

四面体ペアリングによる境界整合的な六面体メッシュ生成

Tetra-Pairing for Conforming Hex Meshing

情報工学専攻 日高 琉斗
Ryuto HIDAKA

概要

三次元シミュレーションでは、三次元形状のボリューム表現が可能なボリュームメッシュがよく用いられる。中でも、六面体を構成要素とする六面体メッシュは、四面体よりも少ない要素で形状を表現できるなどの利点を持ち、六面体メッシュ生成は多く研究されてきた分野である。特に、入力メッシュの境界を保存する境界制約付きの六面体メッシュは、表面付近でのシミュレーション精度を向上させるが、このようなメッシュの生成は非常に難しい問題である。本研究は、四面体ペアリングを利用した境界整合的な準純六面体メッシュ生成手法を提案し、結果を通じてどのような場合で四面体ペアリングが効率的に動作するか考察することを目的とする。提案手法によって、任意の入力四角形メッシュを境界整合的な準純六面体メッシュに変換できる。また、四面体ペアリングは格子状に配置された内部頂点を持つ場合特に六面体比率の高い準純六面体メッシュを出力することが確認され、ペアリングには内部頂点の配置が重要であるという考察を得た。

キーワード: ボリュームメッシュ, 準純六面体メッシュ, 六面体, ペアリング, 境界整合

1 序論

コンピュータグラフィックスの分野では、簡単な幾何形状の集合により複雑な三次元形状を表現するメッシュという表現法が存在する。一般的には物体の表面のみを表現する表面メッシュが多く利用されるが、特にシミュレーション分野においては物体の材質の考慮などが必要となる関係上、物体のボリューム表現を可能とするボリュームメッシュがよく使われる。ボリュームメッシュには四面体で構成される四面体メッシュや六面体で構成される六面体メッシュなどの種類がある。このうち、六面体メッシュは四面体メッシュと比べて大域的な方向性を持ち要素数も少ないという利点があり、これらの理由から六面体メッシュ生成はこれまでも多くの研究が行われてきた。特に、入力四角形メッシュの境界を保存する

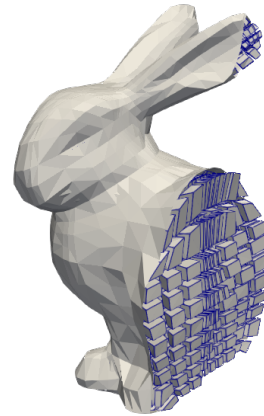


図 1 六面体メッシュの断面の様子。

境界整合的な六面体メッシュの生成は、シミュレーションにおいて境界での計算精度を向上させることに繋がるが、このような制約を持つ六面体メッシュの生成は非常に難しい問題である。本研究では、四面体ペアリングによって境界整合性を保証する六面体メッシュ生成手法を提案する。また、結果を考察し、四面体ペアリングがどのような場合で効果的に働くかを考察する。

2 ボリュームメッシュ

ボリュームメッシュは複数の三次元要素によって構成される (図 1)。特に、構成要素が六面体のみのは純六面体メッシュ (pure hexahedral mesh)、六面体の他に四面体や四角錐、三角柱も含む場合は準純六面体メッシュ (hex-dominant mesh) と呼ぶ。純六面体メッシュは大域的構造を持つため局所操作を行いづらいという特徴を持ち、また四角形面の内部に他の面の辺が入り込む浮遊辺 (dangling edge) が発生する可能性もあり、これらの理由から純六面体メッシュ生成は難しい問題である。その中でも、境界制約 (boundary-constrained) な純六面体メッシュの生成は極めて難しい。境界制約とは、入力された四角形メッシュの全ての面を保存するという制約であり、出力六面体メッシュの表面が入力四角形メッシュと全て一致していることが要求される。Reberol らによる既存研究 [6] では、内部を空洞として表面から一層のみの六面体生成に限るこ

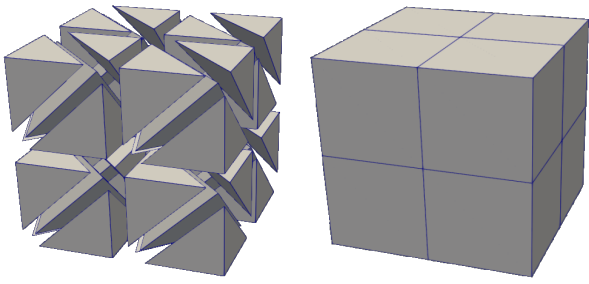


図2 四面体ペアリングの例. 左が入力四面体メッシュ, 右がペアリングにより得られた六面体メッシュ.

とで, 出力ボリュームメッシュの境界制約を得ている. Erickson が提案した四面体の分割手法 [1] を応用すれば, 位相的に正しい境界制約を満たす純六面体メッシュを生成することができる. ただし, この手法で得られる純六面体メッシュは最小正規化ヤコビアンが負の値となる六面体要素を多く含み, また要素数も肥大化してしまう.

本研究では, 境界制約を**境界整合 (boundary-conforming)**に緩めてこの問題に取り組む. 境界整合とは, 入力 of 四角形メッシュの境界細分を許す境界保存の制約であり, 四角形面に対角線を引いて三角形面とすることを許す. これに伴い, 本研究の出力は準純六面体メッシュとする. 準純六面体メッシュは, 純六面体メッシュと比べて要素数が多くなり大域的構造が損なわれるが, 局所操作が適用しやすい柔軟性を持ち構造的制約も緩い. そのため, 境界整合な六面体メッシュ生成には準純六面体メッシュが適している.

3 提案手法

本研究では**四面体ペアリング** [5] を使い準純六面体メッシュを生成する. 四面体ペアリングは四面体メッシュを六面体メッシュに変換する手法の一つであり, 複数の四面体を 1 つの六面体にするペアリングという操作を繰り返すことで六面体メッシュを生成する (図2). この手法はほとんどの場合で余りとなる四面体が発生するため, 準純六面体メッシュが出力となる. 四面体ペアリングの特徴は, 新たな頂点を追加したり新たな接続性を追加することが無いため, 出力される六面体メッシュが境界整合性を持つことである. 提案手法では, 入力された四角形メッシュに対し, まずはじめに境界整合的な四面体メッシュを計算し, その後四面体メッシュをペアリングすることで準純六面体メッシュを生成する. この工程の中では常に境界整合性が保たれるため, 結果的に出力は入力に対して境界整合となる.

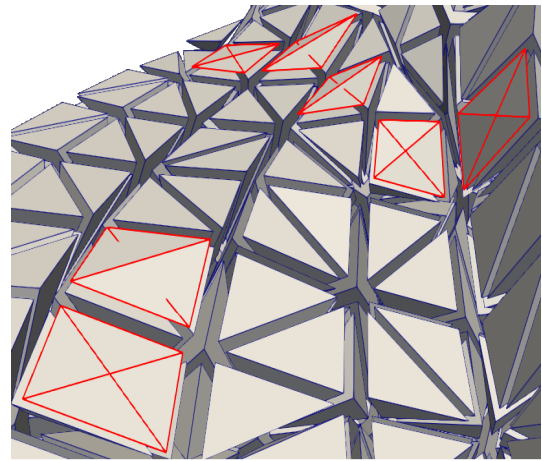


図3 四面体メッシュに存在するスリヴァー. 赤くハイライトされている平たい四面体がスリヴァーである.

3.1 四面体メッシュ化

境界整合的な四面体メッシュを計算するアルゴリズムには制約付きドロネー四面体分割がある. 制約付きドロネー四面体分割では, 入力された三角形メッシュに対し, 表面の三角形の境界を保存しつつ, 内部にシュタイナー点と呼ばれる頂点を追加して四面体分割を行い, 境界整合的な四面体メッシュを出力する.

四面体メッシュ化のために入力四角形メッシュを三角形メッシュに変換する必要がある. これは単純に各四角形面に対角線を引くことで可能であるが, この対角線の引き方によっては図3のような**スリヴァー (sliver)**と呼ばれる平たい四面体が発生しうることには注意する.

3.1.1 半面データ構造

四面体ペアリングでは, ある四面体セルの近傍セルを取得したり, ある頂点の近傍頂点を取得するといった近傍操作を必要とする. **半面データ構造**は近傍探索などの局所操作に適した四面体メッシュのデータ構造であり, 四面体メッシュ化して得られたメッシュはこの半面データ構造によって管理する.

半面データ構造では, 各セルの各有向面である**半面**を中心として局所操作を提供する. メッシュの内部面にあたる半面は, 面の頂点順を逆にした**反対面**を持ち, 境界面にあたる半面は反対面を持たない. 半面データ構造は, 半面から, 半面が接続する3頂点, 半面が接続するセル, および半面の反対面を得られるように設計する. 特に反対面の探索については辞書を用いる. 各セルの各半面についてその頂点順を辞書に登録していき, このときもし辞書に逆順となる3頂点が存在すればそれが反対面となる. これによってすべての半面で反対面を得られる. この反対面の情報を介することでセル間を跨ぐ近傍操作が可能となり, ペアリングの際にこれを活用する.

3.2 四面体ペアリング

四面体ペアリングでは、入力された四面体メッシュの頂点の接続リストをもとに、六面体と同じ接続を持つ8頂点の組み合わせを探索して列挙する。この時、選ばれる8頂点は単純に六面体と同じ接続性を持つだけでなく、6つの面がそれぞれ四角形面を形成していなければならない。

探索して得られた六面体を品質順にソートして、品質の値が高いものを順に最終的な六面体要素として確定していく。六面体の品質 Q は最小正規化ヤコビアンによって計算し、これは次式によって計算される。

$$\det(A_i) = \left| \frac{\mathbf{v}_{i0} - \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_{i0} - \mathbf{v}_i\|} \frac{\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_i\|} \frac{\mathbf{v}_{i2} - \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_{i2} - \mathbf{v}_i\|} \right|$$
$$Q = \min_{i=0, \dots, 7} \{\det(A_i)\}$$

ここで、 \mathbf{v}_i は六面体の各頂点である。 Q は $[-1, 1]$ の値を取り、1に近いほど六面体の品質が高い。列挙した六面体を出力として採択する際には、六面体の品質の下限を設定でき、下限を0とすることで最小正規化ヤコビアンが負となる六面体要素を出力に含まないようにすることができる。

実際に列挙した六面体セルの中から最終的な出力に含むセルを確定した場合、出力される準純六面体メッシュのセル適合性 (compatibility) を保証するため、その六面体セルを構成する四面体セルを探索する操作が必要になる。準純六面体メッシュにおいて任意の2つのセルがセル適合であるとは、次の条件を満たすものを指す。

- 同じ四面体セルを共有しない
- そのセル間で浮遊辺を持たない

1つの四面体が複数の六面体によって共有された場合セル適合性が崩れるため、六面体セルを確定したらその六面体セルを構築する四面体セルを探索し、以降その四面体セルを含む六面体セルを出力には含まないようにする。8頂点内に存在する四面体セルの探索には半面データ構造のセル近傍を取得する操作を用い、8頂点のいずれか4頂点を含む四面体セルを近傍探索で取得する。

ペアリング時に、スリヴァーは1つで六面体の四角形面を構成しうる。図4のように、スリヴァーを介するように2つの六面体候補が列挙されている場合、そのどちらもがそのスリヴァーを構成に含んでしまう。この状態では、セル適合性を保つために、この2つの六面体セルが同時に出力メッシュへ採択されることがなくなってし

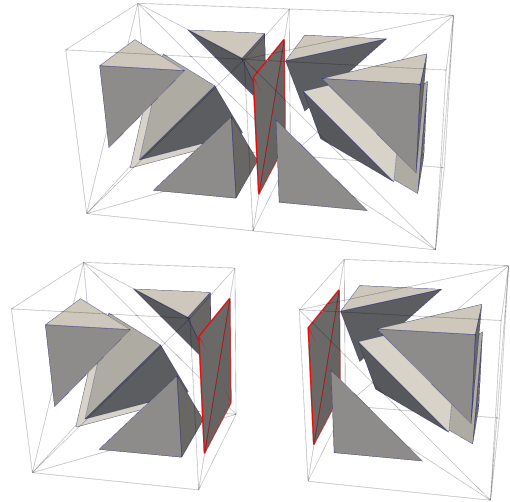


図4 スリヴァーを共有する四面体ペアリングの例。赤で示した四面体がスリヴァー。上は入力四面体メッシュ、下は入力から得られた2つの六面体要素の候補。どちらもスリヴァーを含んでいることがわかる。

まい、出力される六面体の要素数が減ってしまう。ここでは、片方の六面体が出力要素として決定された場合、もう片方の六面体の構成からスリヴァーを除去することによってこの問題を回避する。

4 実験結果

実験では、境界のみを指定したドロネー細分、アドバンスングフロント、および内部頂点の情報を与えたドロネー細分の3種類の方法で四面体メッシュを生成し、それらに四面体ペアリングを適用して準純六面体メッシュを生成して、六面体要素の体積比率を比較を通して結果を考察する。入力四角形メッシュは既存の六面体メッシュから四角形辺を抽出することで生成し、内部頂点を用いる場合には元の六面体メッシュの内部頂点を使用する。ドロネー四面体分割には TetGen [7] を、アドバンスングフロントには Gmsh [3] を使用した。

実験の結果、ほとんどの入力で一貫して、ドロネー四面体分割とアドバンスングフロントでは六面体要素の体積比率が約75%ほど、内部頂点の情報を与えたドロネー四面体分割では約98%ほどの値を得られた。結果を確認すると、内部頂点を入力情報に付加した場合で最も六面体の体積比率が高くなるのがわかる(表1, 図5)。これは、四面体ペアリングは内部頂点が格子状に配置されている場合で最も効果的にはたらくが、四面体メッシュ生成の過程で追加する内部頂点は格子状に配置されとは限らないため、このような結果となったことが考えられる。

境界整合でない準純六面体メッシュ生成の既存手法

表 1 各四面体メッシュ生成法に対する結果. 処理時間はペアリングの計算時間を表す.

入力モデル	四面体メッシュ生成法	六面体体積比率 (%)	処理時間 (秒)
Fandisk	ドロネー細分	76.4	9.1
頂点数 10,300	アドバンシングフロント	76.6	24.0
面数 20,596	ドロネー細分 (内部頂点あり)	98.8	32.6

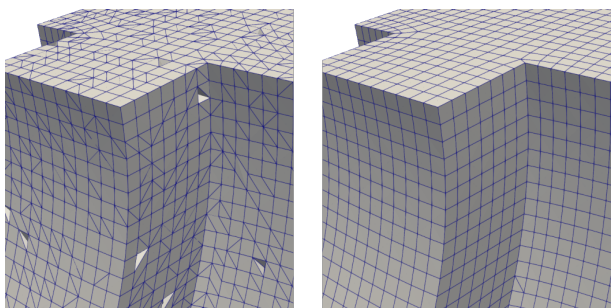


図 5 出力結果の比較. 左が境界のみを指定したドロネー細分, 右が内部頂点ありのドロネー細分によって四面体メッシュを生成している. 内部頂点を含む場合はより六面体要素が多くなっている. 左は非平面性の高い四角形面によって描画にアーティファクトが発生している.

[2] と比べると, 既存手法の六面体の体積比率と比べ本手法で得られる体積比率は若干低くなるが, 境界整合を得られている. また, 内部頂点を含む場合は, 最新の準純六面体メッシュ生成研究 [4] に近い体積比率を得ることができた.

5 結論

本論文では, 四面体ペアリングによる境界整合的な六面体メッシュの生成手法を提案し, また実験を通じて格子状の内部頂点を与えた際により六面体の体積比率が高い準純六面体メッシュが生成できることを確認した. 提案手法により, 境界整合性を満たしつつ, ほとんどの入力で六面体の体積比率が 70% を超え, また最小正規化ヤコビアンが負となる六面体要素を含まない準純六面体メッシュが生成できる.

将来的研究として, 四面体ペアリングに適した内部頂点の生成が挙げられる. 例えば四面体ペアリングに適したドロネー細分を考えることができ, ドロネー細分では四面体分割時に質の悪い部分にシュタイナー点を配置しているが, この点配置を格子状になるよう最適化するといった方法が考えられる. この場合, 同一球面上に 5 点以上が乗る縮退ケースが多く現れる可能性があることに注意する. また, ブロック分割手法による準純六面体メッシュ生成手法を境界整合的なものに拡張することも考えられる.

参考文献

- [1] Jeff Erickson. Efficiently Hex-meshing Things with Topology. *Discrete and Computational Geometry* 52 (3) 427–449, 2014.
- [2] Xifeng Gao, Wenzel Jakob, Marco Tarini, and Daniele Panozzo. Robust Hexdominant Mesh Generation using Field-guided Polyhedral Agglomeration. *ACM Transactions on Graphics*. 36 (4) 114:1–114:13, 2017
- [3] Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. Gmsh: A 3-D Finite Element Mesh Generator with Built-in Pre-and Post-processing Facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79 (11) 1309–1331, 2009.
- [4] Marco Livesu, Nico Pietroni, Enrico Puppo, Alla Sheffer, and Paolo Cignoni. LoopyCuts: Practical feature-preserving block decomposition for strongly hexdominant meshing. *ACM Transactions on Graphics*, 39 (4), 2020.
- [5] Janne Pellerin, Amaury Johnen, and Jean-François Remacle. Identifying Combinations of Tetrahedra into Hexahedra: A Vertex Based Strategy. *Procedia Engineering*, 203 2–13, 2017.
- [6] Maxence Reberol, Kilian Verhetsel, François Henrotte, David Bommès, and Jean-François Remacle. Robust Topological Construction of all-hexahedral Boundary Layer Meshes. 2021.
- [7] Han Si. TetGen, a Delaunay-Based Quality Tetrahedral Mesh Generator. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 41 (2) 1–36, 2015.