べき行列法による Schramm Loewner 方程式の研究

Power Matrix Approach to Schramm Loewner Evolution

物理学専攻　河原　陽明
Department of Physics　Yomei Kawahara

1　はじめに

本研究のテーマは, べき行列法を用いた Schramm Loewner 方程式の新しい形の定式化である. 2000 年に Schramm により, Loewner 方程式の駆動関数にブラウン運動を挿入することで, Schramm Loewner 方程式を導入された. また同時に, Schramm Loewner 方程式に従う確率過程である Schramm Loewner evolution（以下, SLE と表す）が導入された [10]. SLE は臨界状態の界面など様々な統計力学モデルで表れる曲線を再現することができ, また確率過程, 複素関数論など, 多くの数学的内容を含むことで, SLE は物理学の中でも興味深い研究内容である. この複雑な数学構造のため, 数学としても興味深い分野であり, 2006 年と 2010 年に SLE に関する研究に対して数学界のノーベル賞とも言われるフィールズ賞が授与されている.

さらに SLE は Bauer と Bernard により共形場理論との関係が指摘されている. 共形場理論とは, 共形場理論とは共形共変性を持つ場の理論であり, 可積分系の相関関数を計算するためなどに用いられる. そのため, 統計力学と非常に関係が深い理論であり, また弦理論や重力理論とも関係が深く, 現在盛んに研究が行われている分野である. SLE と共形場理論の関係の核となるものが, 形式的 Virasoro 群である. Bauer と Bernard の研究によると, SLE はこの形式 Virasoro 群の生成子によるマルコフ過程である. しかし, 彼らの研究では形式的 Virasoro 代数に関する明らかな形での導出は与えられていない [2–8].

一方, べき行列法とは Schippers によって導入されたべき級数の解析法であり, 主に Loewner 方程式についての解析が中心的に行われている [11, 12].

本研究では, Schramm Loewner 方程式のべき行列による定式化を行うことで共形場理論と SLE の関係について, 形式的 Virasoro 群の生成子の面から研究を行った.

2　Schramm Loewner 方程式

2 次元平面の曲線の例として, まずランダムウォークのルールを変更したループ除去ランダムウォークや自己回避ウォークの経路で現れるフラクタル曲線がある. また統計力学の臨界状態で現れる 2 次元平面での曲線には, 磁性体のモデルである Ising モデルのスピンクラスターの境界線, percolation の浸透曲線などの曲線が存在する. また非平衡統計力学まで視野を広げると, 砂山モデルや森林火災模型といったモデルにも系を特徴付けるようなフラクタル曲線が存在する. 一見, これらの曲線の関係は見えないが, 共形写像の確率過程である SLE で記述出来ることが近年の研究で分かってきた.SLE の時間発展を記述する方程式は, Schramm Loewner 方程式と呼ばれ

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad U_t = \sqrt{\kappa} B_t, \quad g_{t=0} = z, \tag{1}$$

という共形写像 $g_t(z)$ についての方程式である. ここで, B_t は一次元標準ブラウン運動であり, $\kappa > 0$ は, ブラウン運動の拡散係数である. この方程式に従う確率過程である SLE は $G_t(z) = g_t(z) - U_t$ と置くことで

$$dG_t = \frac{2}{G_t} dt - \sqrt{\kappa} dB_t, \tag{2}$$

と表される [1].

3　べき行列法

べき行列法とは, Schippers によって研究されているべき級数で表すことのできる関数をべき行列という行列で表す方法である [11,12]. まずべき級数をべきの大きさによって場合分けをするために, べき級数の空間を

$$\mathbb{C}_p\left[1/z\right] = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{p} a_m z^m : a_m \in \mathbb{C}, a_p \neq 0 \right\},$$

と表す. 以下では, $p = 1$ の場合を用いて説明する. 関数 $f(z) \in \mathbb{C}_1[1/z]$ の m 次のべきの係数を $[f]_m^1$ と表し

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{1} [f]_m^1 z^m,$$

と書く. 次に級数 $f(z)$ の n 乗を展開したときに表れる m 次のべきの係数を $[f]_m^n$ と表し

$$(f(z))^n = \sum_{m=-\infty}^{n} [f]_m^n z^m,$$

と書く. このときに表れる係数 $[f]_m^n$ を (n, m) 成分に持つ行列をべき行列という.

$$[f] = \begin{pmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & [f]_{-2}^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & [f]_{-2}^{-1} & [f]_{-1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & [f]_{-2}^{1} & [f]_{-1}^{1} & [f]_{0}^{1} & [f]_{1}^{1} & 0 & \cdots \\ \cdots & [f]_{-2}^{2} & [f]_{-1}^{2} & [f]_{0}^{2} & [f]_{1}^{2} & [f]_{2}^{2} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

このように級数に対して行列を与える写像を $f \mapsto [f]$ と表す. 写像 $f \mapsto [f]$ は, 群の準同型写像を与えるため, べき級数の演算とべき行列の演算を対応させることができる.

このべき行列法により, 関数 $f_t \in \mathbb{C}_1[1/z], t \geq 0$ に対して, 関数 $h(z) \in \mathbb{C}_{\leq 1}[1/z]$ が存在するとき, 常微分形式 Loewner 方程式

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = h \circ f_t(z), \tag{3}$$

はべき行列では

$$\frac{\partial}{\partial t}[f_t] = \langle h \rangle [f_t], \tag{4}$$

と表すことができる. ただし, $\langle h \rangle$ は導べき行列と呼ばれる行列である. この導べき行列 $\langle h \rangle$ は, 関数 $h(z) \in \mathbb{C}_{\leq 1}[1/z]$ とパラメータ t を含む関数

$$F_t(z) = z + th(z) + \mathrm{o}(t), \tag{5}$$

の n 乗の微分を計算することで

$$\langle h \rangle_m^n = n[h]_{m-n+1}^1, \tag{6}$$

と与えられるものである.

4 共形場理論との関係

Bauer, Bernard によると, SLE は共形場理論で現れる Virasoro 代数を含む無限次元の群（形式的 Virasoro 群）の生成子によるマルコフ過程である [2–8]. 以下では, 形式的 Virasoro 群の説明を行う. まず Virasoro 代数の元 $L_k(k \leq 0)$ は以下の交換関係を満たす.

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}\delta_{n+m,0}n(n^2-1). \tag{7}$$

この代数を含む Bauer, Bernard が定義した形式的 Virasoro 群 F_{G_t} の生成子は

$$(F_{G_t})^{-1}dF_{G_t} = dt\left(-2L_{-2} + \frac{\kappa}{2}(L_{-1})^2\right) + \sqrt{\kappa}L_{-1}dB_t, \tag{8}$$

である. この形式的 Virasoro 群を用いることで, Bauer と Bernard は SLE の横断確率などの相関関数の計算ができることを示している. しかし, 彼らの論文で表れる形式的 Virasoro 群は共形場理論と SLE の間にあるレベル 2 の退化ベクトルと SLE の確率微分方程式の形の対応より, 仮定されたものである.

5 研究結果

私の研究は, べき行列法を SLE に適用し, SLE の新しい定式化を行うことである. 研究の結果, 共形場理論との対応が形式的 Virasoro 群を仮定せずに, 形式的 Virasoro 群によって与えられる生成子を求めることに成功した. べき行列で SLE を表し, 伊藤の公式を適用することで, 以下の形を求めることができた [9].

$$d[G_{-t}] = \left(\left\{-2\langle z^{-1}\rangle + \frac{\kappa}{2}\langle z^0\rangle^2\right\}dt + \sqrt{\kappa}\langle z^0\rangle d\widetilde{B}_t\right)[G_{-t}]. \tag{9}$$

ここで, $\langle z^{k+1}\rangle, k \in \mathbb{Z}$ は成分を

$$\langle z^{k+1}\rangle^n_m = n\delta_{n,m-k}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

と定めた行列であり, $\widetilde{B_t}$ は時間が負の方向に進むブラウン運動である. この行列 $\langle z^{k+1}\rangle$ は

$$[\langle z^{n+1}\rangle, \langle z^{m+1}\rangle] = (n-m)\langle z^{n+m+1}\rangle, \tag{11}$$

という交換関係を満たし, この交換関係を満たす代数は Witt 代数と呼ばれる. 一般に, Virasoro 代数は Witt 代数の中心拡大で得られることが知られているが, 今回の結果では Bauer と Bernard の形式的 Virasoro 代数の生成子を表すことだけであれば, Witt 代数を用いることで十分であることが判明した. そしてこの形式的 Virasoro 群は, time-ordered exponetial で表されることが判明した.

参考文献

[1] 香取眞理, Summer School 数理物理 2009 講義テキスト, 東京大学大学院数理科学研究科大講義室, (2009 年 8 月 27 日ー 30 日).

[2] M.Bauer and D.Bernard. SLE$_\kappa$ growth processes and conformal field theories. Phys. Lett. **B543**, 135-138 (2002).

[3] M.Bauer and D.Bernard. SLE martingales and the Virasoro algebra. Phys. Lett. **B557**, 309-316 (2003).

[4] M.Bauer and D.Bernard. Conformal Field Theories of Stochastic Loewner Evolutions. Comm. Math. Phys. **239**, 439-521 (2003).

[5] M.Bauer and D.Bernard. SLE, CFT and zig-zag probability. in:Proceedings of Nato Conference Conformal Invarience and Random Spatial processes. Edimbourg (2003).

[6] M.Bauer and D.Bernard. CFTs of SLEs : the radial case. Phys. Lett. **B583**, 324-330 (2004).

[7] M.Bauer and D.Bernard. Conformal transformations and the SLE partion function martingale. Ann. Henri Poincaré **5**, 289-326 (2004).

[8] M.Bauer and D.Bernard. 2D growth process:SLE and Loewner chains Phys.Rep. **432**, 115-221 (2006).

[9] R. Mahnke, J. Kaupužs and I. Lubashevsky. Physics of Stochastic Processes: How Randomness Acts in Time. WIlEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, (2009).

[10] O.Schramm. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. Israel J. Math. **118**, 221-228 (2000).

[11] E.Schippers. The power matrix, coadjoint action and quadratic differentials. J. Anal. Math. **98**, 249-277 (2006).

[12] E.Schippers. A power matrix approach to Witt algebra and Loewner equations. Computational Methods and Function Theory **10**, 399-420(2010).