

台形 LP テストを用いた非線形回路の全解探索

Finding All Solutions of Nonlinear Circuits Using Trapezoidal LP Test

電気電子情報通信工学専攻 佐藤 隼斗
Hayato SATO

1. まえがき

非線形抵抗回路のすべての解を求める効率的なアルゴリズムを確立することは、信頼性の高い回路設計を行う上で重要な課題となる。この問題に対してはこれまでに様々なアルゴリズムが提案されている [1]。これらのアルゴリズムでは、「与えられた領域に解が存在しないことを判定する強力な解の非存在判定テスト」を導入することが、計算効率を決定する最大要因となる。

そのようなテストとして LP テストが知られている [2] ~ [17]。LP テストとは、非線形関数を多角形で囲むことにより非線形方程式を線形計画問題に置き換え、それに単体法あるいは双対単体法を適用することにより、与えられた領域における解の非存在を判定する方法である。

本論文では、非線形関数が局所的に単調凸である場合を対象に、台形を使用する LP テストを用いた非線形抵抗回路のすべての解を求める効率的なアルゴリズムを提案する。本論文では、文献 [4] にて提案された三角形 LP テストに対して、平行四辺形の斜辺のアイデアと、斜行座標のアイデアを導入することにより、アルゴリズム全体で双対単体法を継続して適用し、LP テストはより強力であり効率的となることを示す。

2. 基本となるアルゴリズム

n 個の非線形抵抗を含む直流回路は、一般に次のような非線形方程式で記述することができる。

$$f(x) \triangleq Pg(x) + Qx - r = 0 \quad (1)$$

線形計画法を用いるアルゴリズムでは、 n 次元直方体で与えられた初期領域を各変数方向に再帰的に 2 分割しながら、その領域内に解が存在するか否かを確認していく。そして「解の存在と一意性」に関する十分条件が成立した場合はその解を求め、「解の非存在」に関する十分条件が成立した場合はその領域を除去する。また、それらいずれの十分条件も成立しない場合はその領域を 2 分

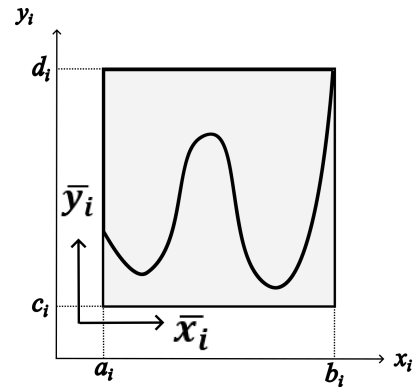


図1 長方形を用いた LP テスト

割し、それぞれに対して同様の手順を繰り返す。

以下では、 x_i 軸上の閉区間 $[a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を要素とする n 次元区間ベクトルを $X = ([a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n])^T$ で表すことにする。幾何学的には、 X は n 次元直方体となる。

定義域 $[a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) における非線形関数 $g_i(x_i)$ の最小値と最大値をそれぞれ c_i, d_i とする。ここで式 (1) を線形等式と線形不等式で表すため、補助変数 y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を導入し、 $y_i = g_i(x_i)$ とおく。このとき、 $a_i \leq x_i \leq b_i$ ならば $c_i \leq y_i \leq d_i$ となる。そしてこれらの線形等式・線形不等式を制約条件とする次のような線形計画問題を考える。

最大化： 任意の定数

制約条件：

$$\begin{aligned} Py + Qx - r &= 0 \\ a_i \leq x_i \leq b_i, & \quad i = 1, 2, \dots, n \\ c_i \leq y_i \leq d_i, & \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ とする。幾何学的には、式 (2) の不等式制約は図 1 に示すように非線形関数 $g_i(x_i)$ を長方形で囲むことを意味する。

明らかに式 (1) の領域 X 内の解は、 $y_i = g_i(x_i)$ とおくことにより式 (2) の制約条件を満足する。

したがってもし式 (2) に実行可能領域が存在しなければ、 X に式 (1) の解は存在しないことになる。

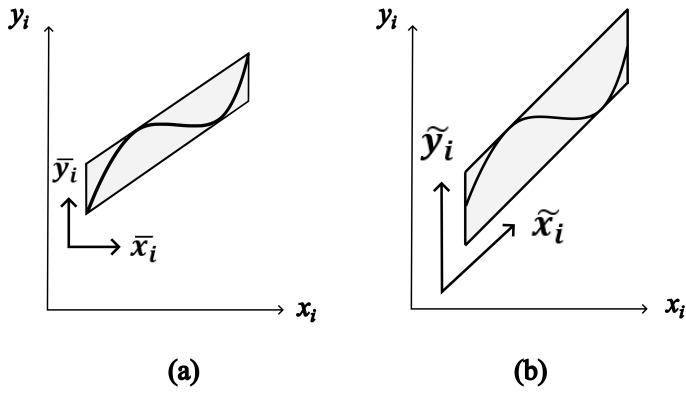


図2 平行四辺形を用いたLPテスト

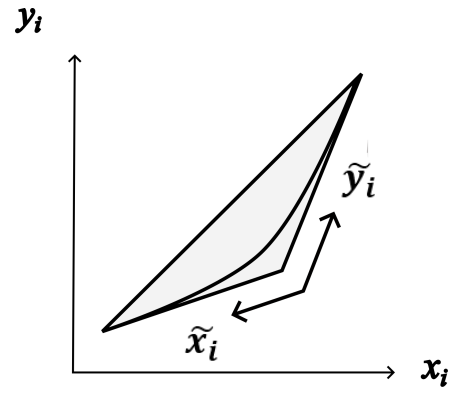


図4 接線三角形を用いたLPテスト

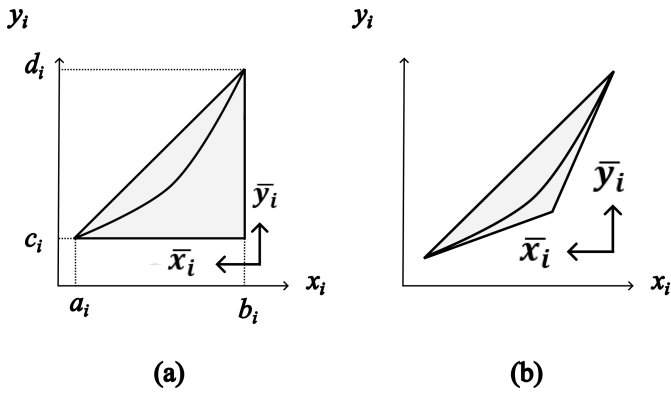


図3 三角形を用いたLPテスト

式(2)の実行可能領域が存在するか否かは、式(2)に単体法を適用することにより確認できる。もし存在しなければ、領域 X に式(1)の解は存在しないので、それを除去することができる。このようなテストをLPテストと呼ぶ[3],[4]。

また式(2)に単体法を適用する場合、まず変数変換 $\bar{x}_i = x_i - a_i$, $\bar{y}_i = y_i - c_i$ により長方形を二つの不等式制約 $\bar{x}_i \leq b_i - a_i$, $\bar{y}_i \leq d_i - c_i$ と非負制約 $\bar{x}_i \geq 0$, $\bar{y}_i \geq 0$ で表し(図1の左下の直交座標系 (\bar{x}_i, \bar{y}_i) を参照)、更にスラック変数 $\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を導入して式(2)を標準形に帰着させてから実行可能タブローを作り、反復を開始する。

また文献[5],[8]では、双対単体法の導入によりLPテストにおけるピボット演算回数を激減させる手法が提案されている。この方法は既に得られている実行可能タブロー(最適タブロー)から次の領域用の双対実行可能タブローを導き、そこから双対単体法をスタートさせるもので、1領域当りの平均ピボット演算回数が非常に少なくなる。

3. 多角形LPテスト

3.1 平行四辺形を用いたLPテスト

ところで、一般にLPテストは非線形関数を囲む多角形の面積が小さいほど領域除去能力が強くなる。非線形関数を囲む多角形としては通常長方形が用いられるが、関数の非線形性の弱い部分では長方形の面積が相対的に大きくなり、非効率的となる欠点がある。これに対し、文献[11]では図2(a)の様に非線形関数を平行四辺形で囲むLPテスト(図2(a)の左下の直交座標系 (\bar{x}_i, \bar{y}_i) を参照)が提案されている。

文献[11]の式(8)のような変数変換を行うと、制約条件の数が増え、タブローのサイズが大きくなる。また、切り換えた時点での双対単体法の適用が不可能になる。そこで文献[15]では、変数変換により、平行四辺形を二つの不等式制約と非負制約で表すことで(図2(b)の左下の斜交座標系 $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ を参照)、双対単体法を適用した平行四辺形LPテストが提案されている。

3.2 三角形を用いたLPテスト

バイポーラトランジスタの指数関数のように $g_i(x_i)$ が単調凸関数の場合、三角形で囲むことによりLPテストをより強力なものにすることができる。文献[4]では、図3(a)に示すような直角三角形を用いるLPテストが最も効率的であることが示されている。

これは、直角三角形が変数変換により、一つの不等式制約と二つの非負制約で表すことができるからである(図3(a)の右下の直交座標系 (\bar{x}_i, \bar{y}_i) を参照)。

$g_i(x_i)$ が単調凸の場合、 $g_i(x_i)$ を直角三角形ではなく、図3(b)のような接線を使った三角形で囲むことにより、LPテストをより強力なものにすることができる。

文献[4]では、このような三角形を用いることにより

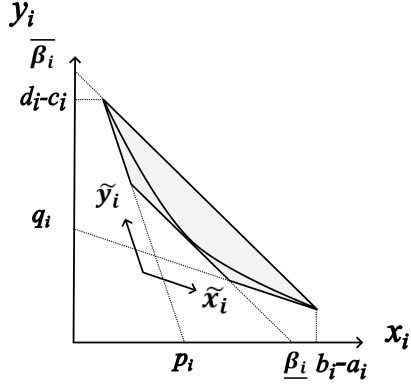


図5 台形を用いたLPテスト

LPテストは強力になるが、一つの三角形を表す不等式制約の数が図3(b)では三つになるので、必ずしも効率化につながるとは限らないことが記されている。ところが、図4の右下に記されているような斜交座標系のアイデア[15]を用いることにより、不等式制約の数を一つにすることができるので、直角三角形の場合と同じ数の制約式でより強力なLPテストを実現することができる。ただし、接線を用いると変数変換式が複雑になり、得られる双対実行可能タブローが実行可能状態から遠ざかるため、1領域当たりの平均ピボット演算回数は直角三角形を用いたLPテストよりも多くなる

4. 提案手法

一般にLPテストは非線形関数を囲む多角形の面積が小さいほど領域除去能力が強くなる。最も標準的なLPテストでは非線形関数 $g_i(x_i)$ を長方形で囲むが、パイポーラトランジスタの指数関数のように $g_i(x_i)$ が単調凸関数の場合、 $g_i(x_i)$ を台形で囲むことによりLPテストをより強力なものにすることができる。本論文では、図5に示すように $g_i(x_i)$ を台形で囲むLPテストを考える。変数変換

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{p_i}{d_i - c_i} \\ \frac{q_i}{b_i - a_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

により、台形は二つの不等式制約

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i &\leq -\alpha_i \tilde{x}_i + \bar{\beta}_i \\ \tilde{y}_i &\geq -\alpha_i \tilde{x}_i + \underline{\beta}_i \end{aligned} \quad \text{ただし} \quad \alpha_i = \frac{d_i - c_i - q_i}{b_i - a_i - p_i} \quad (4)$$

と二つの非負制約 $\tilde{x}_i \geq 0, \tilde{y}_i \geq 0$ で表すことができる(図5の右下の斜交座標系 (\bar{x}_i, \bar{y}_i) を参照)。

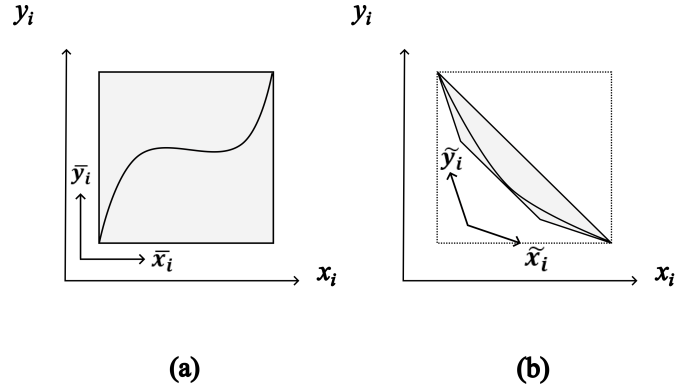


図6 より普遍的な台形を用いたLPテスト

この場合、線形計画問題は

最大化： 任意の関数

制約条件：

$$Py + Qx - r = 0 \quad (5)$$

$$\tilde{y}_i \leq -\alpha_i \tilde{x}_i + \bar{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\tilde{y}_i \geq -\alpha_i \tilde{x}_i + \underline{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

となる。

ただし $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T, \tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)^T, \tilde{r} = r - P(c_1, c_2, \dots, c_n)^T - Q(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ である。スラック変数 $\tilde{\lambda}_i, \tilde{\mu}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を導入して式(5)を標準形にすると、次のようになる。

最大化： 任意の定数

制約条件：

$$P\tilde{y} - Q\tilde{x} - \tilde{r} = 0$$

$$\tilde{y}_i + \tilde{\lambda}_i = -\alpha_i \tilde{x}_i + \bar{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$\tilde{y}_i - \tilde{\mu}_i = -\alpha_i \tilde{x}_i + \underline{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\tilde{x}_i \geq 0, \quad \tilde{y}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\tilde{\lambda}_i \geq 0, \quad \tilde{\mu}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

このときのタブローは $(3n+1) \times (2n+1)$ 行列となる。

いま、領域 X に対する「台形を用いたLPテスト」が完了し、次の領域 $X' = ([a'_1, b'_1], \dots, [a'_n, b'_n])^T$ でLPテストを行うものとする。

最大化： 任意の定数

制約条件：

$$P\tilde{y}' - Q\tilde{x}' - \tilde{r}' = 0$$

$$\tilde{y}'_i + \tilde{\lambda}'_i = -\alpha'_i \tilde{x}'_i + \bar{\beta}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$\tilde{y}'_i - \tilde{\mu}'_i = -\alpha'_i \tilde{x}'_i + \underline{\beta}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\tilde{x}'_i \geq 0, \quad \tilde{y}'_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\tilde{\lambda}'_i \geq 0, \quad \tilde{\mu}'_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

領域 X における斜行座標系から直交座標系への変換

を式 (3) における変数変換で行う。変数変換

$$\begin{aligned}\bar{x}_i &= \bar{x}'_i - b'_i + b_i \\ \bar{y}_i &= \bar{y}'_i - c'_i + c_i \\ \bar{\lambda}_i &= -\bar{\lambda}'_i + (\alpha_i + \alpha'_i)\bar{x}'_i + \alpha_i(b_i - b'_i) - c'_i + c_i - \bar{\beta}'_i + \bar{\beta}_i \\ \bar{\mu}_i &= \bar{\mu}'_i + (\alpha_i - \alpha'_i)\bar{x}'_i + \alpha_i(b_i - b'_i) - c'_i + c_i - \underline{\beta}'_i + \underline{\beta}_i\end{aligned}\quad (8)$$

により、領域 X における直交座標系から領域 X' における直交座標系への変換を行う。変数変換

$$\begin{bmatrix} \bar{x}'_i \\ \bar{y}'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{p'_i}{d'_i - c'_i} \\ \frac{q'_i}{b'_i - a'_i} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{x}'_i + p'_i \\ \tilde{y}'_i + q'_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

により、領域 X' に対する式 (7) の双対実行可能なタブローを得ることができる。したがってこのタブローからスタートして、双対単体法を実行することができる。このタブローは実行可能（すなわち定数列の全ての値が非負）とは限らないが、実行可能に近い状態になっているので、非常に少ない反復回数で終了する。その結果、式 (7) に実行可能領域が存在しなければ、 X' に式 (1) の解は存在しないことが判定できる。

もし上記の双対実行可能タブローを定式化した時点で、それが実行可能である場合は、LP テストは 0 回のピボット演算で終了する。そのため、双対単体法を用いたアルゴリズムの 1 領域当りの平均ピボット演算回数はしばしば 1 回以下となる [6]。

5. むすび

本論文では、非線形抵抗回路のすべての解を求めるための効率的なアルゴリズムを提案した。斜交座標系を用いるというアイデアと、制約式を増やすことなく平行移動をアルゴリズム全体に適用するというアイデアを導入することにより、LP テストはより強力で効率的となることが示された。

文 献

- [1] E. Moore, R.B. Kearfott, M.J. Cloud, Introduction to Interval Analysis, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 2009.
- [2] K. Yamamura, H. Kawata, and A. Tokue, "Interval solution of nonlinear equations using linear programming," BIT—Numerical Mathematics, vol.38, no.1, pp.186–199, March 1998.
- [3] K. Yamamura and T. Ohshima, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using linear programming," IEEE Trans. Circuits and Systems-I, vol.45, no.4, pp.434–445, April 1998.
- [4] K. Yamamura and K. Yomogita, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using an LP test," IEEE Trans. Circuits and Systems-I, vol.47, no.7, pp.1115–1120, July 2000.
- [5] K. Yamamura and S. Tanaka, "Finding all solutions of systems of nonlinear equations using the dual simplex method," BIT—Numerical Mathematics, vol.42, no.1, pp.214–230, March 2002.
- [6] K. Yamamura and S. Tanaka, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the dual simplex method," Int. J. Circuit Theory and Applications, vol.30, no.6, pp.567–586, Nov. 2002.
- [7] K. Yamamura and R. Kaneko, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the simplex method," IEEE Trans. Circuits and Systems-I, vol.50, no.1, pp.160–165, Jan. 2003.
- [8] K. Yamamura and T. Fujioka, "Finding all solutions of nonlinear equations using the dual simplex method," J. Computational and Applied Mathematics, vol.152, no.1-2, pp.587–595, March 2003.
- [9] K. Yamamura, "Finding all solution sets of piecewise-trapezoidal equations described by set-valued functions," Reliable Computing, vol.9, no.3, pp.241–250, May 2003.
- [10] K. Yamamura and N. Igarashi, "An interval algorithm for finding all solutions of non-linear resistive circuits," Int. J. Circuit Theory and Applications, vol.32, no.1, pp.47–55, Jan. 2004.
- [11] 山村清隆, 田中克昌, "双対単体法を用いた弱非線形方程式の全解探索法," 信学論 (A), vol.J88-A, no.7, pp.833–839, July 2005.
- [12] K. Yamamura, K. Suda, "An efficient algorithm for finding all solutions of separable systems of nonlinear equations," BIT—Numerical Mathematics, vol.47, no.3, pp.681–691, Sept. 2007.
- [13] K. Yamamura and A. Machida, "An efficient algorithm for finding all DC solutions of piecewise-linear circuits," Int. J. Circuit Theory and Applications, vol.36, no.8, pp.989–1000, Nov. 2008.
- [14] K. Yamamura, K. Suda, and N. Tamura, "LP narrowing: A new strategy for finding all solutions of nonlinear equations," Applied Mathematics and Computation, vol.215, issue 1, pp.405–413, Sept. 2009.
- [15] K. Yamamura and S. Ishiguro, "Finding all DC solutions of nonlinear circuits using parallelogram LP test," Proc. IEEE European Conf. Circuit Theory and Design, Trondheim, Norway, Aug. 2015.
- [16] K. Yamamura and H. Takahara, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using triangular LP test," Proc. IEEE Asia Pacific Conf. Circuits and Systems, pp.243–246, Chengdu, China, Oct. 2018.
- [17] K. Yamamura, "An efficient algorithm for finding all solutions of nonlinear equations using parallelogram LP test," J. Computational and Applied Mathematics, vol.382, Article 113080, Jan. 2021.