有限群スキームの torsor について

– On the torsors of certain finite group schemes –

数学専攻　正木 正子
MASAKI Masako

概 要

k : 体,　G : 有限群に対し, G をガロア群とするガロア拡大 K/k をつくる. この時, Spec$K$ は Spec$k$ 上の G_k−torsor とみなせる.

この概念を拡張し, 有限群スキーム N をガロア群に持つ, Spec$A$ の拡大である N−torsor について考え, 更に N−torsor の special fiber と generic fiber を求め, 引き上げ問題を考えてみる.

定義 1. S を X 上のスキーム, G を X 上の群スキームとする. S, G が次の条件を満たす時, S を X 上の G−torsor という.

- G が S に作用し, S は X 上忠実平坦 (faithfully flat) かつ X 上局所有限型 (locally of finite type) である.
- 次の写像が同型射 (isomorphism) である.

$$\begin{array}{ccc} S \times_X G & \longrightarrow & S \times_X S \\ (s,g) & \longmapsto & (s,sg) \end{array}$$

1　SpecA 上の N-torsor

1.1　仮定

$A = (A, \mathfrak{m})$: 離散付置環 (DVR), $\mathfrak{m} = \pi A$(A の極大イデアル)
$k = A/\mathfrak{m}$　(A の剰余体),　char$k = p > 0$
$\lambda \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$,　$v(\lambda^{p-1}) = (p-1)v(\lambda) < v(p)$　(v は付値)
$K = f.f.(A)$(A の商体) ,　char$K = 0$
$\mu_p = \{1, \zeta_p, {\zeta_p}^2, \cdots, {\zeta_p}^{p-1}\} \subset K$　(ζ_pは 1 の原始 p 乗根)
$\mu \in \mathfrak{m}$ に対し, $\mathcal{G}^{(\mu)} := \mathrm{Spec}A\left[X, \dfrac{1}{1+\mu X}\right]$ と置く.
この群スキーム構造を, $x \circ y := x + y + \mu xy$ で定義する.
これにより, $\mathcal{G}^{(\mu)}$は $SpecA$ 上のアファイン群スキームとなる.

1.2

Spec$A$ 上の, 次のような完全列 (1), (2) を考える.

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_d} \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

$i_d \ : \ x \longmapsto x, \ \ \psi \ : \ x \longmapsto \dfrac{(\lambda x+1)^p-1}{\lambda^p}, \ \ N = \mathrm{Spec}\Big(A[X]\Big/\big(\frac{(\lambda X+1)^p-1}{\lambda^p}\big)\Big)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\alpha^{(\lambda)}} \mathbb{G}_{m,A} \xrightarrow{\iota^\sharp} \iota_*\mathbb{G}_{m,A/\lambda A} \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

$\alpha^{(\lambda)} \ : \ x \longmapsto \lambda x+1, \ \ \iota^\sharp \ : \ x \longmapsto \overline{x} \bmod \lambda$
(2) は, $\iota : \mathrm{Spec}A/\lambda A \hookrightarrow \mathrm{Spec}A$(自然な閉移入) から得られる. (1) より,

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(\mathrm{Spec}A, N) \xrightarrow{i_d} H^0(\mathrm{Spec}A, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \xrightarrow{\psi} H^0(\mathrm{Spec}A, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \\ &\xrightarrow{\partial} H^1(\mathrm{Spec}A, N) \longrightarrow H^1(\mathrm{Spec}A, \mathcal{G}^{(\lambda)}) = 0 \end{aligned} \qquad (1)'$$

が得られ, $H^0(\mathrm{Spec}A, N) \cong \Big\{a \in A \Big| \ \frac{(\lambda a+1)^p-1}{\lambda^p} = 0\Big\}$,
$H^0(\mathrm{Spec}A, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \cong A, H^0(\mathrm{Spec}A, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \cong A$,
$H^1(\mathrm{Spec}A, N) \cong A/\mathrm{Im}\ \psi = A\Big/\Big\{\dfrac{(\lambda a+1)^p-1}{\lambda^p}\Big| \ \forall a(\in A)\Big\}$となる.
a を, $\overline{a}(\in A/\mathrm{Im}\ \psi)$ の代表元とすると, $H^1(\mathrm{Spec}A, N)$ は, Spec$A$ 上の,
a に対する $N-$torsor の同型類 の集合である.$\partial(a) \in H^1(\mathrm{Spec}A, N)$ は,
$\partial(a) = \mathcal{G}^{(\lambda)} \times_{\mathcal{G}^{(\lambda^p)}} \mathrm{Spec}A = \mathrm{Spec}\Big(A[X]\Big/\big(\frac{(\lambda X+1)^p-1}{\lambda^p} - a\big)\Big)$となり, N は $\partial(a)$ にガロア群として $N \times_{\mathrm{Spec}A} \partial(a) \longrightarrow \partial(a)$ のように作用する.

1.3 N-torsor の special fiber と generic fiber

1.3.1 $\alpha_{p,k}-$torsor

$\partial(a)(= N-$torsor) に対する special fiber $= \big(\partial(a)\big)_s$は, $\alpha_{p,k}-$torsor となる. 但し, $\alpha_{p,k} = N_s = N \otimes_A k = \mathrm{Spec}\big(k[X]/(X^p)\big)$,
$\big(\partial(a)\big)_s = \partial(a) \otimes_A k = \mathrm{Spec}\big(k[X]/(X^p - \overline{a})\big)$ である.$\alpha_{p,k}$ は, $\big(\partial(a)\big)_s$に
ガロア群として$\alpha_{p,k} \times_{\mathrm{Spec}k} \big(\partial(a)\big)_s \to \big(\partial(a)\big)_s$のように作用する.$H^1(\mathrm{Spec}k, \alpha_{p,k})$
は, Spec$k$ 上の, $\overline{a}$ に対する $\alpha_{p,k}-$torsor の同型類の集合である.

1.3.2 $\mu_{p,K}-$torsor

$\partial(a)(= N-$torsor) に対する generic fiber $= \big(\partial(a)\big)_\eta$は, $\mu_{p,K}-$torsor となる. 但し, $\mu_{p,K} = N_\eta = N \otimes_A K = \mathrm{Spec}\big(K[T]/(T^p-1)\big)$,
$\big(\partial(a)\big)_\eta = \partial(a) \otimes_A K \cong \mathrm{Spec}\Big(K[T]/\big(T^p - (\lambda^p a+1)\big)\Big)$である.
($T = \lambda X + 1$ とする) $\mu_{p,K}$ は, $\big(\partial(a)\big)_\eta$にガロア群として,
$\mu_{p,K} \times_{\mathrm{Spec}K} \big(\partial(a)\big)_\eta \longrightarrow \big(\partial(a)\big)_\eta$のように作用する.$H^1(\mathrm{Spec}K, \mu_{p,K})$
は, Spec$K$ 上の, a に対する $\mu_{p,K}-$torsor の同型類の集合である.

1.4 まとめ

$\overline{a} \in H^1(\mathrm{Spec}A, N) \cong A \Big/ \Big\{ \dfrac{(\lambda a+1)^p - 1}{\lambda^p} \Big| \ \forall a (\in A) \Big\}$に対し,
a を, $\overline{a}$ の代表元とする. この a に対し,次のように表せる.

$\alpha_{p,k} - \mathrm{torsor} = \mathrm{Spec}\big(k[X]/(X^p - \overline{a})\big) \cong \mathrm{Spec}\ k(\overline{a}^{\frac{1}{p}})$

$N - \mathrm{torsor} = \mathrm{Spec}\Big(A[X]\Big/\big(\frac{(\lambda X+1)^p - 1}{\lambda^p} - a\big)\Big)$

$\mu_{p,K} - \mathrm{torsor} = \mathrm{Spec}\Big(K[T]/\big(T^p - (\lambda^p a + 1)\big)\Big)$

全ての $H^1(\mathrm{Spec}A, N)$ の元 $a \cong \partial(a)$(a に対する $N - \mathrm{torsor}$) は,
その special fiber である $\alpha_{p,k} - \mathrm{torsor}$ から, generic fiber である
$\mu_{p,K} - \mathrm{torsor}$ への変形を与える.
一方,任意の$\alpha_{p,k} - \mathrm{torsor} \in H^1(\mathrm{Spec}k, \alpha_{p,k})$ に対し,これに対応する
$N - \mathrm{torsor}$ は,$\alpha_{p,k} - \mathrm{torsor}$ の,$\mu_{p,K} - \mathrm{torsor}$ への引き上げとなっている.

2 X 上の N-torsor

2.1 A 上のスキーム X

$X \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Spec}A$, $X; A$ 上有限型の射影スキーム, $\mathcal{O}_X(X) = A$
を仮定する. $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}A} \xrightarrow{\varphi^\sharp} \varphi_*\mathcal{O}_X$ より, $\varphi_*\mathcal{O}_X \cong \widetilde{A}$ は $\mathrm{Spec}A$ 上の構造層となる. 又, その他の条件は, **1.1** で仮定した通りとする.
1.2 における,$\mathrm{Spec}A$ 上の完全列は,X 上の完全列と見る事ができる.

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_d} \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

$\iota_1 : \mathrm{Spec}A/\lambda A \hookrightarrow \mathrm{Spec}A$, $\quad \iota_2 : \mathrm{Spec}A/\lambda^p A \hookrightarrow \mathrm{Spec}A$ から,

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\alpha^{(\lambda)}} \mathbb{G}_{m,A} \xrightarrow{\iota_1^\sharp} \iota_{1*}\mathbb{G}_{m,A/\lambda A} \longrightarrow 0 \qquad (1-1)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \xrightarrow{\alpha^{(\lambda^p)}} \mathbb{G}_{m,A} \xrightarrow{\iota_2^\sharp} \iota_{2*}\mathbb{G}_{m,A/\lambda^p A} \longrightarrow 0 \qquad (1-2)$$

$\alpha^{(\lambda)}\ :\ x \longmapsto \lambda x + 1,\quad \iota_1^\sharp\ :\ x \longmapsto \overline{x} \bmod \lambda$
$\alpha^{(\lambda^p)}\ :\ x \longmapsto \lambda^p x + 1,\quad \iota_2^\sharp\ :\ x \longmapsto \overline{x} \bmod \lambda^p$ が得られる.
$(1-1)$, $(2-1)$ から得られる長完全列より,
$H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \cong \big\{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X) \big| \ \mathcal{L}|_{X_\lambda} \cong \mathcal{O}_{X_\lambda}\big\}$ $(1-2)$
$H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \cong \big\{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X) \big| \ \mathcal{L}|_{X_{\lambda^p}} \cong \mathcal{O}_{X_{\lambda^p}}\big\}$ $(2-2)$ と表せる.
但し, $H^1(X, \mathbb{G}_{m,A}) = \mathrm{Pic}(X)$,
$H^1(X, \mathbb{G}_{m,A/\lambda A}) = \mathrm{Pic}(X_\lambda)$, $\quad H^1(X, \mathbb{G}_{m,A/\lambda^p A}) = \mathrm{Pic}(X_{\lambda^p})$,
$\iota_1^\sharp : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}|_{X_\lambda} := \iota_1^*\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} \bmod \lambda$, $\quad \iota_2^\sharp : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}|_{X_{\lambda^p}} := \iota_2^*\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} \bmod \lambda^p$,
$X_\lambda := \iota_1^* X = X \times_{\mathrm{Spec}A} \mathrm{Spec}(A/\lambda A)$, $X_{\lambda^p} := \iota_2^* X = X \times_{\mathrm{Spec}A} \mathrm{Spec}(A/\lambda^p A)$
とする.

2.2 cocycles

$X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i = \mathrm{Spec} A_i$, $U_{ij} := U_i \cap U_j$ $(i, j \in I)$,
$t_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_{ij})^{\times} = A_{ij}^{\times}$, t_{ij} ; transition function
$\{t_{ij}\}_{i,j \in I}$; cocycle とする． t_{ij} 倍写像 $(t_{ij} \cdot)$: $\mathcal{O}_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_{ji}}$から，$X$ 上の可逆層 $\mathcal{L}$ が得られる．又，$\mathcal{L}|_{X_\lambda} = \{\overline{t_{ij}}\}$ mod λ である．
この時，$(1-2)$，$(2-2)$ は，
$H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \cong \left\{ \{t_{ij}\}_{i,j \in I} \middle| \ \overline{t_{ij}} \equiv \overline{1} \bmod \lambda \right\}$ $(1-3)$
$H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \cong \left\{ \{t_{ij}\}_{i,j \in I} \middle| \ \overline{t_{ij}} \equiv \overline{1} \bmod \lambda^p \right\}$ $(2-3)$ と表せる，
(1) から得られる長完全列に，$(1-3)$ と $(2-3)$ を当てはめると,次のように表せる．

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X, N) \xrightarrow{i_d} H^0(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \xrightarrow{\psi} H^0(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \\ &\xrightarrow{\partial} H^1(X, N) \xrightarrow{l} H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \xrightarrow{\theta} H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \end{aligned} \tag{2}$$

但し，θ : $\{t_{ij}\} \longmapsto \{t_{ij}{}^p\}$ $(i, j \in I)$ とする．従って，次を得る．

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\ l &= \left\{ \{t_{ij}\}_{i,j} \ \middle| \ \overline{t_{ij}} \equiv \overline{1} \bmod \lambda, \text{ かつ } t_{ij}^p = 1 \right\} \\ &= \left\{ \{t_{ij}\}_{i,j} \ \middle| \ t_{ij} = \lambda u_{ij} + 1, \text{ かつ } t_{ij}^p = (\lambda u_{ij} + 1)^p = 1, \{u_{ij}\} : \text{cocycle} \right\} \\ &= \left\{ \{u_{ij}\}_{i,j} \ \middle| \ u_{ij} \in N(U_{ij}) \right\} \end{aligned}$$

$\overline{a} \in A/\mathrm{Im}\ \psi$, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i = \mathrm{Spec} A_i$ に対し，

$$A_i[x_i] := A_i[X_i] \Big/ \left(\frac{(\lambda X_i + 1)^p - 1}{\lambda^p} - a \right) \quad (a \text{ は } \overline{a} \text{ の代表元}) \text{ と定義すると，}$$

$\mathrm{Spec} A_i[x_i]$ は，$U_i = \mathrm{Spec} A_i$上の，$N -$ torsor と考えられる．
今，a と，Im l の元 $\{u_{ij}\}_{i,j}$ を 1 つとる．この時，
$\bigcup_{i \in I} \mathrm{Spec} A_i[x_i] \longrightarrow X = \bigcup_{i \in I} U_i$ から，$\big(a, \{u_{ij}\}\big)$に対する
X 上の $N -$ torsor は，

$$\bigcup_{i \in I} \mathrm{Spec} A_i[x_i] \quad \text{と表せる．}$$

参考文献

James S. Milne，Étale Cohomology，Princeton University Press，1980