

オプション・アプローチによる 企業倒産確率と信用格付けの関係について On credit rating and default probability with using option pricing approach

理工学研究科 経営システム工学専攻 10N7100009I 川又 裕紀

1. はじめに

昨今の金融危機を通して、投資家は企業倒産を意識する機会が増えてきた。信用リスクを計測する方法として、格付け会社の信用格付けが利用される事が多い。その格付けは、リーマン・ショックの影響を受け 2008 年の世界の企業の格下げ率は 18.2 % までに上った。日本でも 2007 年の 0.3 % から過去最高の 1.8 % まで上昇した (内閣府 [1])。近年も米国債の格下げ、ユーロ危機など、いつ経済危機が起きてもおかしくない状況であり、投資家の観点から考えると今後の経済危機に備えて、事前に格付けの変化を予測する手段の特定が望まれている。信用リスク測定方法の中でも財務データに依存する方法では日々変化する格付け変化を予測することは難しい。本研究では財務データとともに株価を用いたオプション・アプローチによる信用リスク評価での格付けの変化の予測をすることを目的とする。

オプション・アプローチにはパラメータ推計方法によっていくつかの方法があるが、実務的には次の 2 方法がよく使われている。(1) 資産価値のパスから推定する方法 (以下方法 1)(2) 株価 (時価総額) の変動から推定する方法 (以下方法 2) 方法 1,2 は大城・猿渡 [2] で調べられており、方法 1 は方法 2 よりも捕捉能力は劣るとの結果が示されている。本研究ではこの 2 つに加えて (3) 満期が 1 年という仮定を緩めた方法 (以下方法 3) についても比較検討している。

2. Merton モデル基本式とデフォルト確率

2.1. デフォルト確率の定式化

負債が単一の割引債券で構成されていると仮定し、企業が倒産するのは満期 T で企業の資産価値が負債の額面を下回った時のみとする。時点 t における企業の資産価値 A_t が次の確率微分方程式は

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t \quad (1)$$

とする。ここで μ_A は資産価値の期待成長率、 σ_A は資産価値のボラティリティであり W_t はウィナー

過程である。時点 T での資産価値は (1) を解き、対数値を取ることで、

$$\log A_T = \log A_t + (\mu - \sigma_A^2/2)T + \sigma_A W_T \quad (2)$$

となり、これは資産の対数値が、平均 $\log A_0 + (\mu - \sigma_A^2/2)T + \sigma_A W_T$ 分散 $\sigma_A^2 T$ の正規分布に従うことを表している。

したがって、時点 t から見た時点 T でのデフォルト率 EDP は

$$\begin{aligned} EDP &= Pr(A_T < B_T) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\log A_t / \log B_T + (\mu_A - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。 Φ は標準正規分布の分布関数を表す。

2.2. Merton モデルの基本式

未知パラメータ A_t, σ_A の推定に Merton の基本式を利用する。企業の資本価値 E は資産価値から負債価値を引いた残りであると考えたとすると $E_T = \max(A_T - B_T, 0)$ となる。これは資本価値をヨーロッパアン・コールオプション価値に等しいと仮定できるので、

$$E_t = A_t \Phi(x_1) - B_T \exp\{-r(T-t)\} \Phi(x_2) \quad (4)$$

となる。ここで x_1, x_2 は

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\log A / \log B_T + (r + \sigma_A^2/2)(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}} \\ x_2 &= x_1 - \sigma_A \sqrt{T-t} \end{aligned}$$

とする。

3. 初期設定

ここでは既知パラメータの設定を行う。

- (1) 時点 t での資本価値 E_t は株式時価総額とし、 $E_t = \text{発行済株式数} \times \text{時点 } t \text{ での株価}$ とする。
- (2) 負債の額面価格 B_T は、便宜的に $B_T = B_t$ 「直近の負債簿価」とする。
- (3) 負債の満期は $T = 1$ 年とした。
- (4) 資産の期待成長率 μ_A は 1 年物国債金利を用いた。

4. 今回使用した手法

方法 1,2 は未知パラメータ A_t, σ_A の推定方法が異なり, 方法 3 は方法 2 の満期が 1 年という仮定を緩めたモデルである.

4.1. 方法 1

Merton の基本式 (4) を利用し,

$$\begin{cases} A_t = [E_t + B_t e^{-r_t} \Phi(d_2)] / \Phi(d'_1) \\ A_{t-1} = [E_{t-1} + B_{t-1} e^{-r_t} \Phi(d_2)] / \Phi(d''_1) \\ \dots \\ A_{t-260} = [E_t + B_{t-260} e^{-r_t} \Phi(d_2)] / \Phi(d_1^{(261)}) \end{cases} \quad (5)$$

を得る. そして反復法により A_t と σ_A を推計する.

4.2. 方法 2

2.2 式に伊藤のレンマを用いて,

$$\sigma_E E_t = \Phi(x_1) \sigma_A A_t \quad (6)$$

を得る¹. 方法 2 では (4) と (6) の反復法によって A_t と σ_A を推計する.

4.3. 方法 3

方法 3 では満期が 1 年という, 仮定を緩めた方法である. 平均満期は

$$T' = \frac{0.5 \times \text{流動負債} + 10 \times \text{固定負債}}{B} \quad (7)$$

とする. 満期を複数年としたことで, I : 負債に対する利払い D : 未払い配当の 2 つのパラメータが追加され, デフォルト式は

$$\begin{aligned} EDP' &= Pr(A_T < B_T + D + I = TB) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\log A_t / \log TB + (\mu_A - \sigma_A^2 / 2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

となる (4) と (6) も

$$\begin{aligned} E_t &= A_t \cdot \Phi(x_1) - (L + B + I)e^{r(T-t)}\Phi(x_2) \quad (8) \\ &+ \frac{D}{D+I}(A_t - A_t\Phi(k_1) + (D+I)e^{-r(T-t)}\Phi(k_2)) \end{aligned}$$

$$\sigma_E = \sigma_A \frac{A_0}{E_0} \left(\frac{A_t}{E_t} (N(x_1) + \frac{D}{D+I} (1 - N(k_1))) \right) \quad (9)$$

となる. 方法 3 では (8) と (9) の反復法によって A_t と σ_A した.

¹ σ_E は [1] を参考に株価ボラティリティから推計した.

5. 実証分析

ここでは, 実際にサンプルを挙げ, EDP と格付け推移の比較を行う.

5.1. 使用データ

本論文で利用したデータは表 1 のとおりである. 財務データは日経 NEEDS より取得した.

表 1: 使用データ	
項目	明細
格付けデータ	日本格付研究所
格下げ銘柄	117 銘柄
非格下げ銘柄	257 銘柄
観測期間	2006 年 3 月 ~ 2011 年 11 月

5.2. 一般事業法人と銀行について

ここでは一般事業法人と銀行から 1 社ずつ挙げ, 結果を示す.

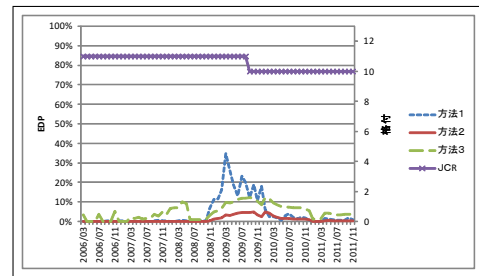


図 1: 日立製作所 最終格付け AA-

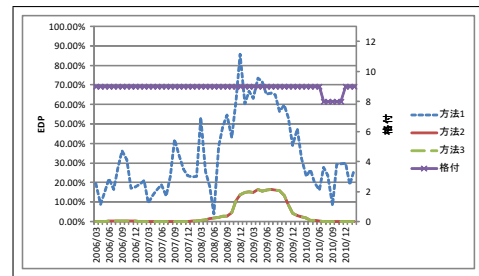


図 2: 住友信託銀行 最終格付け A+

図 1 では方法 1 が格下げの 3 ヶ月前に 35 % 近くまで上昇しているが, それ以外の時期はどの方法も近い値を推計している. 一方で住友信託銀行の方法 1 は最高で 90 % 近くまで上昇しており, 上位格付けとしては異常な値を示している. 他の銀行で

もこの傾向は同様で、方法 1 が銀行に対し過度に EDP を高く推計することが分かる。

6. 方法 1 の修正

ここでは方法 1 が銀行に対し過度に高い EDP を推計する問題の修正を行う。

6.1. 原因

銀行と一般事業法人の違いに自己資本比率がある。自己資本比率の平均は資本金 10 億円以上の法人で 38.9 %，国内基準行で平均 9.77 %である。方法 1 は方法 2,3 と違い 2 つのパラメータ負債価値と時価総額で資産価値の推定を行っているため、自己資本比率の影響が色濃くでたと思われる。

6.2. 修正方法

銀行の自己資本比率を一般事業法人と同水準に引き上げることによって、修正を行う。

(1) 修正 A

企業のバランスシートを一定に保ち修正を行う。

$$\text{修正後自己資本比率} : \beta = \frac{38.9 \times \alpha}{9.77}$$

$$\text{修正後時価総額} : E' = \beta \times (B + E)$$

$$\text{修正後負債} : B' = (1 - \beta) \times (B + E)$$

(2) 修正 B

企業のバランスシートに資本価値を加えて修正を行う。

$$\text{修正後自己資本比率} : \beta = \frac{38.9 \times \alpha}{9.77}$$

$$\text{修正後時価総額} : E' = \frac{\beta}{1 - \beta} B$$

$$\text{修正後負債} : B' = B$$

6.3. 修正方法比較

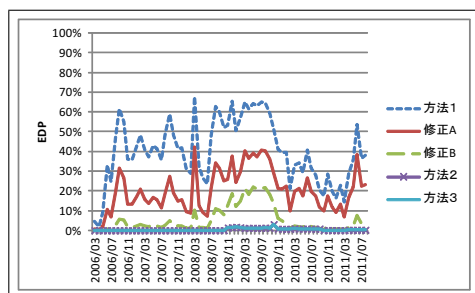


図 3: 修正後 第三銀行

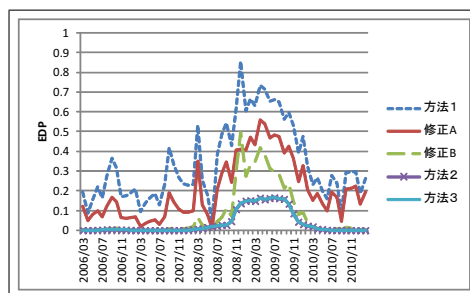


図 4: 修正後 住友信託銀行

修正 B は修正 A よりも EDP を低く見積もるが、平行な関係であった。リーマン・ショック期以外の時期で修正 B は方法 2,3 と同水準の EDP を示していることから、本研究ではこれ以降、銀行に対しては修正 B を適用する。

7. 格下げ直前までの累積 EDP

ここでは 3 つの方法によって格下げ直前までの累積 EDP を月ごとに推計する。そして格付けごとに格下げ予測が可能であるかを確認する。

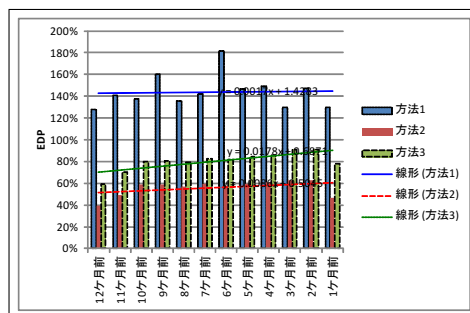


図 5: 累積 EDP(格付 A)

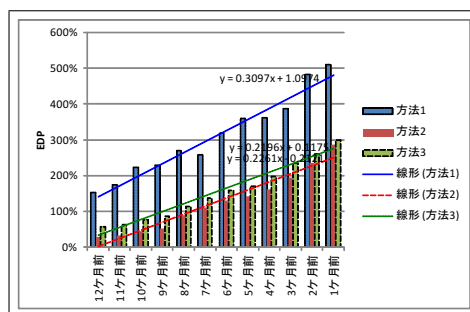


図 6: 累積 EDP(格付 D)

方法 1 は方法 2,3 に比べ EDP を高く推計している。方法 3 は方法 2 よりも EDP を高く推計するが

互いの関係はほぼ平行であった。図 5 を見ると、どの方法も格下げ直前になっても EDP は上昇しておらず、格下げ予測は難しいことが分かる。同傾向が AA+ から A- までの上位格付けに見られた。次に図 6 を見ると、どの方法でも格下げ直前での EDP の上昇が見られる。近似式の傾きも大きいことから、格下げ予測が可能であることが分かる。同傾向が BBB+ 以下の格付けに見られた。従って中位以下の格付けに対し格下げ予測が可能であることがわかった。

8. 判別精度比較

ここでは格下げ予測可能とした BBB+ から D への格下げ対し、精度比較を行う。

8.1. 比較指標

ある企業に対して推計された倒産確率が、ある一定の値（閾値）を超えた場合、格下げ判定されたとみなす。精度の比較には以下の 3 つを用いる。閾値に関しては格付け、方法ごとに設定し平均エラー率を最小にする様な値に設定した。

第一種のエラー率 (%)

$$= \frac{\text{閾値以下の格下げサンプル数}}{\text{格下げサンプル数}}$$

第二種のエラー率 (%)

$$= \frac{\text{閾値以上の格下げサンプル数}}{\text{非格下げサンプル数}}$$

平均エラー率 (%)

$$= \frac{\text{第一エラーサンプル} + \text{第二エラーサンプル}}{\text{全サンプル}}$$

8.2. エラー率推計結果

表 2: BBB+ ~ BBB- エラー率表				
格付	方法	第一	第二	平均
BBB+	方法 1	23 %	37 %	30 %
	方法 2	13 %	78 %	46 %
	方法 3	7 %	74 %	41 %
BBB	方法 1	4 %	33 %	19 %
	方法 2	40 %	44 %	42 %
	方法 3	60 %	28 %	44 %
BBB-	方法 1	8 %	40 %	24 %
	方法 2	18 %	55 %	36 %
	方法 3	18 %	55 %	36 %

表 3: BB ~ B エラー率表

格付	方法	第一	第二	平均
BB	方法 1	33 %	21 %	27 %
	方法 2	35 %	37 %	36 %
	方法 3	33 %	33 %	33 %
B	方法 1	40 %	33 %	36 %
	方法 2	40 %	33 %	36 %
	方法 3	40 %	33 %	36 %

格付 C,D はサンプル数が少なく結果に差異が出なかったため、ここでは割愛した。方法 2,3 の BBB+, BBB でのエラー率は高く、予測は難しいことがわかる。どの格付でも方法 1 が最も平均エラー率が少なく、最も格下げを予測できるモデルであるとわかった。

9. おわりに

本稿ではリーマン・ショック時に大幅に格下げ率が上昇した背景を踏まえ、今後起こるであろう経済危機に備え、格付けの下方への変化を倒産確率によって予測できるかを検証した。実証分析により方法 1 が銀行に対し、過度に高く倒産確率を見積もる傾向性を確認した。この問題に対し自己資本比率の修正を行うアプローチによって改善し、格下げ予測の精度向上に成功した。EDP と格付の関係からオプション・アプローチは中位格付け以下への格下げに対し格下げの兆候を捉えることが可能であると分かった。最後に、格下げ予測の精度をエラー率の面から検証した。先行研究で方法 2 よりも倒産サンプルの捕捉能力が低いとされた方法 1 であったが、修正後の方法 1 は方法 2,3 に比べどの格付けにおいても低水準のエラー率を判定したため、格下げ予測に関して方法 1 が最も有用な手段であることがわかった。

参考文献

- [1] 内閣府 2008 年度年次経済財政報告
- [2] 大城直人, 猿渡康文, 信用リスクのオプションアプローチ再訪: 推計/設定方法による特徴と精度比較 2006 年
- [3] 遠藤靖 ファイナンスのための確率微分方程式, 2000 年