

# 厚みを持つ半無限平板による平面波の回折

## Plane wave diffraction by a Thick Semi-infinite Plate

電気電子情報通信工学専攻 谷 慶博

GU QINGBO

### 1. はじめに

20 世紀以来、電磁界理論は急速に発展している。その中で、電磁波の散乱と回折による解析が多くの研究者にとって重要な課題であり、アンテナやレーダ断面積の研究のように多くの工学的応用に対し多大に関係がある。複雑な形状を電磁気学的にモデル化し、基本構成を分離するために、検討すること必要がある。規則的な形状のオブジェクトのレーダ断面を理解して設計を確認・改善する必要があり、これはレーダ作業、導波管キャビティによる回折問題が、主に数値解法あるいは高周波漸近解法を用いて解析され、数多くの研究報告がある。しかし、これらの手法により得られた解は任意のキャビティの寸法に対し、一様に有効でないと考えられる。一方、Wiener-Hopf 法[1][2][3][4]は散乱問題に対する厳密解法であり、キャビティの回折問題に有効に適用できることが知られている。

本研究では、キャビティを構成しうる形状として厚みを持つ半無限平板による、平面波の回折問題を E 波入射の場合について、Wiener-Hopf 法は散乱問題に対する厳密解法であり、Wiener-Hopf 方程式の解を適用し、端点条件を厳密に考慮した高精度近似解を導出することを目標とする。また数値計算を行い、導波管の遠方散乱特性について考察する。

本論文の意義について言及すれば、情報社会を迎えた今日の社会において、種々の目的により送・受信される電波の建物による散乱への応用が考えられる。特に我国のように狭い国では、ビル等の高層化が増々進んでいき、それに伴い電波障害の問題もより大きくなっていくであろう。

本論文で取り上げている厚みを持つ半無限平板は、高層ビルの一つのモデルとして考えることができるから、この形状による電磁波の散乱回折問題を研究することは、電波障害に関する対策など工学上、大きな意義をもつものと思われる。

### 2. 問題の定式化

図 1 に示すように  $|x| \leq b, z \leq 0$  に置かれた完全導体から成る半無限平板に平面 E 波が Z 軸と角度  $\theta_0$  をなして入射する問題を考える。

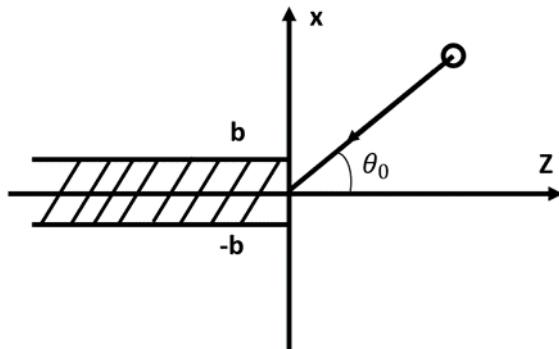


図 1 厚みを持つ半無限平板  
全電界と入射界をおのおの式(1)(2)定義すると、

$$f'(x, z) = f^i(x, z) + f(x, z) \quad (1)$$

入射界  $\phi^i(x, z)$  は次式となる。

$$\phi^i(x, z) = e^{-ik(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)} \quad (2)$$

ただし、 $k = \omega(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$  は自由空間の波数である。 $\epsilon_0, \mu_0$  はそれぞれ真空の誘電率、透磁率を表す。 $\phi(x, z)$  は散乱界で、以下に示す二次元波動方程式を満足する。

$$(\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2 + k^2)\phi(x, z) = 0 \quad (3)$$

なお、零でない電磁界成分は Maxwell の方程式より次のように表すことができる。

$$(E_y, H_x, H_z) = \left( \phi, \frac{i}{\omega \mu_0} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{1}{i \omega \mu_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (4)$$

解析の都合上、媒質に微小損失

$$k = k_1 + ik_2, \quad 0 < k_2 \ll k_1 \quad (5)$$

を導入する。

漸近的振る舞いをもつことが知られている。よって  $z \rightarrow \infty$  時には

$$\phi = O(e^{-k_2 z}) \quad (6)$$

$z \rightarrow -\infty$  時には

$$\phi = O(e^{k_2 z \cos \theta_0}) \quad (7)$$

以上(6)(7)は散乱界の無限遠における漸近的振る舞い。 $\phi(x, z)$  の  $z$  に関する複素 Fourier 変換を

$$\Phi(x, \alpha) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, z) e^{i\alpha z} dz, \quad \alpha = \sigma + i\tau \quad (8)$$

と定義し、複素 Fourier 積分

$$\Phi_{\pm}(x, \alpha) = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_0^{\pm\infty} \phi(x, z) e^{i\alpha z} dz \quad (9)$$

$\Phi_{\pm}(x, \alpha)$  は  $\tau, \mp k_2 \cos \theta_0$  で正則な関数、 $\Phi_{\pm}(x, \alpha)$  は整関数である。式(10)で定義した Fourier 変換を施すと、帯領域  $|\tau| < k_2 \cos \theta_0$  において変換波動方程式

$$(d^2 / dx^2 - \gamma^2)\Phi(x, \alpha) = 0, \quad \gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} \quad (10)$$

を得る。 $\gamma$  は  $\alpha$  の 2 価関数であり、 $|x| \rightarrow \infty$  時、式(9)の解は次のように表現できる。

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - \gamma^2 \right) \Phi(x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\partial \phi^i(x, +0)}{\partial z} \right] \quad (11)$$

但し  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ 、式(11)が  $|x| < b$  についての変換波動方程式である。式(11)の変換波動方程式の解について、

$$\begin{aligned}\Phi(x, \alpha) &= A(\alpha)e^{-\gamma x}, \quad x > 0 \\ &= B(\alpha)e^{\gamma x}, \quad x < 0\end{aligned}\quad (12)$$

ここで  $\Phi(x, \alpha)$  は  $\phi(x, \alpha)$  のフーリエ変換であるから は任意の  $x$  について連続である。

$$\Phi(x, \alpha) = \Psi_{(+)}(\pm b, \alpha)e^{\mp\gamma(x \mp b)}, \quad x \geq \pm b \quad (13)$$

が導かれる。式(13)は変換波動方程式(11)の解表現である。

式(11)は非斉次型の微分方程式であるので、

$$F(x, \alpha) = \frac{1}{\gamma} \int_{-b}^x f(t) \sinh \gamma(x-t) dt \quad (14)$$

という補助的な関数を導入してやると、解は次のように表現される。

$$\begin{aligned}\Phi(x, \alpha) &= \Psi_{(+)}(b, \alpha) \frac{\sinh \gamma(x+b)}{\sinh 2\gamma b} - \Psi_{(+)}(-b, \alpha) \frac{\sinh \gamma(x+b)}{\sinh 2\gamma b} \\ &+ \left[ F(x, \alpha) - F(b, \alpha) \frac{\sinh \gamma(x+b)}{\sinh 2\gamma b} \right]\end{aligned}\quad (15)$$

また、便宜上、式(14)で定義される非斉次項を以下に示すフーリエ級数に展開する。

$$f(x) \square \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{2b}(x+b) \quad (16)$$

この式を計算すると

$$\begin{aligned}\Phi(x, \alpha) &= \Psi_{(+)}(b, \alpha) \frac{\sinh \gamma(x+b)}{\sinh 2\gamma b} \\ &- \Psi_{(+)}(-b, \alpha) \frac{\sinh \gamma(x-b)}{\sinh 2\gamma b}\end{aligned}\quad (17)$$

$$\text{但し } \gamma_n = \left\{ \left( \frac{n\pi}{2b} \right)^2 - k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

式(17)は変換波動方程式(13)の解表現である。

添え字  $s, d$  がおのおの複合の上下に対応するものとして、次の関数

$$J_{\pm}^{s,d}(\alpha) = J_{\pm}(b, \alpha) \pm J_{\pm}(-b, \alpha) \quad (18)$$

を導入する、但し

$$J_{\pm}(\pm b, \alpha) = \Phi'(\pm b \pm 0, \alpha) - \Phi'(\pm b \mp 0, \alpha) \quad (19)$$

式(19)を式(18)に代入する

$J_{\pm}^d(\alpha)$  について、

$$\begin{aligned}J_{\pm}^d(\alpha) &= \Phi'(+b+0, \alpha) - \Phi'(+b-0, \alpha) \\ &- \Phi'(-b-0, \alpha) + \Phi'(-b+0, \alpha)\end{aligned}\quad (20)$$

$\Phi'(+b+0, \alpha)$  とおくと、式(13)より

$$\Phi'(+b+0, \alpha) = -\gamma \Psi_{(+)}(b, \alpha) \quad (21)$$

$\Phi'(-b-0, \alpha)$  とおくと、式(13)より

$$\Phi(x, \alpha) = \Psi_{(+)}(-b, \alpha)e^{\gamma(x+b)}, \quad x \leq b \quad (22)$$

$\Phi'(+b-0, \alpha)$  とおくと、式(17)より

$$\begin{aligned}\Phi'(+b-0, \alpha) &= \Psi_{(+)}(b, \alpha) \gamma \frac{e^{2\gamma b} + e^{-2\gamma b}}{e^{2\gamma b} - e^{-2\gamma b}} \\ &- \Psi_{(+)}(-b, \alpha) \frac{2\gamma}{e^{2\gamma b} - e^{-2\gamma b}} \\ &- \frac{n\pi}{2b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\alpha^2 + \gamma_n^2} \cos n\pi\end{aligned}\quad (23)$$

$\Phi'(-b+0, \alpha)$  とおくと、式(17)及び  $-\Phi'(+b-0, \alpha)$  を参照して

$$\begin{aligned}\Phi'(-b+0, \alpha) &= \Psi_{(+)}(b, \alpha) \frac{2\gamma}{e^{2\gamma b} - e^{-2\gamma b}} \\ &- \Psi_{(+)}(-b, \alpha) \gamma \cdot \frac{e^{2\gamma b} + e^{-2\gamma b}}{e^{2\gamma b} - e^{-2\gamma b}} \\ &- \frac{n\pi}{2b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\alpha^2 + \gamma_n^2}\end{aligned}\quad (24)$$

$$J_{\pm}^d(\alpha) = -\frac{U_{(+)}(\alpha)}{K_u(\alpha)} - \frac{1}{b} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \frac{f_n}{\alpha^2 + \gamma_n^2} \quad (25)$$

$J_{\pm}^s(\alpha)$  について、

$$\begin{aligned}J_{\pm}^s(\alpha) &= J_{\pm}(-b, \alpha) + J_{\pm}(b, \alpha) \\ &= \Phi'(+b+0, \alpha) - \Phi'(+b-0, \alpha) \\ &- \Phi'(-b-0, \alpha) - \Phi'(-b+0, \alpha)\end{aligned}\quad (26)$$

$$J_{\pm}^s(\alpha) = -\frac{V_{(+)}(\alpha)}{K_v(\alpha)} + \frac{1}{b} \sum_{\substack{n=2 \\ \text{even}}}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \frac{f_n}{\alpha^2 + \gamma_n^2} \quad (27)$$

式(25), 式(27)は散乱界の満足する連立ウィーナー・ホッフ方程式であり、帯状領域  $-k_2 \leq \tau \leq k_2 \cos \theta_0$  において成立する。

### 3. 形式解

核関数の分解を利用して以下の式を知る必要がある

$$\begin{aligned}k_{\pm}^u(\alpha) &= (\cos kb)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} (k + \alpha)^{-\frac{1}{2}} \\ &\cdot \exp \left\{ \frac{idb}{\pi} \left( 1 - c + \ln \frac{\pi}{2kb} + i \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ &\cdot \exp \left( \frac{ib\gamma}{\pi} \ln \frac{\alpha - \gamma}{k} \right) \prod_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{i\gamma_n} \right) e^{\frac{2iab}{n\pi}}\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}k_{\pm}^v(\alpha) &= \left( \frac{\sin kb}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp \left\{ \frac{iab}{\pi} \left( 1 - c + \ln \frac{2\pi}{kb} + i \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ &\cdot \exp \left( \frac{ib\gamma}{\pi} \ln \frac{\alpha - \gamma}{k} \right) \prod_{\substack{n=2 \\ \text{even}}}^{\infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{i\gamma_n} \right) e^{\frac{2iab}{n\pi}}\end{aligned}\quad (29)$$

但し  $c$ : オイラー定数 = 0.57721566.....

核関数の分解をすると以下の式が導かれる。

$$\begin{aligned}\frac{U_{(+)}(\alpha)}{K_{+}^u(\alpha)} + \frac{2A \cos(kb \sin \theta_0)}{K_{+}^u(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} \\ - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \frac{n\pi}{2b} \frac{f_n K_{+}^u(i\gamma_n)}{bi\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} = 0\end{aligned}\quad (30)$$

$$\frac{V_{(+)}(\alpha)}{K_+^v(\alpha)} - \frac{2iA \sin(kb \sin \theta_0)}{K_+^v(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{even}}}^{\infty} \frac{n\pi}{2b} \frac{f_n K_+^v(i\gamma_n)}{bi\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} = 0 \quad (31)$$

式(30)(31)の中のフーリエ係数  $f_n$  と未知関数  $U_{(+)}(\alpha), V_{(+)}(\alpha)$  の関係を知る必要がある。

フーリエ係数  $f_n$  について

$\Phi(x, \alpha)$  は  $\alpha = k \cos \theta_0$  を除く上半面  $\tau \geq k_2$  において正則であることがわかり、式(18)より  $\Phi(x, \alpha)$  について

$$\lim_{\alpha \rightarrow i\gamma_n} (\alpha - i\gamma_n) \Phi(x, \alpha) = 0, n = 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

がわかる。

$m = \text{even}$  の時

$$f_n = -V_{(+)}(i\gamma_m) \left( \frac{m\pi}{2b} \right), m = 2, 4, 6, \dots \quad (33)$$

$m = \text{odd}$  の時

$$f_n = U_{(+)}(i\gamma_m) \left( \frac{m\pi}{2b} \right), m = 1, 3, 5, \dots \quad (34)$$

式(33),(34)はそれぞれ  $m$  が偶数、奇数の時のフーリエ係数  $f_n$  である。

式(34),(33)それぞれ式(30),(31)に代入すると、

$odd$  の時 (奇数)

$$\frac{U_{(+)}(\alpha)}{k_+^u(\alpha)} + \frac{2A \cos(kb \sin \theta_0)}{k_+^u(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \frac{n\pi}{2b} \frac{U_{(+)}(i\gamma_n) k_+^u(i\gamma_n)}{bi\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{U_{(+)}(\alpha)}{k_+^u(\alpha)} = -\frac{2A \cos(kb \sin \theta_0)}{k_+^u(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{2b} \right)^2 \frac{k_+^u(i\gamma_n) U_{(+)}(i\gamma_n)}{bi\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} \quad (36)$$

$$\therefore U_{(+)}(\alpha) = -k_+^u(\alpha) \left[ \frac{2A \cos(kb \sin \theta_0)}{k_+^u(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{2b} \right)^2 \frac{k_+^u(i\gamma_n) U_{(+)}(i\gamma_n)}{bi\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} \right] \quad (37)$$

について式(37)が成立する。

$even$  の時 (偶数)

$$\frac{V_{(+)}(\alpha)}{k_+^v(\alpha)} - \frac{2iA \sin(kb \sin \theta_0)}{k_+^v(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{even}}}^{\infty} \frac{n\pi}{2b} \frac{V_{(+)}(i\gamma_n) k_+^v(i\gamma_n)}{bi\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{V_{(+)}(\alpha)}{k_+^v(\alpha)} = \frac{2iA \sin(kb \sin \theta_0)}{k_+^v(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{even}}}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{2b} \right)^2 \frac{k_+^v(i\gamma_n) V_{(+)}(i\gamma_n)}{bi\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} \quad (39)$$

$$V_{(+)}(\alpha) = k_+^v(\alpha) \left[ \frac{2iA \sin(kb \sin \theta_0)}{k_+^v(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{even}}}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{2b} \right)^2 \frac{k_+^v(i\gamma_n) V_{(+)}(i\gamma_n)}{bi\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} \right] \quad (40)$$

#### 4. 散乱遠方界

複素フーリエ逆変換を次のように定義すると、

$$\begin{aligned} \phi(x, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \Phi(x, \alpha) e^{-iaz} d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \hat{\Phi}(\alpha) e^{-\gamma|x-iaz} d\alpha, x, \pm b \\ & \quad (-k_2 < c < k_2 \cos \theta_0) \end{aligned} \quad (41)$$

但し

$$\hat{\Phi}(\alpha) = \Psi_{(+)}(\pm b, \alpha) e^{\gamma b} \quad (42)$$

式(41)で  $x = \rho \sin \theta, z = \rho \cos \theta, (-\pi < \theta < \pi)$  というように極座標で表すと、式(42)で定義される積分  $k\rho \rightarrow \infty$  に対し、次のように漸近展開される。

$$\phi(\rho, \theta) \sim \hat{\Phi}(-k \cos \theta) k \sin \theta \left| \frac{e^{i(k\rho - \frac{\pi}{4})}}{(k\rho)^{1/2}} \right| \quad (43)$$

ここで

$$\hat{\Phi}(-k \cos \theta) = \Psi_{(+)}(\pm b, -k \cos \theta) e^{-ikb \sin \theta} \quad (44)$$

式(43),(44)は全空間で一様に成り立つ遠方界の漸近表現である。

#### 5. 数値計算例

本章では、E波入射における RCS と全電界特性の数値計算例を示し、厚みがあるの散乱特性について考察を行う。本論文では二次元問題を対象としているから、単位長さあたりの RCS は、次式で与えられる。

$$\sigma / \lambda = \lim_{\rho \rightarrow \infty} (k\rho |\phi / \phi^i|) \quad (45)$$

なお、RCS の値は全て規格化された量

$$\text{RCS [dB]} = 10 \log_{10} (\sigma / \lambda) \text{ [dB]} \quad (46)$$

計算した結果に基づいている。

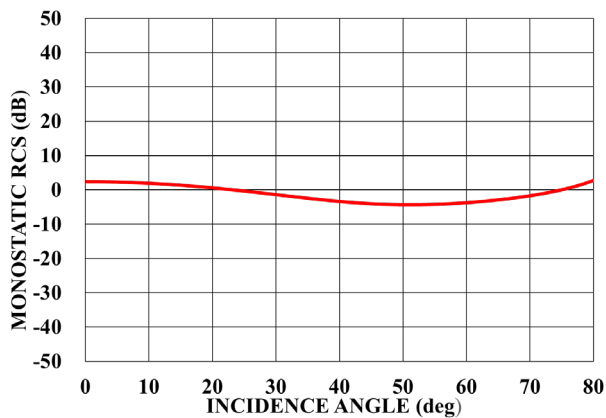
図2の(a)-(c)によって  $0^\circ$  の場合は RCS の数値はどんどん大きくなる。

図2(a)が示すように、 $kb$  は 1.57 の時では基本的に変化がなく、周波数も極めて短いため、遠くから見ると薄い板のように見える。そのため、RCS の数値変化はそれほど大きくない。

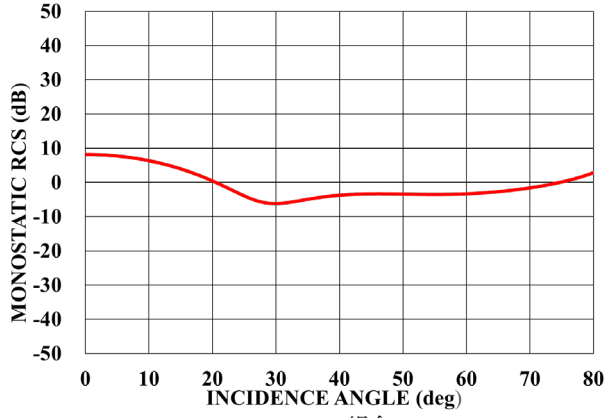
図2(b)が示すように、 $kb=3.14$  になる時は  $kb=1.57$  より RCS の振る舞いは平穏な直線ではなく、振る舞う傾向が見られるが、低周波数の範囲にあるから、振る舞いは相対的に平穏である。角度

が0°の時に RCS の数値が最も高く、それは並行的にさしこむ時に出る鏡面反射によるものである。kb=3.14 から kb=62.8 までの間ではこの現象が現れると考える。

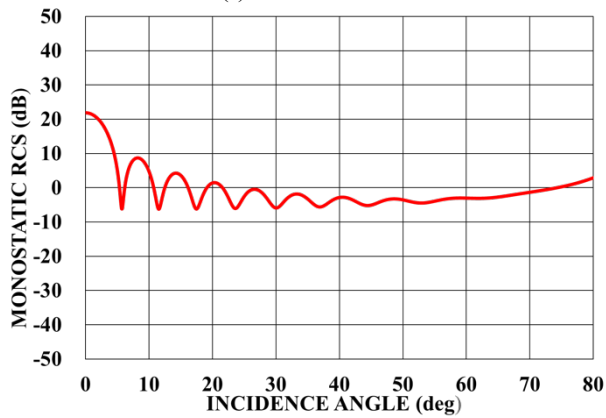
図 2(c)(d)(e)から、周波数が長いほど共振が強くなることがわかる。しかし、これらは同じ特性を持っている。それは角度が90°に近づく時に、振動幅は弱くなっていくことである。その理由は90°に近づく時は板に鏡面反射が出るわけである。



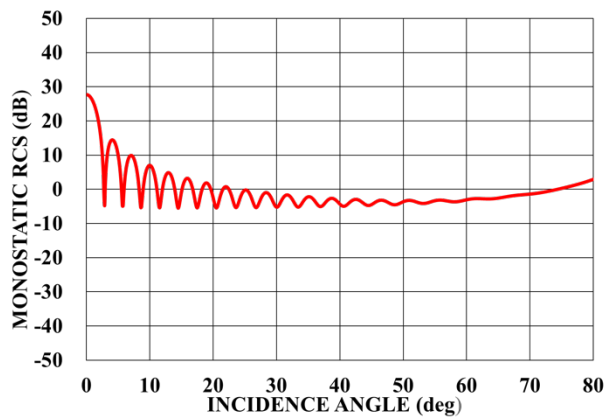
(a) kb=1.57 の場合



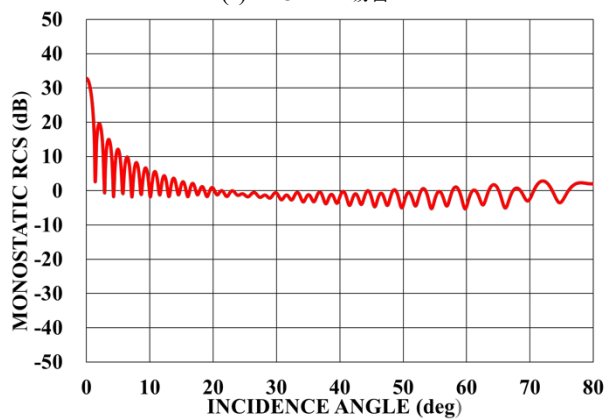
(b) kb=3.14 の場合



(c) kb=15.7 の場合



(d) kb=31.4 の場合



(e) kb=62.8 の場合

図2 数値例

## 6. むすび

本研究は厚みを持つ半無限による平面 E 波の回折問題を取り上げた。得られた結果に基づいて RCS や全電界に関する数値計算を行い、この形状における散乱特性、全電界特性を考察した。

## 謝辞

本研究にあたり、ご指導、ご鞭撻を頂いた小林一哉教授、長坂崇史助教に深く感謝し、心よりお礼申し上げます。また、同じ研究室の一員として暖かい励ましのお言葉を賜りました修士課程卒業の同期生・後輩各メンバーに感謝します。

## 文 献

- [1] 小林一哉, “ウィーナー・ホッフ法と変形留数解析法”, 電磁波問題の基礎解析法, 山下榮吉監修, 第8章, 電子情報通信学会, 1987.
- [2] 青木和男, 中村繁樹, 内田一徳, “厚い半無限導体板による平面 H 波の散乱,” テレビジョン学会誌, Vol. 36, pp. 230-236, 1982.
- [3] D. S. Jones, “Diffraction by a thick semi-infinite plate,” Proc. R. Soc. London A. Vol. 217, pp. 153-175, 1953.
- [4] 福岡 一輝, 寒竹 貴一, 松島 章, “貴金属半無限板によるプラズモン共鳴吸収のウィーナー・ホッフ法を用いた数値解析”, 映像情報メディア学会技術報告, Vol. 39, No. 4, 2015.