

# 整数計画法を用いた非線形回路の変動解析に関する研究

## Tolerance Analysis of Nonlinear Circuits Using Integer Programming

電気電子情報通信工学専攻 豊川 祐輔  
Yusuke TOYOKAWA

### 1. まえがき

非線形回路の設計・解析において、素子特性が種々の原因により変動を起こしたとき、回路全体の特性がどのように変動するかを見積もることは、より品質の高い、信頼性の高い回路を開発する上で重要である。このような変動解析では、非線形抵抗の素子特性を“集合値写像”で表すことがしばしば有効となる [1]~[3].

集合値写像方程式によって記述される非線形抵抗回路の全ての解集合 (素子特性の変動によって取りうる直流動作点の範囲) を近似的に求める方法が提案されている [4]~[7]. しかし、これらのアルゴリズムは数理計画法の専門的知識と複雑なプログラミングを要するため、初心者や非専門家にとっては必ずしも実装容易性に優れた方法ではなかった。

近年、整数計画法の分野の飛躍的な発展により、10年前まではNP困難という呪縛から「絶対に」解けないと考えられていた大規模な整数計画問題を実用的な計算時間で解けるようになり、現代社会に大きな影響を与えている。文献 [8] では、代表的な商用ソルバーである IBM ILOG CPLEX (略して CPLEX) がいかに高性能であるか実感できるエピソードが描かれている。

本研究室では、このような整数計画法の飛躍的な発展に着目し、連続系の問題、特に非線形回路の全解探索問題に対する CPLEX の応用に関する研究を行ってきた [9]~[11]. 特に文献 [9] では、混合整数計画問題を CPLEX で 1 回解くだけで区分的線形回路のすべての解 (動作点) が得られることを示した。この方法は複雑なプログラミングを必要としないため実装容易性に優れている。またこの方法は非線形抵抗回路の変動解析に対しても拡張された [10].

本研究では、線形抵抗の素子特性が変動し混合方程式の線形項が集合値写像で表される場合の変動解析の方法を提案する。

### 2. 従来法

非線形抵抗の素子特性が、図 1 に示すような「二つの区分的線形関数に挟まれた非凸多角形」で表される集合値写像で与えられる場合を考える。図 1 の集合値写像は、区分的には図 1(b) に示すように縦軸が平行な台形で表されるものとする。このような集合値写像を区分的台形写像と呼び、図 1(b) のような写像を台形写像と呼ぶ。このとき、台形写像  $g_i(x_i)$  は上限と下限がそれぞれ

$$\begin{aligned} g_i(x_i) &\leq c_i^U x_i + d_i^U & i = 1, 2, \dots, n \\ g_i(x_i) &\geq c_i^L x_i + d_i^L & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

で表される。ただし、 $L, U$  は区分的台形写像の上下限を表している。

ここで、区分的台形写像を含む非線形方程式を区分的台形方程式と呼ぶ。また区分的台形方程式で記述される回路を区分的台形回路、素子特性が区分的台形写像となる非線形素子を区分的台形抵抗と呼ぶ。本章では、 $n$  個の区分的台形抵抗、線形抵抗、線形従属電源、独立電源を含む区分的台形回路を考える。このような回路は一般に次のような区分的台形方程式で記述することができる。

$$f(x) \triangleq Pg(x) + Qx - r = 0 \quad (2)$$

ただし、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  は区分的台形抵抗の枝電圧または枝電流を要素とする  $n$  次元変数ベクトル、 $g(x) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)]^T$  は図 2.1(b) に示すような抵抗の特性を表す区分的台形写像、 $P, Q$  は回路の構造によって決まる  $n \times n$  定数行列、 $r$  は電源

の値によって決まる  $n$  次元定数ベクトルである。また、 $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$  とする。

ここで、それぞれの区分的台形素子の動作領域を  $D = ([l_1, u_1], \dots, [l_n, u_n])^T \in \mathbb{R}^n$  とする。このとき  $D$  は  $n$  次元空間における直方体となる。また簡単のため、区分的台形写像  $g_i(x_i)$  はすべて  $K$  個の台形により表されるものとする。以下、式 (2) で  $f(x)$  が台形写像となるような領域を台形領域と呼ぶことにする。 $f$  は変数分離可能であることから、台形領域は  $n$  次元直方体の形状を取り、その総数は  $K^n$  となる。本論文では、 $K^n$  個の台形領域からなる  $D$  に存在する式 (2) のすべての解集合を近似的に求める問題を考える。

ここで次のような混合整数計画問題を考える

最大化/最小化：任意の定数

制約条件：

$$\begin{aligned}
Py + Qx - r &= 0 \\
x_i &= a_{i0} + \sum_{j=1}^K \delta_{ij} \\
y_i &\geq b_{i0}^L + \sum_{j=1}^K \frac{b_{ij}^L - b_{ij-1}^L}{a_{ij} - a_{ij-1}} \delta_{ij} \\
y_i &\leq b_{i0}^U + \sum_{j=1}^K \frac{b_{ij}^U - b_{ij-1}^U}{a_{ij} - a_{ij-1}} \delta_{ij} \\
\Delta_{i1}\mu_{i1} &\leq \delta_{i1} \leq \Delta_{i1} \\
&\vdots \\
\Delta_{ij-1}\mu_{ij-1} &\leq \delta_{ij-1} \leq \Delta_{ij-1}\mu_{ij-2} \\
\Delta_{ij}\mu_{ij} &\leq \delta_{ij} \leq \Delta_{ij}\mu_{ij-1} \\
\Delta_{ij+1}\mu_{ij+1} &\leq \delta_{ij+1} \leq \Delta_{ij+1}\mu_{ij} \\
&\vdots \\
0 \leq \delta_{iK} &\leq \Delta_{iK}\mu_{iK-1} \quad i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{3}$$

ただし、 $b_{ij}^L, b_{ij}^U$  は図 1(b) に示す区分的台形写像の上下の区分的線形関数の関数値である。このとき、式 (3) の制約条件は式 (2) および  $x \in D$  と等価であり、その解は複数の非連結な解集合となる。したがって式 (3) の混合整数計画問題のすべての解集合を求めることで、式 (2) のすべての解集合を求めることができる。

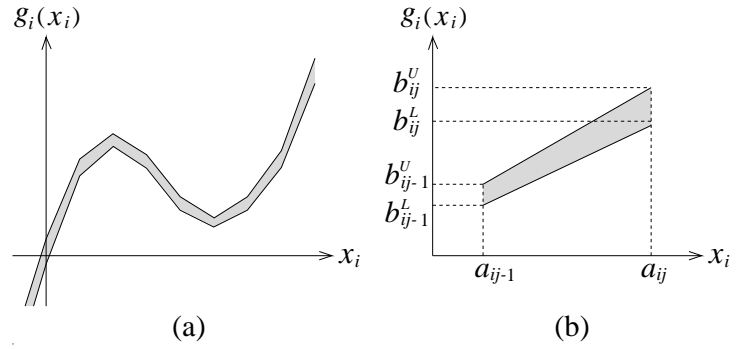


図 1: 区分的台形写像

### 3. 提案手法

線形抵抗の特性は製造ばらつきや温度変化など種々の原因によって変動する。そのような場合、各線形抵抗の枝電圧・枝電流の特性は図 2(a) に示すような直線ではなく、図 2(b) に示すような集合値写像で表す事が自然である。このような場合、係数行列  $Q$  の要素  $q_{ij}$  は定数ではなく区間  $[q_{ij}, \bar{q}_{ij}]$  で与えられる。これを線形不等式で表す方法について以下に示す。

まずはじめに、図 3 のような新たな集合値写像を考える。この集合値写像  $z_{ij}$  とおくと、図 2(b) のような集合値写像は次のように表すことが出来る。

$$q_{ij}x_j + \Delta q_{ij}z_{ij} \tag{4}$$

ここで  $\Delta q_{ij}$  は二つの直線の傾きの差  $q_{ij} - \bar{q}_{ij}$  を表している。式 (2) に適用するためには、混合方程式  $Py + Qx - r = 0$  を

$$Py + \underline{Q}x + Z - r = 0 \tag{5}$$

と書き換える。ただし  $\underline{Q} = (q_{ij})$ ,  $Z = (\Delta q_{ij}z_{ij})(j = 1, 2, \dots, n)$  である。そして  $z_{ij}$  に対して以下の制約を与える。

$$z_{ij} \geq a_{i0} + \sum_{l=1}^k \delta_{jl} \tag{6}$$

$$z_{ij} \leq \sum_{l=k+1}^K \delta_{jl} \tag{7}$$

なお  $k$  は  $a_{ik} = 0$  となるような添字である。 $a_{ik} = 0$  と

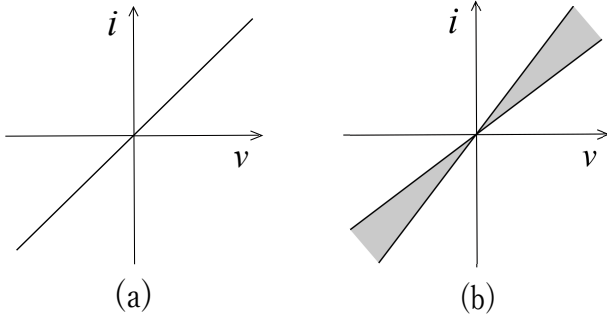


図 2: 線形項の集合値写像

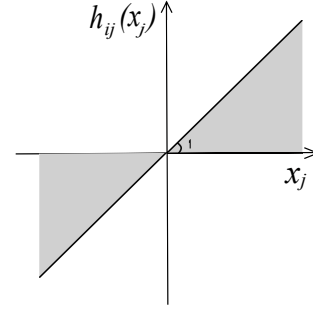


図 3: 集合値写像  $z_{ij}$

なるような区分点が存在しない場合は、新たに一つ区分点を設けることで容易に実現できる。

よって線形項を集合値写像で表すと以下のような混合整数計画問題として表すことが出来る。

最大化/最小化 : 任意の定数

制約条件 :

$$\begin{aligned}
 Py + Qx + Z - r &= 0 \\
 x_i &= a_{i0} + \sum_{j=1}^K \delta_{ij} \\
 y_i &\geq b_{i0}^L + \sum_{j=1}^K \frac{b_{ij}^L - b_{ij-1}^L}{a_{ij} - a_{ij-1}} \delta_{ij} \\
 y_i &\leq b_{i0}^U + \sum_{j=1}^K \frac{b_{ij}^U - b_{ij-1}^U}{a_{ij} - a_{ij-1}} \delta_{ij} \\
 z_{ij} &\geq a_{i0} + \sum_{l=1}^k \delta_{jl} \\
 z_{ij} &\leq \sum_{l=k+1}^K \delta_{jl} \\
 \Delta_{i1}\mu_{i1} &\leq \delta_{i1} \leq \Delta_{i1} \\
 &\vdots \\
 \Delta_{ij-1}\mu_{ij-1} &\leq \delta_{ij-1} \leq \Delta_{ij-1}\mu_{ij-2} \\
 \Delta_{ij}\mu_{ij} &\leq \delta_{ij} \leq \Delta_{ij}\mu_{ij-1} \\
 \Delta_{ij+1}\mu_{ij+1} &\leq \delta_{ij+1} \leq \Delta_{ij+1}\mu_{ij} \\
 &\vdots \\
 0 \leq \delta_{iK} &\leq \Delta_{iK}\mu_{iK-1} \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{8}$$

よって式 (8) のような混合整数計画問題のすべての解集合を求めることで、非線形素子の特性だけでなく線形素子の特性についても変動した場合のすべての解集合を

求めることができる。

#### 4. 数値例

本章では数値例を示す。なお使用計算機は Lenovo ThinkStation P920 (CPU: Intel Xeon Gold 6230 Processor, 2.10 GHz) で、整数計画ソルバーとしては CPLEX 20.1.0.0 を使用した。

例: 文献 [10] の Fig. 20 の回路に対し、非線形項の変動幅を  $w = 0.6$ 、線形項の変動幅を  $d = 0.1$ 、区分的線形関数の線分数を  $K = 50$  として提案手法を適用し、その結果得られた 3 次元空間上の解集合を図 4、3 次元空間上の解集合を  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_3)$ ,  $(x_2, x_3)$  平面に投影したものをそれぞれ図 5, 図 6, 図 7 に示す。

#### 5. むすび

本研究では、非線形素子の素子特性だけでなく線形素子の素子特性についても変動し、混合方程式の非線形項と線形項がそれぞれ集合値写像で表される場合の変動解析の方法を提案した。非線形素子の変動だけでなく線形素子の変動についても考えることで、非線形素子のみの変動を考えた場合に比べ解集合がより精密に求まることが示された。また提案手法は整数計画ソルバー CPLEX を用いているため、インプリメンテーションが容易である。

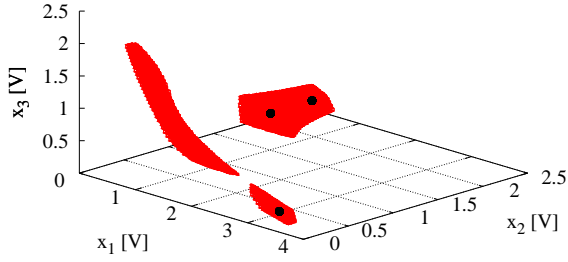


図 4: 3次元空間における解集合

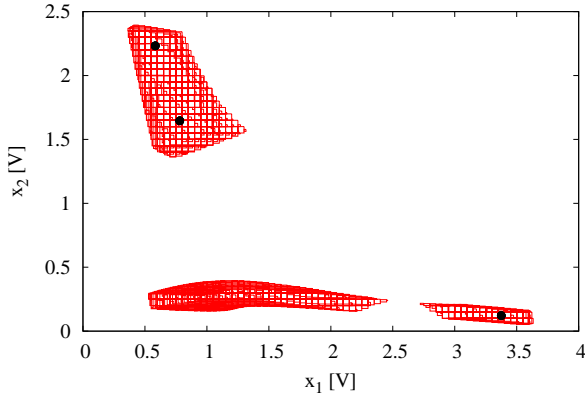


図 5:  $(x_1, x_2)$  平面上的解

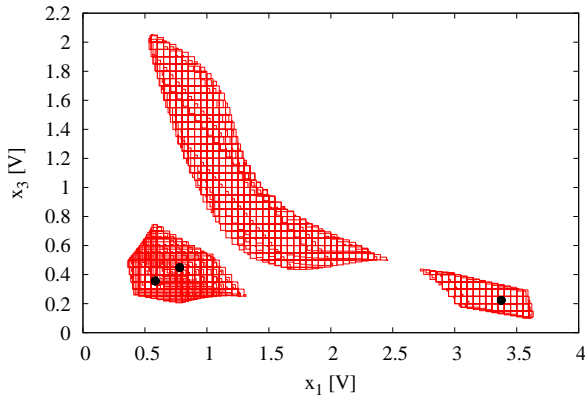


図 6:  $(x_1, x_3)$  平面上的解

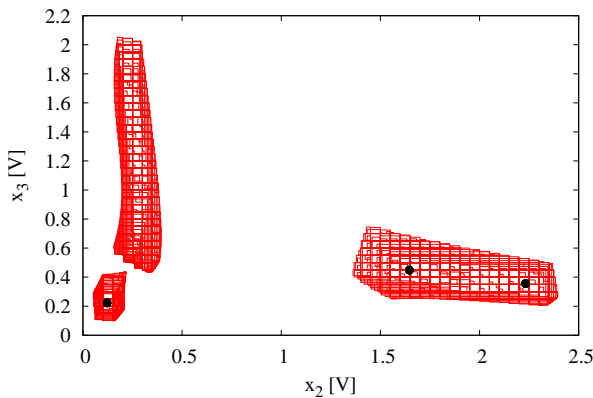


図 7:  $(x_2, x_3)$  平面上的解

- [1] K. Horiuchi, "An analysis of response deviations affected by input- and parameter-fluctuations in nonlinear systems," IEICE Trans. vol.E59, no.6, pp.1-6, June 1976.
- [2] K. Yamamura, "Finding all solution sets of piecewise-trapezoidal equations described by set-valued functions," Reliable Computing, vol.9, no.3, pp.241-250, May 2003.
- [3] K. Horiuchi, "A fixed point theorem in weak topology for successively recurrent system of fuzzy-set-valued nonlinear mapping equations and Its application to ring nonlinear network systems," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E94-A, no.4, pp.1059-1066, April 2011.
- [4] S. Pestore and A. Premoli, "Dc tolerance analysis of electronic circuits by linear programming techniques," Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst., Sydney, Australia, pp.369-372, May 2001.
- [5] 山村清隆, 島田雅之, 湯浅拓也, "集合値写像により記述される区分的台形回路のすべての解を求めるアルゴリズム," 電子情報通信学会論文誌 (A), vol.J84-A, no.6, pp.798-808, June 2001.
- [6] 山村清隆, 兵藤弘章, 木村岳, "集合値写像を用いた非線形回路の変動解析法," 電子情報通信学会論文誌 (A), vol.J86-A, no.9, pp.974-977, Sept. 2003.
- [7] K. Yamamura and Y. Haga, "DC tolerance analysis of nonlinear circuits using set-valued functions," J. Circuits, Systems, and Computers, vol.17, no.5, pp.785-796, Oct. 2008.
- [8] 今野 浩, 役に立つ一次式—整数計画法「気まぐれな王女」の50年, 日本評論社, 2005.
- [9] K. Yamamura and N. Tamura, "Finding all solutions of separable systems of piecewise-linear equations using integer programming," J. Computational and Applied Mathematics, vol.236, issue 11, pp.2844-2852, May 2012.
- [10] K. Yamamura and S. Ishiguro, "Finding all solution sets of piecewise-linear interval equations using integer programming," Reliable Computing, vol.23 (Special issue in honor of Ray Moore, 1929-2015), pp.73-96, July 2016.
- [11] K. Yamamura, "Finding all solution sets of piecewise-linear interval equations using an integer programming solver," J. Computational and Applied Mathematics, vol.372, Article 112616, July 2020.