可分計画法を用いた区分的線形回路の すべての解を求めるアルゴリズム

An Algorithm for Finding All Solutions of Piecewise-Linear Circuits Using Separable Programming

電気電子情報通信工学専攻　早田　将人
Masato　HAYATA

1. まえがき

非線形回路，あるいはそれを区分的線形近似することにより得られる区分的線形回路のすべての直流解を求める効率的かつ実用的なアルゴリズムを確立することは，重要な未解決問題の一つである．この問題は変数の数の増加とともに計算時間が指数関数的に増大する，本質的に難しい（NP 困難と呼ばれる）問題である．この問題に対して，これまで様々なアルゴリズムが提案されている [1]∼[3]．また，近年の計算機パワーの増大により，以前には計算不可能であった大規模な問題が扱えるようになっている [4]．そのため，整数計画法のソフトウェアを用いた全解探索など実現容易性をテーマにした研究がなされている [5]．しかし，このような整数計画法を用いた方法は線形計画法を用いた方法に比べて，計算時間がかかる方法である．

本研究では，非線形計画問題を解く場合に用いられる可分計画法 [6]∼[10] を非線形回路解析に応用することで，複雑なプログラミングをすることなく，線形計画法に簡単な修正を施すだけで区分的線形回路の近似解を求める手法を提案する．また，この可分計画法と従来の区間解析法を組み合わせることで全解探索に応用することを考える．

2. λ フォーム

文献 [11], [12] において λ フォームと呼ばれている定式化手法を説明する．

x が n 変数の場合を考える．小区間 $[x_{ij-1}, x_{ij}]$ 内において正の補助変数 $\lambda_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 0, 1, \cdots, K)$ を用いて x_i を次のように表現できる．

$$x_i = x_{ij-1}\lambda_{ij-1} + x_{ij}\lambda_{ij}$$
$$\lambda_{ij-1} + \lambda_{ij} = 1 \tag{1}$$

ただし，$0 \leqq \lambda_{ij} \leqq 1$ である．小区間 $[x_{ij-1}, x_{ij}]$ 内 (図 1) で方程式は直線なので，y_i は次のように表現することができる．

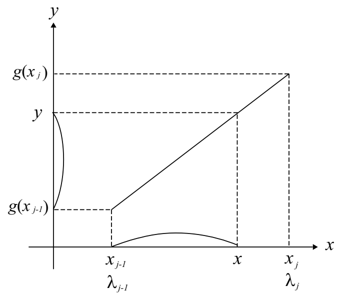

図 1　λ フォーム:区間

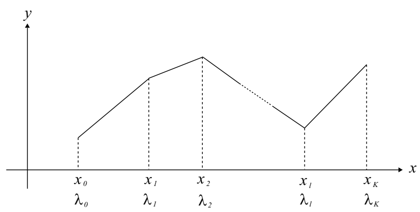

図 2　λ フォーム:初期領域

$$y_i = g_i(x_{ij-1})\lambda_{ij-1} + g_i(x_{ij})\lambda_{ij} \tag{2}$$

小区間内での表現を基に，初期領域全体まで領域を拡張した場合を考えると (図 2)，x_i, y_i は，それぞれ次のように表すことができる．

$$x_i = \sum_{j=0}^{K} x_{ij}\lambda_{ij} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
$$y_i = \sum_{j=0}^{K} g_i(x_{ij})\lambda_{ij} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
$$\sum_{j=0}^{K} \lambda_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

この λ フォームでは，文献 [11], [12] にあるようにモデル化に当たり，変数の隣接性を確保する必要がある．

3. 提案手法

3.1 可分計画法を用いた求解法

n 個の非線形抵抗を含む直流回路は，一般に次のような形の非線形方程式で記述することができる．

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \triangleq \boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$ は非線形抵抗の枝電圧または枝電流を要素とする n 次元変数ベクトル，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \cdots, g_n(x_n)]^T$ はこれらの抵抗の特性を表す $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への非線形関数（ただし各成分は一変数関数とする），$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ は回路の構造によって決まる $n \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{r}$ は電源の値によって決まる n 次元定数ベクトルである．

式 (4) のような混合方程式を制約条件に設定し，適切な目的関数 $f(x)$ を設定すると次のような非線形計画問題となる．

$$\begin{aligned} &\text{最小化：} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \\ &\text{制約条件：} \\ &\quad \boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \\ &\quad x_j \geqq 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{5}$$

式 (5) の非線形計画問題に λ フォームを適用し，線形近似した方程式を制約条件として設定すると式 (6) のような可分計画問題が得られる．

$$\begin{aligned} &\text{最小化：} \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{K} a_{l,j}\lambda_{l,j} \\ &\text{制約条件：} \\ &\quad \hat{f}_{i,j}(x_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{K} \lambda_{l,j} f_{i,j}(x_{l,j}) = 0 \\ &\quad (i = 1, \ldots, m) \\ &\quad \sum_{l=0}^{K} \lambda_{l,j} = 1 \quad , \quad (j = 1, \ldots, n) \\ &\quad \lambda_{l,j} \geqq 0 \\ &\quad (l = 0, \ldots, K) \quad , \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{6}$$

この可分計画問題を解けば，区分的線形回路の近似解を求めることができる．式 (6) の可分計画問題を解く場合，制約条件式の実行可能領域の凸性を用いて解く方法と「制限付き基底の入れ替え」を用いて解く方法がある．

3.2 制限付き基底の入替え

「制限付き基底の入替え」とは，シンプレックス法において，基底に入る変数に以下の制限を付けるものである．

- 変数の組に対して，多くとも 2 つの変数が値を持つ．
- 変数の組内で 2 つの変数が値を持つ場合，値を持つ変数は隣接する必要がある．

例えば，変数 (x_1, x_2, x_3) と (y_1, y_2, y_3) の組に関して次の式があるとする．

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 = 10 \tag{7}$$

この式を満たす解は無数に考えられるが，例えば，$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$，$(y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 6)$ という解は，変数 y の組において 2 つ以上の変数が値を持ってしまっているため制限の一項目を満たさない．例えば，$(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 4)$，$(y_1, y_2, y_3) = (0, 4, 0)$ という解は，変数 x の組において x_1 と x_3 が隣り合っていないため制限の二項目を満たさない．

このように,「制限付き基底の入替え」は，λ フォームの隣接性を保つために整数変数を用いる方法に酷似した考え方である．

3.3 制限付き基底の入れ替えのアルゴリズム

「制限付き基底の入替え」のアルゴリズムを説明する．基本的な操作は通常のシンプレックス法と同じである．まず，シンプレックス基準を計算し，最も大きいシンプレックス基準を持つ λ を選択する．次に，比の計算を行い入替える基底を選択する．ここで，隣接性を保つために基底の入替えが可能かどうかを判別する．今，基底に入ろうとしている λ が変数 x_i 方向に関する λ とすると，

基底の入れ替えができるのは以下の場合である．

- x_i に関する λ が 1 つも基底に存在しない場合．
- x_i に関する λ が 1 つ基底に存在し，その基底と入替える場合．
- x_i に関する λ が 1 つ基底に存在し，その基底と新たに基底にしたい λ が隣接する場合．
- x_i に関する λ が 2 つ基底に存在し，どちらかの基底と入替えを実行しても隣接性が保持される場合．

以上のいずれの条件も満たさない場合は，基底の入替えが不可能である．その場合は次に大きなシンプレックス基準を持つ λ を選び，基底の入替えの判別を再度実行する．

この操作を，正のシンプレックス基準がなくなるか，全

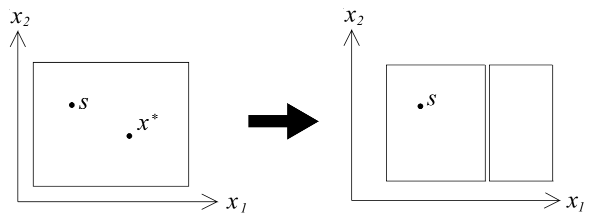

図 3　領域の分割

ての正のシンプレックス基準に対して入替えが不可能になるまで繰り返し，可分計画問題の最適解を得る．

3.4　可分計画法を用いた全解探索のアルゴリズム

通常，シンプレックス法では実行可能解を見つける第一段階 (フェーズ 1) と最小値または最大値を求める第二段階 (フェーズ 2) の両方が必要となる．しかし，可分計画法では，第一段階終了時に隣接性の保たれた解が求められる．このとき，隣接した 2 つの λ が基底解となっているため，第二段階を行っても，基底解となっている λ に隣接している λ(基底解が λ_2, λ_3 だった場合 λ_1, λ_4) にしか基底解を入れ替えることができない．そのため，制限付き基底の入れ替えを用いた可分計画法では，最小化または最大化をすることができない．そのことから，可分計画法を用いて全解探索を行うためには，解析領域を解が求められるたびに変更していく必要がある．

制限付き基底の入れ替えを用いて可分計画問題を解けば，解析領域内にある解 $x^* = (x^*{}_1, x^*{}_2, \cdots x^*{}_n)^T$ を求めることができる．そのとき，(図 3) のように解の求められた領域を分割して，除去していくことで式 (6) のすべての解を求めることができる．解析領域の分割にはあらかじめ微小な値 ϵ を設定した上で，

$$\begin{aligned} &low < x < x^* - \epsilon \\ &x^* + \epsilon < x < high \end{aligned} \tag{8}$$

という解析領域をとる (ここで，low,$high$ は元の解析領域の下限と上限を表す)．このように新たな解析領域を設定して 可分計画問題を解いていくことにより，その解析領域に存在する解を求めていくことができる．しかし，この方法では解の個数と変数の数に対して，必要となる解析回数が爆発的に増えてしまう．そこで，区間解析の手法である LP テストを用いることによって，この問題を解決することができる．LP テストでは解が含まれない区間を除去することができる．そのため，LP テストで解が含まれるかもしれないある程度の大きさの区間を判別し，その区間に対して可分計画法を適用すれば解析領域内にある解を求めることができる．この方法のアルゴリズムは次のようになる．

- 解が存在しない領域は除去する．
- 解が一意的に存在する領域は，可分計画法を適用して，その解析領域に存在する解を求める．
- 解が存在するか分からない領域，解が一意的に存在するか分からない領域に対しては，その領域を二分割し，それぞれに対して同様の手順を行う．

この手法を区分的線形回路に適用すれば，可分計画法を用いて区分的線形回路のすべての解を求めることができる．

表 1　例 1 における解の個数と計算時間（秒）

変数	解	計算時間 (秒)
10	7	0.11
20	7	0.91
30	7	4
40	7	11
50	9	24
60	9	52
70	9	104
80	7	184
90	9	289
100	9	425

4. 数　値　例

例 4.1:　n 個のエサキダイオードを含む非線形回路を考える．その計算結果を表 1 に示す．この表より，本手法は $n = 100$ の問題を数分で解いていることがわかる．

例 4.2:　図 4〜7 の 4 種類のトランジスタ回路に対し，本手法を適用した．このときの計算時間はそれぞれ **0.06** 秒，**0.01** 秒，**0.89** 秒，**1.3** 秒であった．また得られた解の個数はそれぞれ 9 個，3 個，11 個，1 個であった．この程度の規模の回路なら，本手法は瞬時にすべての解を求めることができる．

例 4.3:　回路以外の応用例を考えて n 個の変数を含む不動点問題，二点境界値問題，Broyden Tridaiagonal の三つの問題を考える．その計算結果を表 2 に示す．この表より，可分計画法は $n = 1000$ の問題を数分で解いていることがわかる．

表 2　例 3 における計算時間（秒）

変数	不動点問題	二点境界値問題	Broyden 問題
100	0.2	0.38	0.06
200	2	4	0.75
300	21	16	7
400	18	39	28
500	95	73	72
600	82	119	132
700	85	209	213
800	367	332	314
900	172	491	445
1000	837	621	557

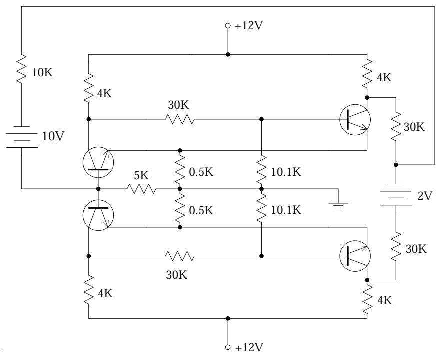

図 4　回 路 例 1

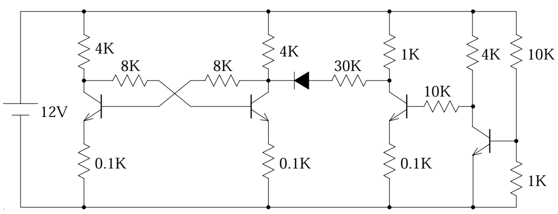

図 5　回 路 例 2

5. む す び

本研究では，可分計画法を区分的線形回路の解析に応用することを考えた．本論文で提案した可分計画法を用いた区分的線形回路の解析法では，λ フォームなどの定式化手法によって導き出した可分計画問題をシンプレックス法に少しの修正を施すだけで区分的線形回路の近似解を求めることが可能である．また，整数変数を制約条件に用いないため，整数計画問題や混合整数計画問題に比べて解く問題の規模が小さくなる．そのため，整数計画法や混合整数計画法に比べて可分計画法は効率よく解を求めることができると考えられる．数値例に記したように，可分計画法は非線形方程式を実用時間で解くことに成功しているだけでなく，可分計画法を従来の LP テストなど

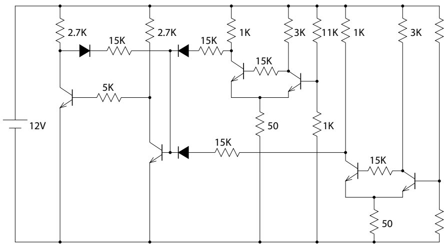

図 6　回 路 例 3

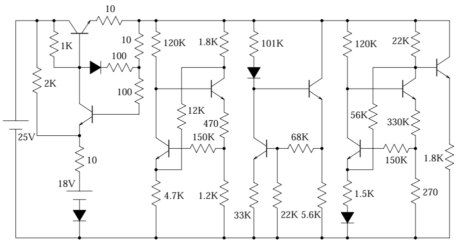

図 7　回 路 例 4

と組み合わせることで区分的線形回路のすべての解を求めることに成功している．

文　　献

[1] K. Yamamura and K. Suda, "An efficient algorithm for finding all solutions of separable systems of nonlinear equations,"BIT—Numerical Mathematics—, vol.47 , no.3, pp.681–691, Sept. 2007.

[2] K. Yamamura and A. Machida, "An efficient algorithm for finding all DC solutions of picewise-linear circuits,"International Journal of Circuit Theory and Applications, vol.36, no.8, pp.989–1000, Nov. 2008.

[3] K. Yamamura, K. Suda, and N. Tamura, "LP narrowing: A new strategy for finding all solutions of nonlinear equations," Applied Mathematics and Computation, vol.215, issue 1,pp.405–413, Sept. 2009.

[4] 宮代隆平，松井知己，"ここまで解ける整数計画," システム/制御/情報，vol.50, no.9, pp.363–368, Sept. 2006.

[5] K. Yamamura and N. Tamura, "Finding all solutions of piceewise-linear equations using integer programming," Journal of Applied Mathematics and Computation 掲載予定.

[6] C. マクミラン Jr.，前田功雄 (訳), "整数計画入門 1," 東京図書, pp.174–186, pp.231–241, Jul. 1972.

[7] 相良信子，"数理計画法入門," 森北出版, pp.94–103, Oct. 1976.

[8] M. S. Bazaraa and C. M. Shetty, "Nonlinear Programming,"John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979.

[9] S. I. Gass, "Linear Programming —methods and applications"Dover Publications,inc. Mineola, New York, 1984.

[10] S. M. Stefanov, "Separable programming —theory and methods—," Kluwer Academic Publication, pp.65–77, Aug. 2001.

[11] M. Padberg, "Approximating separable nonlinear functions via mixed zero-one programs," Operations Research Letters, vol.27, no.1, pp.1–5, Aug. 2000.

[12] P. A. Jensen and J.F. Bard, "Operations research models and methods," New York Wiley-Interscience Publication, Chapter 10, Oct. 2002.