研究ノート

国債流通市場でのイールド・カーブ構築手法について

高　橋　豊　治

目　次

１．はじめに――２つの「イールド・カーブ」

日本銀行は，2016年９月21日の政策委員会・金融政策決定会合において「長短金利操作付き量的・質的金融緩和」の導入を決定した。その主な内容の第１に長短金利の操作を行う「イールドカーブコントロール」があげられていた[1)]。ここでコントロールの対象となっている「イールドカーブ」とは，「イールドカーブとは，横軸に残存期間，縦軸に金利水準をとり，異なる残存期間の金利水準を並べることに

1)　日本銀行の資料では「イールドカーブ」と表記しているが，元の英語は yield curve という２つの単語であることから，本稿では正確を期して「イールド・カーブ」と表記する。引用などの際にはオリジナルに従い「イールドカーブ」と表記しているものがあるため，本稿では２種類の表記が混在することに注意。

より，残存期間と金利の関係を表した曲線です。」とか[2)]，「横軸に残存期間，縦軸に利回りをとり，残存期間が異なる複数の債券の残存期間と利回りの関係を表した曲線のことです。」とか[3)]，「縦軸に債券の利回り，横軸に償還までの残存期間をとったもので，「利回り曲線」とも呼ばれています。…」[4)]などの説明がなされている。

実はイールド・カーブと呼ばれているものには，こうした「利回り曲線」のほかに，もうひとつ「スポット・イールド・カーブ」と呼ばれるものがある。利回り曲線とは，債券の利回りと当該債券の償還までの残存年数との関係を示すものであるのに対して，（ゼロ・クーポン・キャッシュ・フローの）年数と対応するスポット・レートとの関係を示すものであり，対象としている「金利」が異なる。

国債流通市場でのキャッシュ・フロー評価を目的とするのであれば，そこで対象とする「金利」は，個別銘柄の最終利回りではなく，市場参加者が想定するキャッシュ・フローの時間価値を反映した，現在価値割引係数と関連付けられるスポット・レートでなければならない。イールド・カーブは，厳密には，債券の利回りと当該債券の償還までの残存年数との関係を示す「利回り曲線」ではなく，年数と対応するスポット・レートとの関係を示す「スポット・イールド・カーブ」でなければならない。

市場参加者が形成する「スポット・イールド・カーブ」をもとに債券のキャッシュ・フローの現在価値が価格として成立し，その価格とキャッシュ・フローとの関係で最終利回りが決まる。こうして決まった最終利回りと債券の残存年数の関係から，「利回り曲線」が形成されているという関係にある。しかしながら，こうした関係は，必ずしも十分に理解されているわけではなく，さらには実際のイールド・カーブ構築に関しては，「利回り曲線」，「スポット・イールド・カーブ」ともに詰めなければならないことが少なくない。

本稿では，２つの「イールド・カーブ」について整理するとともに，日本証券業協会の公表する「公社債店頭売買参考統計値」のデータをもとにイールド・カーブ

2）　日本銀行ウェブサイト「用語解説」より（2023年６月30日閲覧）。

3）　財務省国債金利情報ウェブサイト「イールドカーブとは何ですか」より（2023年６月30日閲覧）。

4）　参議院調査室（2016）41頁より。

を構築する手法について検討を加える（国債の銘柄などの表記方法は，このデータに準じている）。

以下では，まず2において利回り曲線について確認するとともに，曲線を描く方法について言及する。次いで3では，イールド・カーブ構築手法の基本的な考え方を整理し，そののち4では国債流通市場でのイールド・カーブ構築手法について具体的に検討する。最後に5で全体をまとめる。

2．利回り曲線の構築

「公社債店頭売買参考統計値」から，中期国債（2年，5年），長期国債，超長期国債（20年，30年，40年）の各銘柄について，残存年数と複利最終利回りの平均値との関係を，縦軸に最終利回り，横軸に残存年数をとって散布図にしたものが図1である。この図をみてわかるように，同じような残存年数であっても最終利回りが大きく違うものが少なくない。この点を強調するため，残存年数が5年までの部分を拡大したものが図2である。この図からもはっきりわかるように，特に，残存年

図1　国債流通市場の利回り曲線（2023年6月20日）

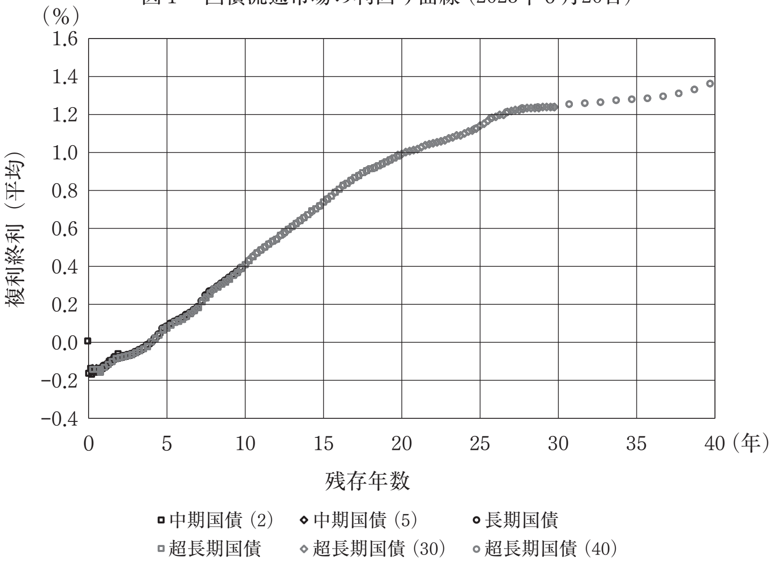
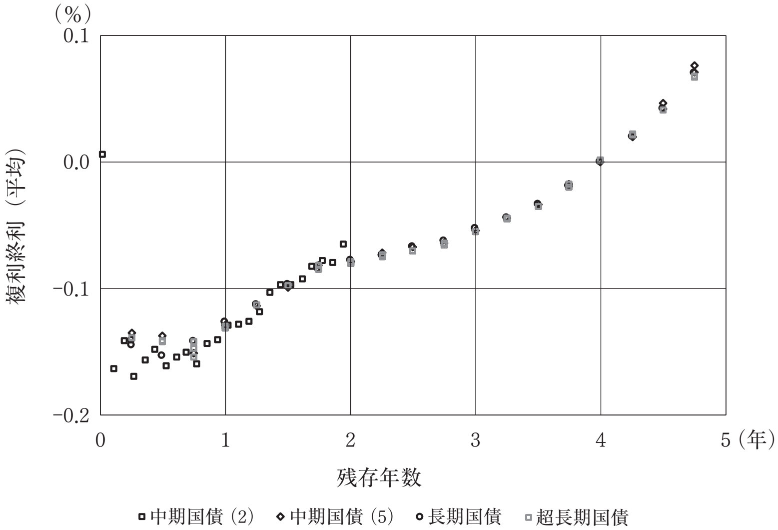


図２　国債流通市場の利回り曲線（拡大版）(2023年６月20日)



数の２年までの残存年数が短いものは，中期国債や長期国債などの国債の種類の違いでかなり散らばっていて，中期国債と長期国債や超長期国債とでそれが顕著である。この図をみると，残存年数と利回りとの関係を１本の利回り曲線として描くには，それなりの工夫が必要となることは容易に想像できる。

財務省は，(利回り曲線としてではないが)「国債金利情報」として流通市場における固定利付国債の実勢価格にもとづいて算出した主要年限毎の半年複利金利（半年複利ベースの最終利回り）を公表している[5)]。そこでは，「設定した年限毎に対象となる銘柄を選定し，各銘柄の実勢金利をもとにイールドカーブを形成した上で，主要年限毎の金利をコンスタントマチュリティーベースで算出します。」という説明にあるように，対象となる銘柄を選定することで１本の曲線として描いている。

5)　財務省国債金利情報ウェブサイトより（2023年６月30日閲覧)。

３．スポット・イールド・カーブの構築

スポット・イールド・カーブの構築とは，市場で取引されているキャッシュ・フローの情報をもとに，将来価値と現在価値との関係を示す現価係数（present value discount factor）を推計し，さらにその関係をゼロ・クーポン・キャッシュ・フローの金利であるスポット・レートで示すことで，年数とスポット・レートとの関係（スポット・イールド・カーブ）で表現しようとするものである。これは，２つのイールド・カーブのうちの，スポット・イールド・カーブを描くものである。

市場で取引されているキャッシュ・フローがゼロ・クーポン型のキャッシュ・フローであれば，現在価値と将来価値の関係は，その取引から直接的に把握することができる。しかし，市場で取引されている多くの取引は，固定利付債などに代表されるように，複数のキャッシュ・フローをセットにした取引であることが少なくない。スポット・イールド・カーブ構築は，この複数キャッシュ・フローの取引から，その中に含まれているひとつひとつのゼロ・クーポン・キャッシュ・フローの取引の内容を明らかにすることで，市場参加者が現在価値と将来価値の関係をどのように考えているかを明らかにしようとするものということができる。

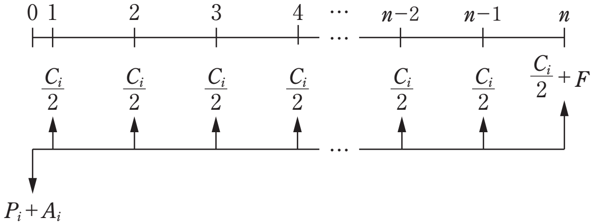
複数キャッシュ・フローの現在価値は，将来のキャッシュ・フローを対応する現価係数を用いた割引現在価値合計として評価することができる。j 回目キャッシュ・フロー C_j が基準日から t_j 年後に発生する場合，このキャッシュ・フローの現在価値は，対応する（基準日から t_j 年の）現価係数 $d(t_j)$ を用いると $C_j \cdot d(t_j)$ と表すことができるから，こうしたキャッシュ・フローが今後 n 回発生するような取引の現在価値合計 P は，

$$P=\sum_{j=1}^{n} C_j \cdot d(t_j)$$

として求めることができる。

そこで，例えば，図３に示されているような額面 F，残存利払回数 n 回，毎回の利払が $\frac{C_i}{2}$ の固定利付債 i の価格 P_i は，経過利息が A_i の場合，各キャッシュ・フローに対応する現価係数 $d(t_j)$ を用いて評価すると

図 3　固定利付債のキャッシュ・フロー



$$P_i+A_i=\frac{C_i}{2}\sum_{j=1}^{n-1}d(t_i)+\left(\frac{C_i}{2}+F\right)d(t_n) \qquad (1)式$$

となる[6)]。

ここで当該債券の銘柄属性や価格などの取引情報，さらには利付債 i の第 1 回から第 $n-1$ 回の利払日に対応する現価係数の情報がマーケットで得られる場合，つまり，債券価格 P_i，クーポン $\frac{C_i}{2}$，現価係数 $d(t_j)$ $(j=1, 2, \cdots, n-2, n-1)$ がわかれば，利付債 i の n 回目の利払日（償還日）に対応する現価係数 $d(t_n)$ は

$$d(t_n)=\frac{P_i+A_i-\frac{C_i}{2}\sum_{j=1}^{n-1}d(t_j)}{\frac{C_i}{2}+F}$$

として推計することができる。債券価格 P_i は取引の結果から，クーポン C_i は銘柄ごとに発行時に決まっているので，満期前の利払日に対応する現価係数の情報 $\mathrm{d}(t_j)$ が明らかになれば，満期時の現価係数 $d(t_n)$ を明らかにすることができる。ということは，利付債 i と利払日が同じ銘柄で残存期間の短いものが取引されていれ

6)　(1) 式は当該債券の利払日のみを対象にキャッシュ・フローを考え，その順番として 1 から n まで番号を付している。一方で後述の (2) 式では，対象としている市場の債券全体の利払を対象にキャッシュ・フローを考え順番 j を設定している。したがって，あるキャッシュ・フローの番号 j が当該債券 i の利払日，償還日の順番に相当しない場合には，その番号でのキャッシュ・フロー $C_{i,j}$ はゼロである。また，利払日に発生するクーポンも，償還日に発生する額面＋クーポンも，キャッシュ・フロー $C_{i,j}$ として表現している。

ば，その情報を利用することで現価係数推計できる。この手法は，クーポン・ストリッピング（coupon stripping）とか，「逐次代入方式」，最近ではブート・ストラッピング（boot strapping）などと呼ばれている[7]。

市場の情報をもとに式を用いて現価係数を推計すれば，その結果から様々な表示のスポット・レートを求めることができる。例えば，利付債 i の第 n 回の利払日までの年数 t_n に対応する現価係数が $d(t_n)$ の場合，年数 t_n に対応する連続複利表示のスポット・レート $r(t_n)$ との関係は，

$$d(t_n) = e^{-r(t_n)\cdot t_n}$$

であるから，地主・岡本・高橋（2004）で示した通り，

$$r(t_n) = -\ln d(t_n) / t_n$$

として求めればよい。

イールド・カーブ構築例

ある国の利付国債に関する情報が，以下の表の通り与えられている場合を例に考えることにしよう。この 4 種類の債券の情報から，利払日（キャッシュ・フローの発生する時点）の現価係数を推計する。

	債券 1	債券 2	債券 3	債券 4
残存利払回数	1	2	3	4
額面（＝償還金）	100	100	100	100
クーポン	C_1	C_2	C_3	C_4
価格	P_1+A_1	P_2+A_2	P_3+A_3	P_4+A_4

利払日と対応する年数，現価係数

利払日	1	2	3	4
基準日からの年数	t_1	t_2	t_3	t_4
現価係数	$d(t_1)$	$d(t_2)$	$d(t_3)$	$d(t_4)$

7）「クーポン・ストリッピング」は高橋琢磨（1988）第 3 章で，「逐次代入方式」は小峰ほか（1989）で言及されている呼び名である。

キャッシュ・フロー情報

利払回	0	1	2	3	4
債券 1	P_1+A_1	C_1+100	0	0	0
債券 2	P_2+A_2	C_2	C_2+100	0	0
債券 3	P_3+A_3	C_3	C_3	C_3+100	0
債券 4	P_4+A_4	C_4	C_4	C_4	C_4+100

債券 1 の情報から $d(t_1)$ を，債券 2 の情報と債券 1 の情報から求めた $d(t_1)$ で $d(t_2)$ を…と順に現価係数を推計していく。

債券 1 の情報から t_1 年の現価係数 $d(t_1)$ とスポット・レート $r(t_1)$ を以下の通り推計

$$P_1+A_1=(C_1+100)\ d(t_1)$$

$$d(t_1)=\frac{P_1+A_1}{C_1+100}$$

$$r(t_1)=-\ln\ d(t_1)/t_1$$

債券 2 の情報から t_2 年の現価係数 $d(t_2)$ とスポット・レート $r(t_2)$ を以下の通り推計

$$P_2+A_2=C_2\cdot d(t_1)+(C_2+100)\,d(t_2)$$

$$d(t_2)=\frac{P_2+A_2-C_2\cdot d(t_1)}{C_2+100}$$

$$r(t_2)=-\ln\ d(t_2)/t_2$$

債券 3 の情報から t_3 年の現価係数 $d(t_3)$ とスポット・レート $r(t_3)$ を以下の通り推計

$$P_3+A_3=C_3\cdot\sum_{j=1}^{2}d(t_j)+(C_3+100)\,d(t_3)$$

$$d(t_3)=\frac{P_3+A_3-C_3\sum_{j=1}^{2}d(t_j)}{C_3+100}$$

$$r(t_3)=-\ln\ d(t_3)/t_3$$

債券 4 の情報から t_4 年の現価係数 $d(t_4)$ とスポット・レート $r(t_4)$ を以下の通り推計

$$P_4+A_4=C_4\cdot\sum_{j=1}^{3}d(t_j)+(C_4+100)d(t_4)$$

$$d(t_4)=\frac{P_4+A_4-C_4\cdot\sum_{j=1}^{3}d(t_j)}{(C_4+100)}$$

$$r(t_4)=-\ln d(t_4)/t_4$$

という具合に満期の近い債券の情報から順に現価係数を推計し，対応するスポット・レートを求めることで，スポット・イールド・カーブを構築する[8)]。

4．国債価格からのスポット・イールド・カーブ構築[9)]

3で検討した「逐次代入方式」の手法は，各満期日に1銘柄が対応し，市場価格が⑴式で表される場合には，問題なく実行可能であるが，同一の満期日の銘柄が複数あるようなケースでは，そのまま実行できない。例えば，現状（2023年6月20日時点）の長期利付国債（発行時の残存10年）には，3月20日と9月20日の利払の銘柄と，6月20日と12月20日の利払銘柄があり，さらに，満期が2023年9月20日の銘柄が長期国債330と長期国債331の2種類，2024年12月20日の銘柄が長期国債336と長期国債337の2種類存在する（表1参照)。どちらの銘柄を利用しても同じ現価係数となれば問題ないが，むしろそうなることはまれである。このような状況においては，前述の逐次代入方式による現価係数の推計，イールド・カーブ構築を単純

8） ここでは「逐次代入方式」のイメージがはっきりするように，満期の近いものから遠いものへと順次現価係数を推計するという説明をしたが，結局のところ，現価係数を未知数とする連立方程式を解く作業にほかならない。

9） ここでは，図2にあるように，中期国債とそれ以外とでは利回りが大きく乖離していることから，長期国債と超長期国債のみを対象としてスポット・イールド・カーブを構築することにした。また，30年物超長期国債の3回債，4回債，5回債，6回債，7回債，8回債は，利払月が5月と11月であり，3回債は2030年5月20日満期と逐次代入方式での現価係数の推計を行うだけのキャッシュ・フロー情報が得られないため（短い満期のキャッシュ・フローが得られないため），現価係数推計対象から除外している。

表１　長期国債のキャッシュ・フロー例（2023年６月20日）

利払回	日付	銘柄										
		長期国債 330	長期国債 331	長期国債 332	長期国債 333	長期国債 334	長期国債 335	長期国債 336	長期国債 337	…	長期国債 369	長期国債 370
0	2023/6/21	100.44	100.34	100.38	100.71	100.73	100.90	100.90	100.60	…	101.24	101.16
1	2023/9/20	100.40	100.30	0.00	0.30	0.00	0.25	0.00	0.00	…	0.00	0.25
2	2023/12/20	0.00	0.00	100.30	0.00	0.30	0.00	0.25	0.15	…	0.25	0.00
3	2024/3/20	0.00	0.00	0.00	100.30	0.00	0.25	0.00	0.00	…	0.00	0.25
4	2024/6/20	0.00	0.00	0.00	0.00	100.30	0.00	0.25	0.15	…	0.25	0.00
5	2024/9/20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.25	0.00	0.00	…	0.00	0.25
6	2024/12/20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.25	100.15	…	0.25	0.00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
39	2032/12/20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	…	100.25	0.00
40	2033/3/20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	…	0.00	100.25

に適用することはできない[10)]。

これに対する対応策として，逐次代入方式を利用する工夫をするものと，取引されている価格には誤差が含まれているとして対処する方法が考えられる。

4.1. 逐次代入方式を利用する工夫

逐次代入方式を利用する工夫としては，ひとつに絞り込んだ銘柄から現価係数を推計する方法と各償還日ごとの現価係数を推計し，その平均を償還日の現価係数として採用する方法が考えられる。

4.1.1. ひとつに絞り込んだ銘柄から現価係数を推計する方法

何らかの方法で，満期日ごとに銘柄をひとつに絞り込むことで，逐次代入方式による推計を行う。上記の例であれば長期国債330と長期国債331のどちらか一方，長期国債336か長期国債337のどちらか一方を選ぶことができれば，逐次代入方式を利用することができる。

上記の例は10年物の長期国債のみについて考えたものであるが，国債流通市場では，このほかに，２年物，５年物の中期国債，20年物，30年物，40年物の超長期国債が取引されている。これらの国債の取引情報からスポット・イールド・カーブを構築する際には，より多くの銘柄からの絞り込みが必要になる。

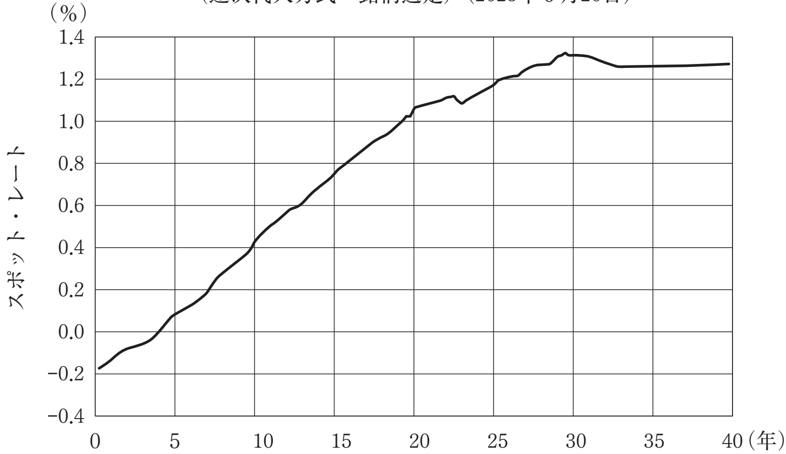
表２は2023年６月20日時点の長期・超長期国債キャッシュ・フローの一部を示したものである。前述の通り，今回は，長期国債と超長期国債のみを対象としてスポット・イールド・カーブを構築するが，同じ満期日からの銘柄選定にあたっては，発行時の年限の短いもの（長期国債と超長期国債では長期国債を，超長期国債の中では，超長期国債，超長期国債（30），超長期国債（40））から順に選定することにした。また，同じ種類の国債で複数銘柄が該当する場合は回号の小さいもの（長期国債330と長期国債331であれば長期国債330）を選定することにした。2023年９月

10）　この点に関して，小峰ほか（1989）19頁では，「また，実際には同じ満期日の銘柄が複数あるケースは希であり，推計値の個数の割にデータの個数が少ないという計算上の問題点もある」と指摘しているが，前者に関しては現状では同じ満期日の銘柄が複数あるケースの方がむしろ一般的であろう。

表２　長期・超長期国債キャッシュ・フロー例（2023年６月20日）

利払回	日付	銘柄								
		1	2	3	4	5	6	…	255	256
		長期国債 330	長期国債 331	超長期国債 64	長期国債 332	超長期国債 65	超長期国債 66	…	超長期国債 (40) 15	超長期国債 (40) 16
0	2023/6/21	100.44	100.34	100.38	100.71	100.73	100.90	…	90.31	98.52
1	2023/9/20	100.40	100.30	100.30	0.00	0.00	0.00	…	0.90	0.85
2	2023/12/20	0.00	0.00	0.00	100.30	100.30	100.25	…	0.00	0.00
3	2024/3/20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	…	0.90	0.85
4	2024/6/20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	…	0.00	0.00
5	2024/9/20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	…	0.90	0.85
6	2024/12/20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	…	0.00	0.00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
128	2062/3/20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	…	100.90	0.85
129	2063/3/20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	…	0.00	100.85

図４　国債流通市場でのスポット・イールド・カーブ
（逐次代入方式：銘柄選定）（2023年６月20日）



20日のキャッシュ・フローを現在価値に割り引くための現価係数 $d(t_1)$ は長期国債330のキャッシュ・フロー $C_{1,1}$ から，2023年12月20日のキャッシュ・フローを現在価値に割り引くための現価係数 $d(t_2)$ は長期国債332のキャッシュ・フロー $C_{4,2}$ からという具合に順に求めていく。こうして選定した銘柄の2023年６月20日時点の情報をもとに，現価係数を推計し，スポット・イールド・カーブを構築したものが図４である。

4.1.2. 各償還日ごとの現価係数を推計し，その平均を償還日の現価係数として採用する方法

4.1.1では満期日ごとに銘柄をひとつに絞り込むことで，逐次代入方式による推計を行った。これに対して，表２のすべての銘柄について逐次代入方式による現価係数を推計する方法を考えてみよう。国債 i のキャッシュ・フローをもとに推計した i 回目のキャッシュ・フローに対応する現価係数を $d_i(t_j)$ と表すことにすると，債券価格とキャッシュ・フローの現在価値の関係は，

$$P_i+A_i=\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}\cdot d_i(t_j) \qquad (2)式$$

となることから，満期時のキャッシュ・フローに対応する現価係数は

$$d_i(t_n)=\frac{P_i+A_i-\sum_{j=1}^{n-1}\mathrm{C}_{i,j}\cdot d_i(t_j)}{C_{i,n}}$$

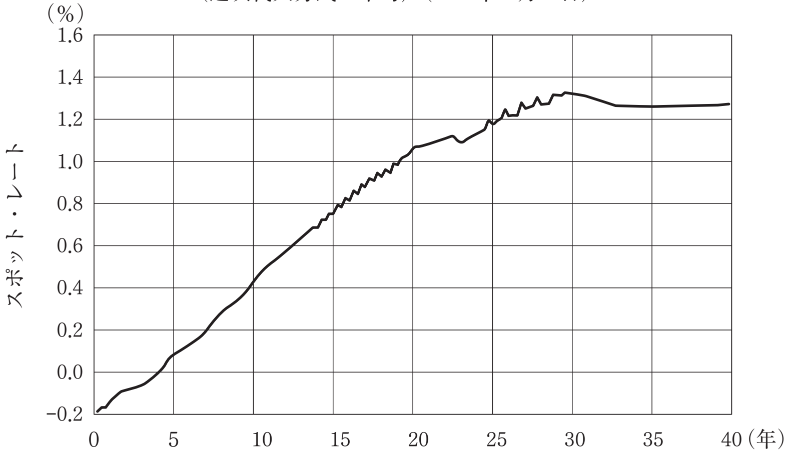
として推計することができる。同じ満期の国債が m 銘柄ある場合，推計した現価係数を平均して

$$d(t_n)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}d_i(t_n)$$

$d(t_n)$ を求めようという考え方である。

表 2 の長期・超長期国債キャッシュ・フローをみると，2023年 9 月20日のキャッシュ・フローを現在価値に割り引くための現価係数 $d(t_1)$ は，長期国債330，長期国債331，超長期国債64の 3 銘柄に関係していることがわかる。2023年 9 月20日のキャッシュ・フローを現在価値に割り引くための現価係数 $d(t_1)$ は，長期国債330のキャッシュ・フロー $C_{1,1}$ から $d_1(t_1)$ を，求める長期国債331のキャッシュ・フロー $C_{2,1}$ から $d_2(t_1)$ を，超長期国債64のキャッシュ・フロー $C_{3,1}$ から $d_3(t_1)$ を

図 5　国債流通市場でのスポット・イールド・カーブ
（逐次代入方式：平均）（2023年 6 月20日）



$$d_i(t_1)=\frac{P_i+A_i}{C_{i,1}}$$

として求め，これらを平均することで $d(t_1)$ を求めることができる。こうして順に現価係数を求め，同じ満期日に複数の銘柄が存在する場合は，現価係数を平均することで市場全体としての現価係数を推計し，スポット・イールド・カーブを推計した結果が図５である。

4.2.　市場価格に誤差があると想定する方法

4.2.1.　現価係数を直接推計する方法

複数キャッシュ・フローの現在価値は，将来のキャッシュ・フローを対応する現価係数を用いた割引現在価値合計として評価することができる。債券 i の j 回目キャッシュ・フロー $C_{i,j}$ が基準日から t_j 年後に発生する場合，このキャッシュ・フローの現在価値は対応する（基準日から t_j 年の）現価係数 $d(t_j)$ を用いると $C_{i,j}\cdot d(t_j)$ と表すことができるから，この債券 i の今後 n 回発生するキャッシュ・フローの現在価値合計が固定利付債の評価（利込値）P_i+A_i となるので，

$$P_i+A_i=\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}\cdot d(t_j)$$

となる。ここで，各銘柄の価格に含まれる誤差を ε_i とすると，

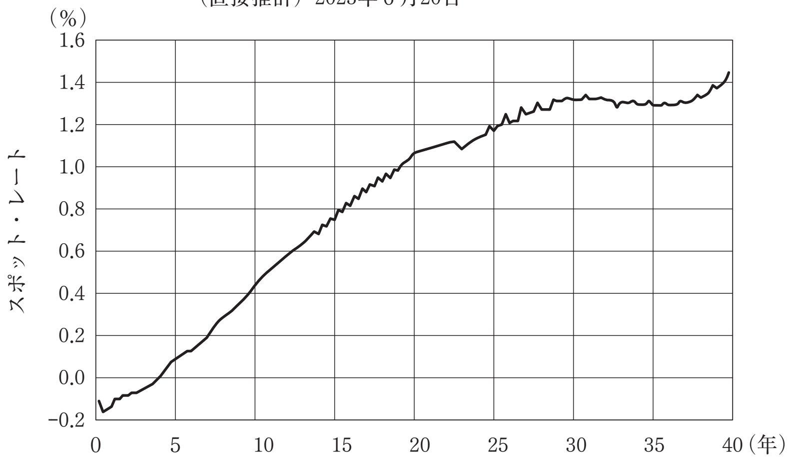
$$P_i+A_i=\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}\cdot d(t_j)+\varepsilon_i \qquad (3)式$$

という関係が考えられる。そこで，m 種類の債券の各銘柄の価格に含まれる誤差 ε_i の二乗（残差平方和）

$$\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^{\,2}$$

が最小となるような現価係数を推計するという方法が考えられる。この手法で現価係数を推計し，スポット・イールド・カーブを求めたものが図６である。ただし，この手法では，前述の小峰ほか（1989）の指摘の「…推計値の個数の割にデータの個数が少ないという計算上の問題点もある。」ということが言える。さらに，パラメータ数とデータ数との相対的な関係だけでなく，パラメータの絶対数が多いとい

図 6　国債流通市場でのスポット・イールド・カーブ
（直接推計）2023年 6 月20日



う問題もある。例えば Microsoft Excel で簡単に検証しようと試みても，推定するパラメータが多いため推計できないなどがその典型例である。

4.2.2.　割引関数を特定する方法

各現価係数 $d(t_j)$ と年数 t_j との関係を特に割引関数（discount function）と呼ぶことがある。この割引関数に特定の関数関係を仮定し，その関数のパラメータを推計することにより割引関数を特定することで，現価係数を推計する方法がある。この方法は，現価係数を直接推計する場合に比べ，推計するパラメータを減らすことができるという利点がある。割引関数に設定する関数型にはいくつかのものが考えられるが，代表的なものとしては，

・多項式関数

・スプライン関数

などがあげられる。以下，その手法を順に検討しよう。

多項式関数

現価係数 $d(t_j)$ が，年数 t_j に関する k 次の多項式

$$d(t_j) = a_0 + a_1 \cdot t_j + \cdots + a_k \cdot t_j^k$$

の割引関数で与えられるとする。このとき債券 i の価格とキャッシュ・フローの現在価値合計の関係を示す(2)式は，

$$P_i + A_i = \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} (a_0 + a_1 \cdot t_j + \cdots + a_k \cdot t_j^k) + \varepsilon_i$$

となることから，

$$P_i + A_i = a_0 \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} + a_1 \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} \cdot t_j + \cdots + a_k \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} \cdot t_j^k + \varepsilon_i$$

である。さらに，現在時点（基準日，$t_j = 0$）の現価係数 1 であるから，

$$d(0) = a_0 = 1$$

として，

$$P_i + A_i - \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} = a_1 \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} \cdot t_j + \cdots + a_k \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} \cdot t_j^k + \varepsilon_i \qquad (4)\text{式}$$

という関係が得られる。そこで(3)式に関して，m 種類の債券の各銘柄の価格に含まれる誤差 ε_i の二乗（残差平方和）

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2$$

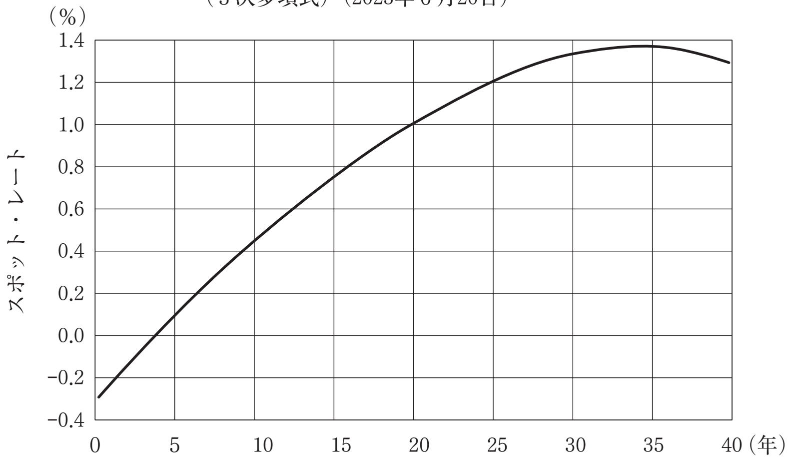
が最小となるようなパラメータ $a_0, a_1, \cdots, a_k$ を求めることができる。割引関数に 3 次の多項式を設定した場合のスポット・イールド・カーブの推定結果は図 7 の通りである。

スプライン関数

割引関数として設定するスプライン関数にはいくつかのものが考えられるが，代表的なもののひとつが 3 次自然スプライン関数である。ここで，割引関数が節点(knot) k 個の 3 次自然スプライン関数（Cubic Natural Spline Function）で与えられるものとすると[11]，

11）　実際の関数形を特定する際には，節点の設定が重要となる。設定の判断

図７　国債流通市場でのスポット・イールド・カーブ
（３次多項式）（2023年６月20日）



$$d(t_j)=a_0+a_1\cdot t_j+\sum_{l=1}^{k}b_l\cdot max(t_j-t_l,0)^3 \qquad (5)式$$

と示すことができ，⑵式は

$$P_i+A_i=\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}\cdot\left\{a_0+a_1\cdot t_j+\sum_{l=1}^{k}b_l\cdot max(t_j-t_l,0)^3\right\}+\varepsilon_i$$

となる。さらに，現在時点（基準日，$t_j=0$）の現価係数１であるから，

$$d(0)=a_0=1$$

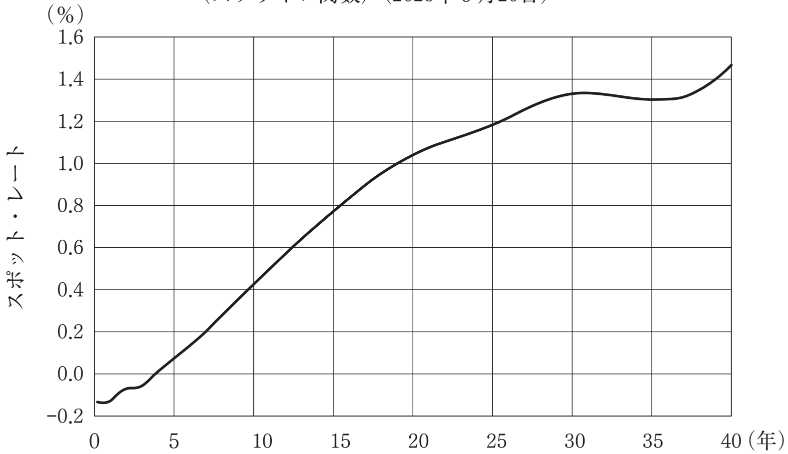
となることがわかる。これより⑵式は，

$$P_i+A_i=\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}\cdot\left\{1+a_1\cdot t_j+\sum_{l=1}^{k}b_l\cdot max(t_j-t_l,0)^3\right\}+\varepsilon_i$$

$$P_i+A_i-\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}=a_1\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}\cdot t_j+\sum_{l=1}^{k}b_l\left\{\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}\cdot max(t_j-t_l,0)^3\right\}+\varepsilon_i \qquad (6)式$$

基準としては，例えば，高橋豊治ほか（2010）では，⑷式の $d(t_j)$ から求めた理論値と，市場価格との乖離率が最小となるものを利用し，節点を設定している。

図８　国債流通市場でのスポット・イールド・カーブ
（スプライン関数）（2023年６月20日）



と表すことができる。

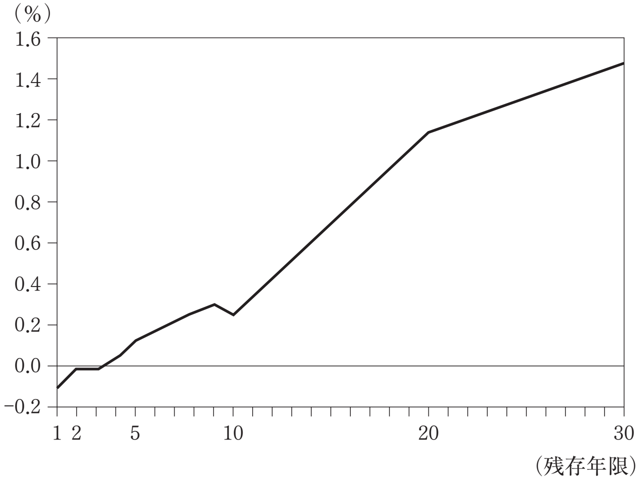
上記(5)式から，多重回帰分析を用いて，a_1 及び b_l の値を求め(4)式に適用することで，t_j 時点における現価係数 $d(t_j)$ を求めることになる。

このようにして推計されたイールド・カーブが図８である。

５．お わ り に

国債の利回りと残存銘柄の散布図を描いた図１やその拡大版である図２をみると明らかなように，利回り曲線として１本の曲線で描くことは容易ではない。市場全体としての「ざっくり」とした関係をみることが目的であるとしても，１本の曲線として描くことにどれだけの意味があるだろうか。そもそも，各銘柄の最終利回りと残存年数との関係を直感的に理解するために両者の関係を散布図として描くことで，個々の銘柄の利回り形成の特徴を明らかにすることの方が有用なケースが多いのではないだろうか。図９は日本銀行のイールドカーブ・コントロール（YCC）の運用の見直しに際して提示された説明資料の一部である。残存年数10年の利回りが低位に抑えられている状況を示したものであるが，同じ時期の利回りと残存年数を散布図に示したものが図10である。さらにわかりやすいように５年から10年までの

図 9　国債のイールドカーブ（12月決定会合前）



（出所）　日本銀行「イールドカーブコントロール（YCC）の運用の見直し」より（2023年 3 月25日閲覧）。

期間を図11に拡大して示しておいた。図11を見ると明らかであるが，残存年数が 9 年の利回りが全体の傾向より低位に位置していることに加え，残存年数が 9 年から10年の間の長期国債 3 銘柄がほかの国債の利回りの傾向より大きく低い水準に乖離している。こうした情報は利回りと残存年数の関係を図 9 のような 1 本の「利回り曲線」として描くことで失われてしまっている。

また，イールド・カーブ構築方法についても，どの手法を用いるかで，結果が大きく変わってくる。様々なイールド・カーブ構築方法に対応して得られた図 4 から図 8 のスポット・イールド・カーブの形状だけをみても，現価係数の推計方法によってイールド・カーブの形状が大きく異なっていることからもわかる。国債流通市場のスポット・イールド・カーブは，市場参加者のキャッシュ・フロー評価にとって基本となるものであり，非常に重要である。こうした基本となる情報のもととなる現価係数の推計方法として，どの手法を利用するかについては，どのように手法を評価するかも含めて，慎重な検討が必要であろう。今回は手法の整理と結果の違

図10　国債流通市場の利回り曲線（2022年12月20日）

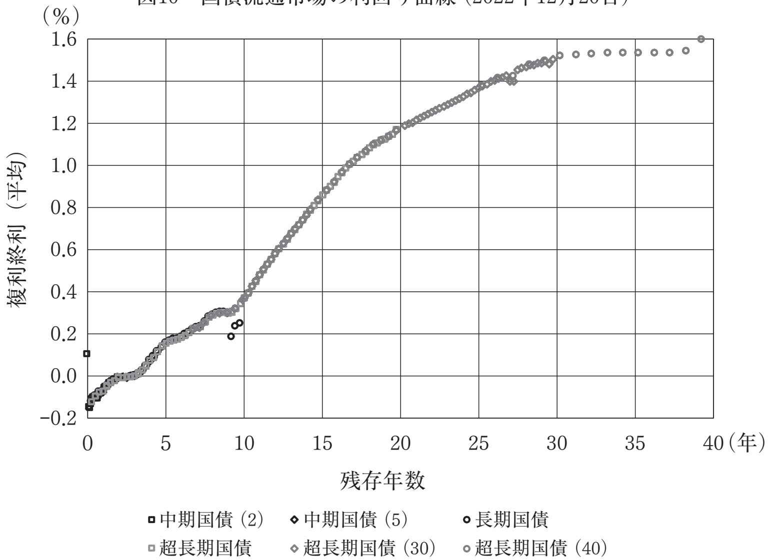
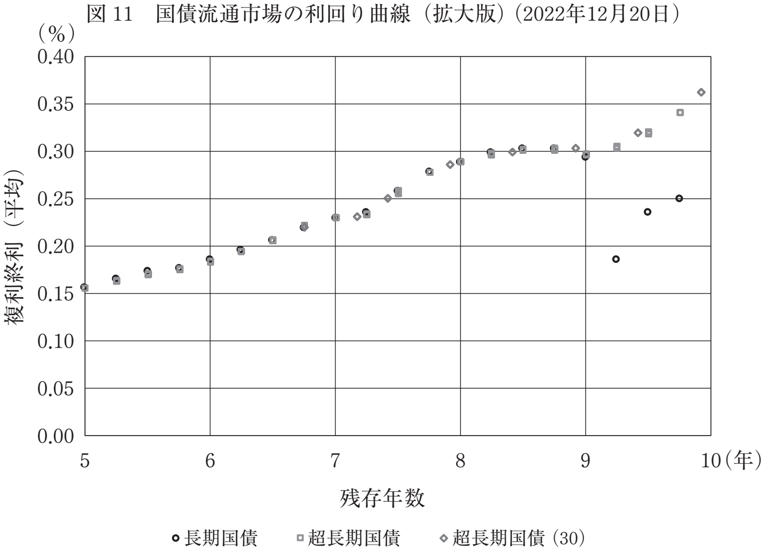


図 11　国債流通市場の利回り曲線（拡大版）（2022年12月20日）



いが生じることを明らかにするにとどまっているが，この点については，今後の課題としたい。

参考文献

Benninga, S. (2008), *Financial Modeling*, 3rd edition, The MIT Press.

地主敏樹・岡本光技・高橋豊治（2004）「金融危機下の金融緩和：1991年のFOMC」『国民経済雑誌』第189巻第5号。

小峰みどり他（1989）「わが国債券市場固有の現象と期間構造分析」『ファイナンシャルレビュー』大蔵省財政金融研究所。

日本銀行「イールドカーブコントロール（YCC）の運用の見直し」
https://www.boj.or.jp/mopo/mpmdeci/mpr_2022/rel221220h.pdf　2023年3月25日閲覧。

日本銀行ウェブサイト「用語解説」
https://www.boj.or.jp/about/education/oshiete/glossary/market/m12.htm
2023年6月30日閲覧。

日本銀行（2016）「金融緩和強化のための新しい枠組み：「長短金利操作付き量的・質的金融緩和」」2016年9月21日公表。
https://www.boj.or.jp/mopo/mpmdeci/mpr_2016/k160921a.pdf　2023年6月30日閲覧。

参議院調査室（2016）「イールドカーブとは」『経済のプリズム』第154号，41-42頁。

高橋琢磨（1988）『現代債券投資分析―スポット・レート革命と金融新商品―』日本経済新聞社。

高橋豊治ほか（2010）「本邦国債流通市場におけるイールド・カーブの形状変化―BB国債価格（引値）を用いた実証分析」『企業研究』⒄，119-156頁。

財務省国債金利情報ウェブサイト
https://www.mof.go.jp/jgbs/reference/interest_rate/index.htm　2023年6月30日閲覧。

財務省国債金利情報ウェブサイト「イールドカーブとは何ですか」
https://www.mof.go.jp/faq/jgbs/04hd.htm　2023年6月30日閲覧。