修士論文要旨 (2011 年度)

線形相補性記述と整数計画法を用いた区分的線形回路の解析

The Complete Analysis of Piecewise-Linear Resistive Circuits Using Generalized Linear Complementarity Description and Integer Programming

電気電子情報通信工学専攻　原口　潤平
Jumpei　HARAGUCHI

1. まえがき

相補性理論の応用の一つに，区分的線形回路の解析が挙げられる．文献 [1], [2] では線形相補性問題を一般化した一般線形相補性問題で区分的線形回路を記述することで，解集合の個数が無限となるような広範囲クラスの区分的線形回路を解析することが可能となっている．

線形相補性問題は本質的に難しい問題に分類され，この問題に対して様々な手法が提案されてきた [3]–[5]．しかし，それらのアルゴリズムはインプリメントの際に複雑なプログラミングや専門知識を必要とするため敷居の高い手法である．また線形相補性問題を解くソフトウェアも現在存在しない．もし既存のソルバーを使用し簡単に線形相補性問題の解を導出することができれば広く使われる可能性がある．

そこで本研究では一般線形相補性問題を対象に，整数計画ソルバーを用いた実現容易なアルゴリズムを考える．本手法は近年の整数計画ソルバーの驚異的発展を背景に [7]–[9]，一般線形相補性問題を等価な整数計画問題に線形相補性記述し，既存の整数計画ソルバーを適用する手法を提案する．これにより簡単に一般線形相補性問題を解くことができ，区分的線形回路の解析を行うことができる．

2. 相補性条件を用いた区分的線形関数の表現

本章では一般線形相補性問題を区分的線形回路と関連付けるため，基礎となる相補性条件を用いた区分的線形関数の表現方法を説明する．まず始めに実数 x を用いて以下のような表現を導入する．

$$x^+ = \max(x, 0), \quad x^- = \max(-x, 0) \tag{1}$$

次に図 1 のような $\boldsymbol{R}^n$ における区分的線形関数について考えてみる．$n+1$ 個の折れ点を表す $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 及び

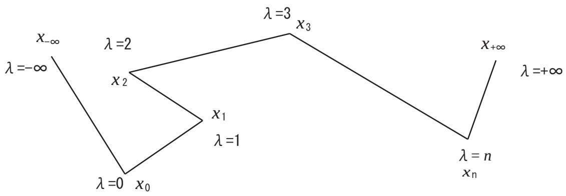

図 1　区分的線形関数及びパラメーター λ の配置

方向を表す $x_{+\infty}$ 及び $x_{-\infty}$ を導入すると図 1 は次のように表現することができる．

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + x_{-\infty} \cdot \lambda^- + (x_1 - x_0) \cdot \lambda^+ \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}) \cdot \lambda_{k-1}^+ \\
&\quad + (x_{+\infty} - x_n + x_{n-1}) \cdot \lambda_n^+ \\
&\lambda_j^+ - \lambda_j^- = \lambda^+ - \lambda^- - j \\
&\lambda^+, \lambda^-, \lambda_j^+, \lambda_j^- \geq 0 \\
&\lambda^+ \cdot \lambda^- = 0,\ \lambda_j^+ \cdot \lambda_j^- = 0 \\
&j = 1 \cdots n
\end{aligned} \tag{2}$$

上記の式を区分的線形抵抗の表現に用いることにより線形相補性問題と区分的線形回路を関連付けることができる．

3. 一般線形相補性問題

本章では従来の線形相補性問題を広範囲クラスの区分的線形回路に適用するために一般化した一般線形相補性問題について説明する．一般線形相補性問題は以下のように表現される [1]．

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{Mw} + \boldsymbol{Nz} = \boldsymbol{q} \cdot \alpha \\
\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \\
\boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{z} = 0
\end{gathered} \tag{3}$$

ただし，$\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{N} \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^n$ であり，$\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ が解析対象である．

4. 整数計画問題

本章では本手法で用いる整数計画問題について説明する．最適化問題において，変数が整数値を取るという制約がいくつかの変数に付いているとき，これを整数計画問題と呼ぶ．

$$\begin{array}{ll} \text{min/max} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & x_i \in \{1,0\} \\ & i \subseteq \{1,\cdots,n\} \end{array} \tag{4}$$

整数計画問題は，本質に難しい問題のクラスに属するため，少し前までは実用規模の問題を解くことは不可能とされていた．しかし，最先端のアルゴリズムを実装した最適化ソルバーの性能は飛躍的に進化しており，大規模な問題が解けるようになっている [7]–[9]．整数計画問題の解は既存の整数計画ソルバーを用いることで容易に求めることができる．

5. 提 案 手 法

整数計画法を用いて一般線形相補性問題 (3) の解集合を導出する手法を提案する．

5.1 整数計画法を用いたアルゴリズム

整数計画ソルバーを用いて一般線形相補性問題の解集合を得るためには，まず等価な整数計画問題に記述する．記述した整数計画問題を解けば相補性条件を満たした解候補を得ることができる．次に得られた解候補に対して，extreme ray の判定を行うことにより式 (3) の解集合を導出することができる．また回路特性を描写する場合は，cross-complementary 条件を使用し得られた解の隣接性を調べる．以下の手順で解集合を導出し，回路の解析を行う．ただし，本稿では誌面の都合上 Step 3 の説明は割愛する．

Step 1：**解候補の列挙** 式 (3) を整数計画問題に線形相補性記述し全ての解候補 (相補性条件を満たす解) を列挙する．

Step 2：**extreme ray の判定** Step 1 で列挙した解候補が extreme ray であるか判定する．回路特性を描写する際 $(m < n)$ は Step 3 に進む．

Step 3：**解の隣接性** Step 2 で導出した解集合に対し cross-complementary 条件を用いて解の隣接性を調べ，特性を描写する．

5.2 解候補の列挙

式 (3) を整数計画問題に記述するために式 (3) を制約式とした整数計画問題を考える．相補性条件 $\boldsymbol{w}^t \cdot \boldsymbol{z} = 0$ を 0-1 変数を用いた変数分離されている等価な線形不等式に記述し，式 (3) は以下のような整数計画問題に線形相補性記述できる．

$$\begin{array}{ll} \max & \displaystyle\sum_{l \in \boldsymbol{D}} (w_l + z_l) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{M}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{q} \cdot \alpha \\ & w_l \leq \mathrm{H}\mu_l \\ & z_l \leq \mathrm{H}t_l \\ & \mu_l + t_l \leq 1 \\ & \mu_l, t_l \in \{1,0\},\ l \in \boldsymbol{D} \end{array} \tag{5}$$

ただし，H は正の十分に大きな定数，$\boldsymbol{D}$ は $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}$ の添え字集合とする．0-1 変数 μ_l, t_l により w_l, z_l のどちらか一方が必ず 0 となる相補性条件を表現している．式 (5) は式 (3) と等価であるため，式 (5) の最適解が得られた際の $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}$ 値が式 (3) の解候補となる．式 (5) の全ての解を求めることにより式 (3) の解候補を列挙することができる．

5.3 extreme ray の判定

Step 1 で得られた解候補が extreme ray(0 となる要素が他の解に包括されていない) であれば式 (3) の解とみなすことができる．extreme ray の判定を整数計画法を用いて行うため以下の整数計画問題を用いる．

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{l \in \boldsymbol{D}} (\mu_l + t_l) \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{l \in \boldsymbol{\mu}(\theta)} \mu_l + \sum_{l \in \boldsymbol{t}(\theta)} t_l + \alpha_\theta \cdot \alpha \\ & \quad \geq (||\boldsymbol{\mu}(\theta)|| + ||\boldsymbol{t}(\theta)|| + \alpha_\theta) \cdot \rho_\theta \\ & \displaystyle\sum_{\theta=1}^{\sigma} \rho_\theta = 1 \\ & \mu_l, t_l, \alpha_\theta, \alpha, \rho_\theta \in \{0,1\} \\ & \theta = 1, 2, 3 \cdots, \sigma \end{array} \tag{6}$$

ただし，σ を解候補の個数，θ 番目の解候補において，

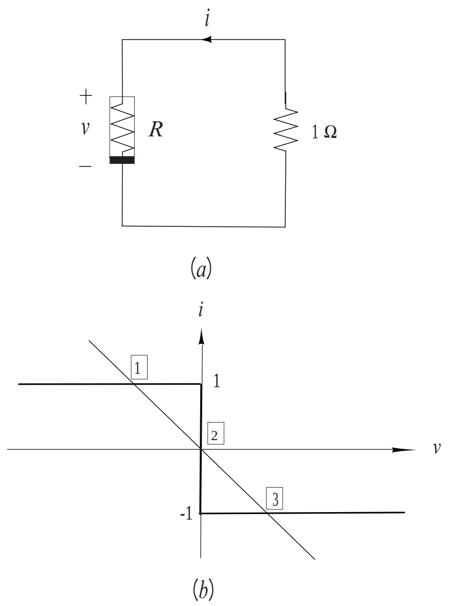

図 2　例題 1 の区分的線形回路 ((b) は R の $v-i$ 特性)

α_θ を α の値，1 の値をもつ μ, t の添え字集合をそれぞれ $\boldsymbol{\mu}(\theta)$, $\boldsymbol{t}(\theta)$ とする．$||\boldsymbol{\mu}(\theta)||, ||\boldsymbol{t}(\theta)||$ をそれぞれの要素数とする．上記の最適解が得られた際，$\boldsymbol{\rho}$ の中で 1 つだけが $\rho_\theta = 1$ となり，θ 番目の解候補が extreme ray であると判定することができる. 解が得られ次第，その解を除外する制約式を追加していくことで式 (3) の解集合を導出することができる．

6. 数　値　例

文献 [1] で紹介されている例題に対して本手法を適用した結果を示す．整数計画ソルバーには SCIP を用い H=100 で解析を行った．

例題 1：図 2 の区分的線形回路の解析を行う．図 2(b) の区分的線形抵抗は式 (2) で表現でき，それを図 2(a) から導出できる回路方程式に代入することにより以下の一般線形相補性問題を生成することができる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^- \\ \lambda_1^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^+ \\ \lambda_1^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \alpha$$
$$\lambda^-, \lambda_1^-, \lambda^+, \lambda_1^+, \alpha \geq 0$$
$$\lambda^+ \cdot \lambda^- = \lambda_1^+ \cdot \lambda_1^- = 0$$

(7)

表 1　式 (7) の解集合

	1	**2**	**3**
λ^-	1	0	0
λ_1^-	2	0.5	0
λ^+	0	0.5	2
λ_1^+	0	0	1
α	1	1	1
i	1	0	-1
v	-1	0	1

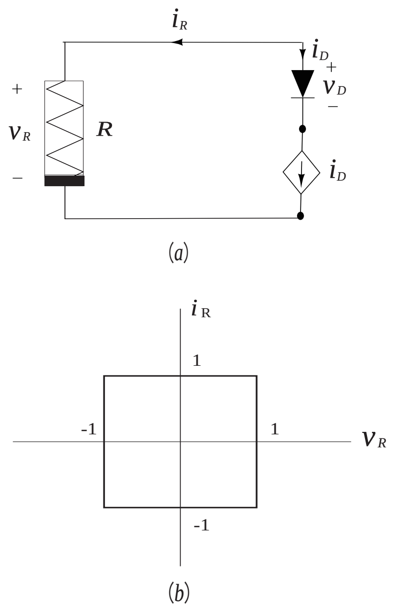

図 3　区分的線形回路及び区分的線形抵抗の $v-i$ 特性

式 (7) に対して本手法を適用した結果を表 1 に示す．なお，例題 1 は $m=n$ であるため Step 3 は行わない．表 1 より 3 つの解が導出されたことがわかる．また図 2(b) において交点に割り振られた数字は解の番号を示している．

例題 2：図 3 のような区分的線形回路の解析を行う．図 3(b) の区分的線形抵抗は式 (2) で表現し，ダイオード特性も相補性条件を用いて以下のように表現できる．

$$\begin{bmatrix} i_d \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_d^+ \\ -\lambda_d^- \end{bmatrix}$$
$$\lambda_d^+, \lambda_d^- \geq 0 \qquad (8)$$
$$\lambda_d^+ \cdot \lambda_d^- = 0$$

相補性条件を用いた素子特性を図 3(a) から導出される回路方程式に代入すると以下の一般線形相補性問題を導出することができる．

表 2　式 (9) の解集合

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
λ^+	0	0.5	2.5	3	4	0	0	100
λ_1^+	0	0	1.5	2	3	0	0	100
λ_2^+	0	0	0.5	1	2	0	0	100
λ_3^+	0	0	0	0	1	0	0	100
λ_4^+	0	0	0	0	0	0	0	100
λ_d^+	1	0	0	1	1	0	0	0
λ^-	0	0	0	0	0	0	100	0
λ_1^-	1	0.5	0	0	0	0	100	0
λ_2^-	2	1.5	0	0	0	0	100	0
λ_3^-	3	2.5	0.5	0	0	0	100	0
λ_4^-	4	3.5	1.5	1	0	0	100	0
λ_d^-	0	0	0	0	0	100	0	0
α	1	1	1	1	1	0	0	0

$$
\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda^+ \\ \lambda_1^+ \\ \lambda_2^+ \\ \lambda_3^+ \\ \lambda_4^+ \\ \lambda_d^+ \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda^- \\ \lambda_1^- \\ \lambda_2^- \\ \lambda_3^- \\ \lambda_4^- \\ \lambda_d^- \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \alpha
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_i^+, \lambda_i^- \geq 0, \qquad i = 1, \cdots 4 \\
&\lambda^+, \lambda^-, \lambda_d^+, \lambda_d^-, \alpha \geq 0 \\
&\lambda^+ \cdot \lambda^- = \lambda_1^+ \cdot \lambda_1^- = \lambda_2^+ \cdot \lambda_2^- \\
&= \lambda_3^+ \cdot \lambda_3^- = \lambda_4^+ \cdot \lambda_4^- = \lambda_d^+ \cdot \lambda_d^- = 0
\end{aligned} \tag{9}
$$

式 (9) に対して本手法を適用した結果を表 2 に示す．表 2 の解集合を用いることにより図 4 の $v-i$ 特性を描写することができる．

7. む す び

本研究は，一般線形相補性問題を用いた区分的線形回路の解析に対し，実現容易性を考慮して整数計画法を適用する手法を提案した．数値例では文献 [1] と同様の区分的線形回路の解析結果が確認された．よって本手法を用いれば，簡単に一般線形相補性問題の解集合を導出し，区分的線形回路を解析することができる．本稿では文献 [1] 同様二端子の区分的線形抵抗を含んだ回路への適用を行ったが，文献 [10] よりトランジスタなどを含む回路への適用も可能である．

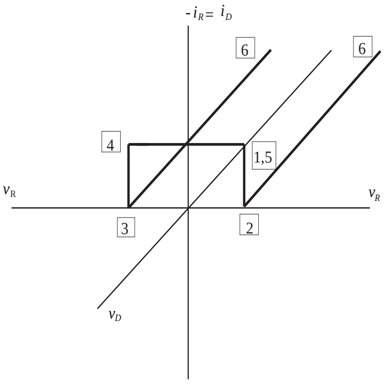

図 4　区分的線形回路及び区分的線形抵抗の $v-i$ 特性

謝辞　本研究を行うにあたり，多大なる御指導を賜わりました山村清隆教授に心より感謝の意を表します．また多くの御協力を頂いた研究室の皆様にも感謝致します．

文　　献

[1] L. Vandenberghe, B. L. DeMoor, and J. Vanderwalle, “The Generalized Linear Complemantarity Program Applied to the Complete Analysis of Resistive Piecewise-Linear Circuit,” IEEE Trasactions on Circuit and Systems, vol.36, no.11, pp.1382–1391, Nov. 1989.

[2] Bart De Moor, Lieven Vandenberghe and Joos Vandewalle, “The generalized linear complementarity problem and an algorithm to find all its solutions,” Mathematical Programming, vol.57, pp.415-426, 1992.

[3] Cottle, R. W., Panng, J.-S., and Stone, R. E., “The Linear Complementarity,” SIAM Review, vol.35, no4, pp.673-674, 1993.

[4] 小島政宏，相補性と不動点，産業図書，1981

[5] M. Kojima, N. Megiddo, T. Noma and A. Yoshise, A Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems, Springer-Verlag, 1991.

[6] R. W. Cottle and G. B. Dantzig, “Complementary pivot theory of mathematical programming,” Linear Algebra and Its Appl., vol.1, pp.103-125, 1968.

[7] 今野　浩，役に立つ一次式. 整数計画法「気まぐれな王女」の 50 年，日本評論社，2005.

[8] 宮代隆平，松井知己, “ ここまで解ける整数計画，” システム/制御/情報，vol.50,

[9] K. Yamamura and N. Tamura, “Finding all solutions of separable systems of piecewise-linear equations using integer programming” Journal of Computational and Applied Mathematics 掲載予定.

[10] B. De Moor, ”Mathematical concepts and techniques for modelling of static and dynamic systems,” Doctoral dissertation, Department of Electrical Engineering, Katholieke Universiteit Leuven (Leuven, Belgium, 1988).