathcal{F}_t = \sigma(x_1, \ldots, x_t)$ とする。P については任意の $\omega \in \Omega$ について $P(\omega) > 0$ であるとする。
このとき、市場にはリスク中立測度が存在する。実際

1. $Q(x_1 = 1) = \dfrac{1}{2},\ Q(x_1 = -1) = \dfrac{1}{2}$
2. $Q(x_{t+1} = 1 | x_1, \ldots, x_t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha\sum_{k=1}^t x_k}{2t}, Q(x_{t+1} = -1 | x_1, \ldots, x_t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\alpha\sum_{k=1}^t x_k}{2t}$

とすれば Q はリスク中立測度である。リスク中立測度の形から、リスク中立の場合でも ERW の性質が保持されていることが分かる。そして以下の命題が成り立つ。

命題 1. *ERW* による市場は完備である。

市場が完備であることから、先のリスク中立測度がただ一つのものであること、条件付き請求権の価格付けが可能であることが分かる。市場の下での条件付き請求権の価格を知る上では、リスク中立測度における株価のパスについて知ることが重要である。以下の図はパラメータを α は $-0.5,\ 0,\ 0.5$ の 3 通り、その他は $r = 0.05,\ \sigma = 0.2,\ T = 20,\ S_0 = 1$ として株価のパスを 100 本ずつ生成したものである。すべてのグラフに共通する黒線は安全債券の価格を表したものである。

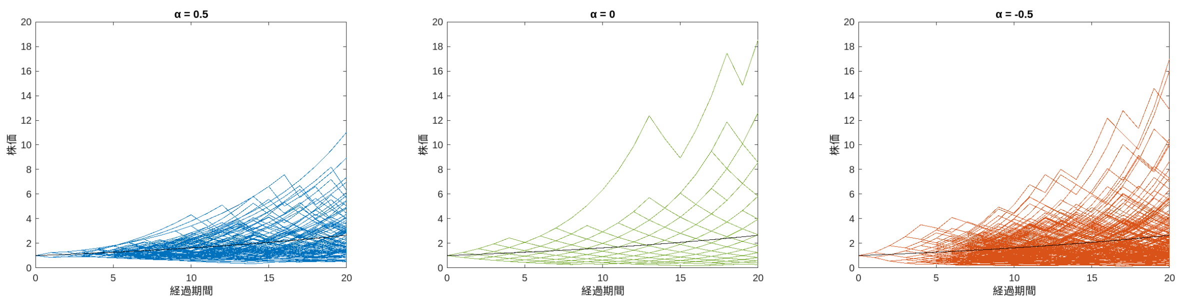

図 2

それぞれの場合を株価変動の式とグラフから考察する。

■$\alpha = 0.5$ のとき

式 (2) に注目すると $X_t > 0$ であれば $-\frac{\alpha\sigma X_t}{t} < 0$ であり、$X_t < 0$ であれば $-\frac{\alpha\sigma X_t}{t} > 0$ であることから、言い換えると上昇と下降、いずれかのうち今まで多かった方と同じ動きをする場合はその幅が小さく、反対に動く場合はその幅が大きいということになる。またリスク中立測度に注目すると、$\alpha > 0$ の場合は $p > 0.5$ ということになることから、ERW の性質から過去と同じ動きをしやすいということが分かる。そのため、いずれか一方の動きに偏りやすいがその幅は小さく、確率は低いものの偏っている方とは逆の動きをする場合はその幅が大きくなるという性質を持つ。

■$\alpha = 0$ のとき

グラフを見ると分かるようにとる値が格子状になっており、これはドリフト項を r ボラティリティを σ とした CRR モデルと株価変動の式が一致していることからも分かる。そのため示す性質は CRR モデルのものと変わらない。

■$\alpha = -0.5$ のとき

$\alpha = 0.5$ のときとは反対の性質を持っており、式 (2) に注目すると $X_t > 0$ であれば $-\frac{\alpha\sigma X_t}{t} > 0$ であり、$X_t < 0$ であれば $-\frac{\alpha\sigma X_t}{t} < 0$ であることから、言い換えると上昇と下降、いずれかのうち今まで多かった方と同じ動きをする場合はその幅が大きく、反対に動く場合はその幅が小さいということになる。リスク中立測度に注目すると、ERW の性質より過去と異なる動きをしやすいことから、いずれか一方の動きに偏らずに上昇と下降が同程度の回数となりやすいが、いずれかに偏った場合はその変化幅が大きいという性質を持つ。

これらのことを踏まえたうえで、コールオプションの価格の価格を計算する。以下の図は左が各パラメータを $\sigma = 0.5,\ r = 0.05,\ S_0 = 1,\ T = 20$ とし、α を $-0.75, -0.25, 0, 0.25, 0.75$ の 5 種類、行使価格を 1 から 30 と設定してプロットしたもの、右図は左図と同じ条件でリスク中立測度の下での満期の株価の標準偏差をプロットしたものである。

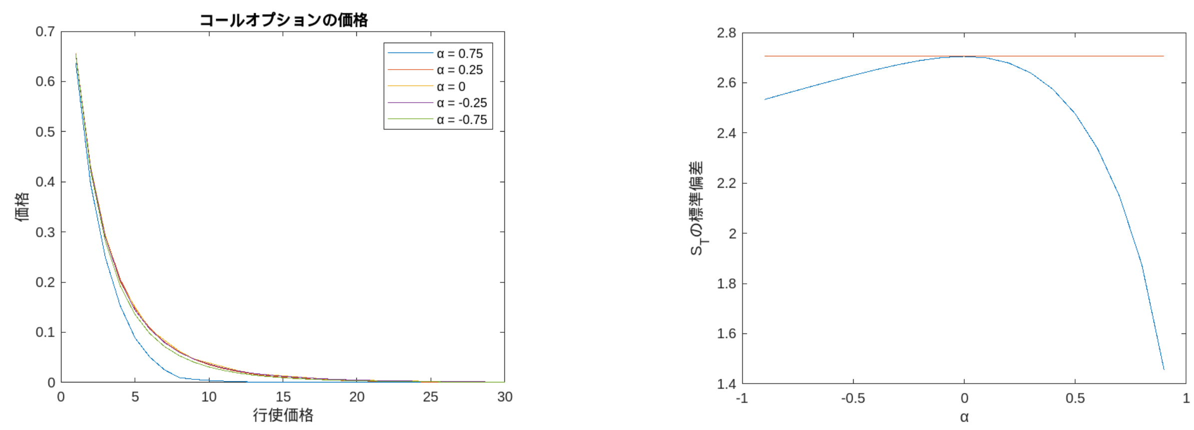

図 3

左図を見ると $\alpha = 0.75$ の場合がその他の場合に比べて価格が顕著に低くなっている。次点で $\alpha = -0.75$ の場合に価格が低くなっており、α に対して単調な変化ではないこと分かる。コールオプションの性質より、満期の株価の標準偏差が大きいほど価格が高くなると考えられることから、右図と合致した結果であると考えられる。α が正であっても負であっても標準偏差が低くなっている理由については、正の場合は ERW 自体の動きは正か負のいずれかに偏りやすいが、株価の動きはいずれか一方に偏りづらくなっており、負の場合は ERW 自体の動きは正か負のいずれかに偏りづらいが、株価の動きはいずれか一方に偏りやすくなっている。いずれの場合においても、標準偏差が大きくなる要因と小さくなる要因を持っているが、小さくなる働きの方が優位に働いている

と考えられる。

4　終わりに

本論文では ERW を用いた市場について紹介した。市場が完備であることを確認し、その市場におけるリスク中立測度のもとでの原資産価格の満期時点の標準偏差はドリフト項を安全債券の利率とした CRR モデルのものよりも低くなっていることが分かり、パラメータによっては大きな差が出る結果となった。それに伴い、コールオプションの価格も低くなっていることが確認できた。また、本論文では扱うことができなかったこととして

- 条件付き請求権の価格の式をより整理された状態で表す。
- 時間間隔を細かくすることで構成される連続時間での市場の性質を調べる。
- ERW の性質が保持できる、原資産価格が格子状になる市場を構成する。

これらのことが挙げられる。特に 2 つ目については構成を試みたものの原資産価格式の複雑さから、それが叶わなかった。連続時間への極限をとることで、CRR モデルの連続極限である BS モデルとの比較を行いたいと考えているため、今後の課題としたい。また、本論文での大筋とは外れているが、ERW 自体の性質として命題 1 を記載した。これについても $p = 0.75$ という部分的なものであり、式として表すことはできているものの、付録での証明における $P_t(a, b)$ の解釈が得られていないため、十分な考察を行いより一般化した結果を得たいと考えている。

参考文献

[1] C. de Lamare Bastian-Pinto. Modeling generic mean reversion processes with a symmetrical binomial lattice-applications to real options. Procedia Computer Science, 55:764–773, 2015.

[2] D. ラムベルトン, B. ラペール. ファイナンスへの確率解析. 朝倉書店, 2009. 森平爽一郎 監修, 青木信隆, 岩村伸一, 大和田亨, 中川秀敏 訳.

[3] S. Roman, et al. An introduction to Catalan numbers. Springer, 2015.

[4] G. M. Schütz and S. Trimper. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-markovian random walk. Physical Review E, 70(4):045101, 2004.

[5] 藤田岳彦. マルチンゲール理論に基づくデリバティブの価格付けと複製ポートフォリオ構築. 日本評論社 (発売), 2001.

[6] 藤田岳彦. ランダムウォークと確率解析 ギャンブルから数理ファイナンスへ. 日本評論社, 2008.