修士論文要旨 (2011 年度)

整数計画法を用いた区分的線形回路の全解探索法

Finding All Solutions of Piecewise-Linear Resistive Circuits Using Integer Programming

電気電子情報通信工学専攻　上田　恭大
Takahiro　UEDA

1. まえがき

非線形回路，あるいはそれを区分的線形近似することによって得られる区分的線形回路のすべての直流解を求める効率的かつ実用的なアルゴリズムを確立することは，集積回路設計における重要な未解決問題の一つである．この問題は変数の数の増加とともに計算時間が指数関数的に増大する，本質的に難しい（NP 困難と呼ばれる）問題である．この問題に対してこれまでに様々なアルゴリズムが提案されているが [1]〜[14]，この分野の近年の発展は極めて顕著で，特に最近のアルゴリズムでは数千〜数万変数クラスの大規模非線形方程式の全解探索にも成功している [11], [13]．しかしこれらのアルゴリズムは実装の際に高度な専門知識と複雑なプログラミングを必要とするため，初心者や非専門家には敷居の高い方法であった．

そこで本研究では，初心者でも簡単に実装することのできる，実現容易な区分的線形回路の全解探索法を提案する．本手法は区分的線形回路を記述する区分的線形方程式を混合整数計画問題へと定式化し，それに GLPK, SCIP，CPLEX といった優れた整数計画法のソフトウェアを適用するものである．このようなアプローチは近年の整数計画法の驚異的発展により初めて可能となったもので，初心者でも複雑なプログラムを作ることなく，簡単に全解探索を行うことができる．また計算効率の点でも，提案手法は混合整数計画問題という難しい問題を解いているが，整数計画法のソフトウェアが高性能であるため，実用的な計算時間で全解探索を行うことができる．

2. 対象とする問題

n 個の区分的線形抵抗を含む抵抗回路は，一般に次のような形の区分的線形方程式で記述することができる [1].

$$f(x) \stackrel{\triangle}{=} Pg(x) + Qx - r = 0 \tag{1}$$

ただし，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$ は区分的線形抵抗の枝電圧または枝電流を要素とする n 次元変数ベクトル, $g(x) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \cdots, g_n(x_n)]^T$ はこれらの抵抗の特性を表す R^n から R^n への区分的線形関数（ただし各成分は一変数），P，Q は回路の構造によって決まる $n \times n$ 定数行列，r は電源の値によって決まる n 次元定数ベクトルである．また，$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)]^T$ とする．

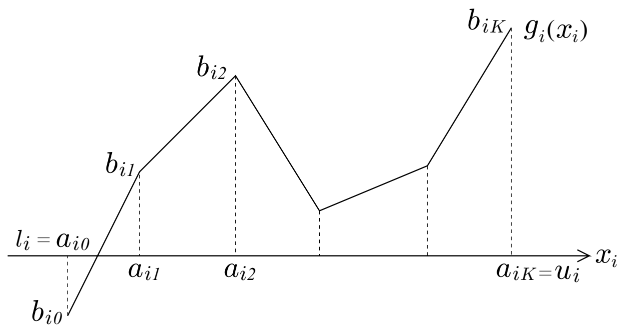

図 1　区分的線形関数

区分的線形関数 $g_i(x_i)$ はすべて K 本の線分からなるものとする．$f(x)$ は変数分離性が成り立っているため，$f(x)$ が線形である領域は n 次元直方体となり，線形領域の総数は K^n 個となる．本研究では，このような K^n 個の線形領域からなる初期領域 $D = ([l_1, u_1], \cdots, [l_n, u_n])^T$ に存在する式 (1) のすべての解を求める問題を考える．

3. 0-1 変数を用いた区分的線形関数の表現

0-1 変数を用いて区分的線形関数を表現する方法には様々な方法があるが，本章では古くから提案されている方法について述べる [15].

変数 x_i に対する初期領域の区間を $[l_i, u_i]$ とする．また区分的線形関数 $g_i(x_i)$ の分点を $l_i = a_{i0} < a_{i1} < \cdots < a_{iK} = u_i$ とし，各分点での区分的線形関数 $g_i(x_i)$ の値を $b_{ij} = g_i(a_{ij})$ とする（図 1 参照）.

このとき正の補助変数 δ_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, n$; $j = 1, 2, \cdots, K$) を導入することにより，小区間 $[a_{ij-1}, a_{ij}]$

内の x_i は次のように表現できる．

$$x_i = a_{ij-1} + \delta_{ij} \tag{2}$$

ただし，$0 \leqq \delta_{ij} \leqq \Delta_{ij}$ ($\Delta_{ij} \triangleq a_{ij} - a_{ij-1}$) である．同様に，$g_i(x_i)$ は次のように表現できる．

$$g_i(x_i) = b_{ij-1} + \frac{b_{ij} - b_{ij-1}}{a_{ij} - a_{ij-1}}\delta_{ij} \tag{3}$$

$\dfrac{b_{ij} - b_{ij-1}}{a_{ij} - a_{ij-1}}$ は小区間 $[a_{ij-1}, a_{ij}]$ 内での区分的線形関数の傾きである．これを区間 $[l_i, u_i]$ 全体に拡張すると，式 (2), (3) はそれぞれ

$$x_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

$$g_i(x_i) = b_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \frac{b_{ij} - b_{ij-1}}{a_{ij} - a_{ij-1}}\delta_{ij}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5}$$

と表現される．ここで x_i が第 j 番目の小区間 $[a_{ij-1}, a_{ij}]$ 内の値を表すためには，各 i について $\delta_{ik} = \Delta_{ik}$ $(k < j)$, $\delta_{ik} = 0$ $(k > j)$ である必要がある．この条件を満たすために 0-1 変数 μ_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 0, 1, 2, \cdots, K)$ を導入し，以下のような制約を与える．

$$\begin{aligned}
\Delta_{i1}\mu_{i1} \leqq &\quad \delta_{i1} \quad \leqq \Delta_{i1}\mu_{i0} \\
&\quad \vdots \\
\Delta_{ij-1}\mu_{ij-1} \leqq &\quad \delta_{ij-1} \quad \leqq \Delta_{ij-1}\mu_{ij-2} \\
\Delta_{ij}\mu_{ij} \leqq &\quad \delta_{ij} \quad \leqq \Delta_{ij}\mu_{ij-1} \\
\Delta_{ij+1}\mu_{ij+1} \leqq &\quad \delta_{ij+1} \quad \leqq \Delta_{ij+1}\mu_{ij} \\
&\quad \vdots \\
\Delta_{iK}\mu_{iK} \leqq &\quad \delta_{iK} \quad \leqq \Delta_{iK}\mu_{iK-1}, \\
\mu_{i0} = 1, \quad \mu_{iK} = 0 &\quad i = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{6}$$

このように補助変数を導入することにより，区分的線形関数 $g_i(x_i)$ を補助変数 δ_{ij}，0-1 変数 μ_{ij}，線形式 (4)〜(6) を用いて表現することができる．

4. 整数計画法を用いた全解探索法

区分的線形回路を表す混合方程式 (1) に対して，補助変数 y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を導入し $y_i = g_i(x_i)$ とおくと，式 (1) は式 (4), (6) 及び

$$\begin{aligned}
&Py + Qx - r = 0 \\
&y_i = b_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \frac{b_{ij} - b_{ij-1}}{a_{ij} - a_{ij-1}}\delta_{ij}, \\
&\qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned} \tag{7}$$

で表すことができる．ここで式 (4), (6), (7) を制約条件とした，以下のような混合整数計画問題を考える．

最大化：任意の定数

制約条件：

$$\begin{aligned}
&Py + Qx - r = 0 \\
&x_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \delta_{ij} \\
&y_i = b_{i0} + \sum_{j=1}^{K} \frac{g_i(x_{ij}) - g_i(x_{ij-1})}{x_{ij} - x_{ij-1}}\delta_{ij} \\
&\Delta_{i1}\mu_{i1} \leqq \delta_{i1} \leqq \Delta_{i1} \\
&\quad \vdots \\
&\Delta_{ij-1}\mu_{ij-1} \leqq \delta_{ij-1} \leqq \Delta_{ij-1}\mu_{ij-2} \\
&\Delta_{ij}\mu_{ij} \leqq \delta_{ij} \leqq \Delta_{ij}\mu_{ij-1} \\
&\Delta_{ij+1}\mu_{ij+1} \leqq \delta_{ij+1} \leqq \Delta_{ij+1}\mu_{ij} \\
&\quad \vdots \\
&0 \leqq \delta_{iK} \leqq \Delta_{iK}\mu_{iK-1}
\end{aligned} \tag{8}$$

混合整数計画問題 (8) の制約条件は式 (1) 及び $x \in D$ と等価であるため，混合整数計画問題 (8) のすべての解を求めることにより，区分的線形回路のすべての解を得ることができる．

5. 数 値 例

本章では，非商用のソフトウェアである GLPK と SCIP，アカデミックフリーの CPLEX を用いていくつかの数値実験結果を示し，本手法の有効性を検証する．

なお測定の際に，SCIP の count 関数と CPLEX の解プール機能を利用した．count 関数とは混合整数計画問題の実行可能解の数を数えあげる関数であり，解プールとは混合整数計画問題の制約条件を満たす解を求め，保存する機能である．

例 1：トンネルダイオード回路

文献 [7], [8]〜 [11], [13], [20]〜 [23] で例題として解かれている n 個のトンネルダイオードを含む区分的線形回路を考える．非線形関数を近似する区分的線形関数の線分数

表 1　例 1 における計算時間の比較（秒）

n	整数計画問題の規模			解	計算時間（秒）		
	変数の数	0-1 変数の数	制約式の数		GLPK	SCIP	CPLEX
10	210	90	210	9	1	0.3	0.2
20	420	180	420	9	7	1	0.8
30	630	270	630	9	20	2	1
40	840	360	840	9	29	2	0.2
50	1050	450	1050	9	132	8	1
60	1260	540	1260	9	211	8	2
70	1470	630	1470	9	374	8	5
80	1680	720	1680	9	328	6	3
90	1890	810	1890	9	681	46	21
100	2100	900	2100	9	807	40	8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
150	3150	1350	3150	11	37542	148	60
200	4200	1800	4200	9	$>$ 1 day	537	67
250	5250	2250	5250	9	$>$ 1 day	756	94
300	6300	2700	6300	11	$>$ 1 day	4599	158
350	7350	3150	7350	9	$>$ 1 day	3634	205
400	8400	3600	8400	3	$>$ 1 day	7354	332
450	9450	4050	9450	3	$>$ 1 day	13176	1119
500	10500	4500	10500	3	$>$ 1 day	42516	315

は $K = 10$ とした．この回路に対し，本手法を適用したときの得られた解の個数と計算時間を表 1 に示す．本手法は n が数百程度までの問題を数分から数時間という実用的な計算時間で解いていることが分かる．例えば $n = 500$ の場合，解くべき混合整数計画問題は約 1 万変数／制約になるが，整数計画法のソフトウェアが非常に高性能であるため，実用的な計算時間で全解探索を行うことができる．

例 2：トランジスタ回路

文献 [13], [20]～ [23] などで例題として解かれているトランジスタ回路に対して，本手法を適用したときの結果を表 2 に示す．ただし初期領域を $([-20, 0.5], \cdots, [-20, 0.5])^T$ とし，非線形関数を近似する区分的線形関数の線分数は $K = 10$ とした．この程度の規模の回路なら，本手法は瞬時にすべての解を求めることができる．またこのような非線形性の強い問題に対しても，本手法は頑強な性質を示すことが分かる．

例 3：特性曲線解析

本手法を利用することにより特性曲線の解析を行うことができる．変数の数 n に対して方程式の数が $n - 1$ の方程式を混合整数計画問題へ定式化しそれを全解探索する．解が得られた線形領域は解曲線が通過する線形領域なので，解が含まれる線形領域をすべて求めることで特性曲線を求めることができる．例として文献 [24] で扱われている回路に手法を適用する．分割数 $K = 150$ の場合に得られた特性曲線を図 2 に示す．計算時間は 14 秒であり，十数秒程度で元の特性曲線が認識できる精度の特性曲線が得られることが分かる．

表 2　例 2 における計算時間の比較（秒）

回路	解	計算時間（秒）		
		GLPK	SCIP	CPLEX
[21] の図 3	9	0.8	0.4	0.2
[21] の図 4	3	0.6	0.2	0.06
[21] の図 5	11	49	0.4	0.08
[21] の図 6	1	18	4	1

6. む す び

本研究では，整数計画法を用いた区分的線形回路の実現容易な全解探索法を提案した．提案手法は区分的線形回路のすべての解を，数秒～数時間という実用的な計算時間で求めていることが分かる．この手法は近年の整数計画法の驚異的発展により初めて可能となったもので，複

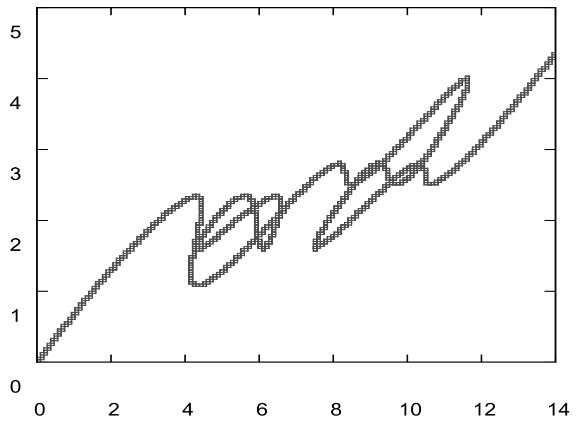

図 2　特性曲線解析

雑なプログラムを作ることなく，初心者でも簡単に区分的線形回路の全解探索を行うことができる．また計算効率の点でも，最近の整数計画法のソフトウェアが非常に高性能であるため，実用的な計算時間で全解探索を行うことができる．

謝辞　本研究を行うにあたり，多大なる御指導を賜わりました山村清隆教授に心より感謝の意を表します．

文献 (下線は研究業績)

[1] L.O. Chua and R.L.P. Ying, “Finding all solutions of piecewise-linear circuits,” Int. J. Circuit Theory Appl., vol.10 no.3, pp.201–229, July 1982.

[2] T. Nishi, “An efficient method to find all solutions of piecewise-linear resistive circuits,” Proc. IEEE 1989 Int. Symp. Circuits Syst., pp.2052–2055, Portland, Oregon, May 1989.

[3] A. Ushida and T. Nakamura, “Interval analysis of nonlinear resistive circuits,” Proc. 1989 Joint Tech. Conf. Circuits/Systems, Computers and Communications, pp.499–505, Sapporo, June 1989.

[4] L. Vandenbrghe, B.L. De Moor and J. Vandewalle, “The generalized linear complementarity problem applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.36, no. 11, pp. 1382–1391, Nov. 1989.

[5] S. Pastore and A. Premoil, “Polyhedral elements: A new algorithm for capturing all the equilibrium points of piecewise-linear circuits,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.40, no.2, pp.124–132, Feb. 1993.

[6] M. Tadeusiewicz and K. Glowienka, “A contraction algorithm for finding all the DC solutions of piecewise-linear circuits,” J. Circuits, Systems, and Computers, vol.4, no.3, pp.319–336, Sept. 1994.

[7] K. Yamamura and T. Ohshima, “Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using linear programming,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.45, no.4, pp.434–445, April 1998.

[8] K. Yamamura and K. Yomogita, “Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using an LP test,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.47, no.7, pp.1115–1120, July 2000.

[9] K. Yamamura and S. Tanaka, “Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the dual simplex method,” Int. J. Circuit Theory Appl., vol.30, no.6, pp.567–586, Nov. 2002.

[10] K. Yamamura and R. Kaneko, “Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the simplex method,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.50, no.1, pp. 160–165, Jan. 2003.

[11] K. Yamamura and K. Suda, “An efficient algorithm for finding all solutions of separable systems of nonlinear equations,” BIT—Numerical Mathematics, vol.47, no.3, pp.681–691, Sept. 2007.

[12] K. Yamamura and A. Machida, “An efficient algorithm for finding all DC solution of piecewise linear circuits,” Int. J. Circuit Theory Appl., vol.36, pp.989–1000, Nov. 2008.

[13] K. Yamamura, K. Suda, and N. Tamura, “LP narrowing: A new strategy for finding all solutions of nonlinear equations,” Applied Mathematics and Computation, vol.215, no.1, pp.405–413, Sept. 2009.

[14] S. Pastore, “Fast and efficient search for all DC solutions of PWL circuits by means of oversized polyhedra,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol.56, no.10, pp.2270-2279, Oct. 2009.

[15] G.B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

[16] 今野　浩，役に立つ一次式—整数計画法「気まぐれな王女」の 50 年，日本評論社，2005.

[17] 宮代隆平，松井知己，“ここまで解ける整数計画,” システム/制御/情報，vol.50, no.9, pp.363–368, Sept. 2006.

[18] IBM ILOG CPLEX; http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/

[19] SCIP (Solving Constraint Integer Programs); http://scip.zib.de/

[20] K. Yamamura, N. Tamura, and T. Ueda, “Finding all DC solutions of piecewise-linear circuits using integer programming,” Proceedings of IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks, Tokushima, Japan, pp.37–40, Dec. 2009.

[21] 上田恭大，田村直也，山村清隆，“整数計画法を用いた区分的線形回路の全解探索法,” 第 23 回 回路とシステム軽井沢ワークショップ 論文集, pp.17–22 April. 2010.

[22] K. Yamamura, and T. Ueda, “Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using integer programming,” Proceedings of IEEE European Conference on Circuits Theory and Design, Linköping, Sweden, pp.628–631, Aug. 2011.

[23] K. Yamamura and N. Tamura, “Finding all solutions of separable systems of piecewise-linear equations using integer programming,” Journal of Computational and Applied Mathematics 掲載予定.

[24] 山村清隆，フィトラグナワン，蓬田幸二，“線形計画法を用いた非線形抵抗回路の特性曲線の探索,” 信学論 (A), vol.J84-A, no.6, pp.761-770, Jun. 2000.