ブール多次元論理上での
学習と推論を実現するゲーデルプラットフォームの開発
Development of a Goedel Platform Realizing Learning and Inferences in Boolean Multivalued Logic System

情報工学専攻　杉本 欣也
SUGIMOTO Kinya

概要

本論文は, 固定点二進数を真理値とみなすことによる, 学習と推論を扱うことができる新しい多次元論理系であるブール多次元論理上で, ユーザーによって任意に与えられる知識群の一貫性の評価, 一貫性を維持するための知識の改善の提案, 任意の推論をブール多次元論理のもつ特性を用いておこなう論理分析モデルとして開発したゲーデルプラットフォームについて論ずる. ブール多次元論理を用いたいくつかの典型的な学習と推論の例を示し, ゲーデルプラットフォームにおいてユーザーとシステム間でインタラクティブに動作する学習と推論の演算機構について述べる. ゲーデルプラットフォームの推論部の別の実現方法として, 有限ビット列における 1 となるビットの数を引数とする関数値を真理値とみなすことにより, 論理式の集合がブール代数を形成するブールクラスの多次元論理系, アトムと論理式を複素関数にて記述した論理式の集合がブール代数を形成するブールクラスの多次元論理系の 2 つのブール多次元論理系を新たに定義し, 柔軟な様式の推論を単純化する方式について述べる. 本論文で述べる多次元論理系はビットごとに処理可能である補完的なファジィ論理系の実現に相当する.

キーワード: ブール多次元論理, 論理分析, 論理の一貫性, 学習, 推論.

1　序論

本論文は, 固定点二進数を真理値とみなすことによる, 学習と推論を扱うことができる新しい多次元論理系であるブール多次元論理上で, ユーザーによって任意に与えられる知識群の一貫性の評価, 一貫性を維持するための知識の改善の提案, 任意の推論をブール多次元論理のもつ特性を用いておこなう論理分析モデルとして開発したゲーデルプラットフォーム (ゲーデルの偉大な功績 [5] に因んで名づけた) について論ずる.

ブール多次元論理は, 論理式の集合がブール代数を形成するため学習をおこなった後, 推論をおこなうことができる. ブール多次元論理を用いたいくつかの典型的な学習と推論の例を示し, ゲーデルプラットフォームにおいてユーザーとシステム間でインタラクティブに動作する学習と推論の演算機構について述べる.

ゲーデルプラットフォームでは指令部である Home が, それぞれ異なる演算機構である 4 つの Mode を統括する. 4 つの Mode ではそれぞれユーザーによる知識の編集, 学習, 知識の一貫性の評価, 推論をおこなう. それぞれの Mode におけるゲーデルプラットフォームの動作例を示す.

推論部の別の実現方法として, 有限ビット列において 1 となるビットの数を引数とする関数値を真理値とみなすことにより, 論理式の集合がブール代数を形成するブールクラスの多次元論理系, アトムと論理式を複素関数にて記述した論理式の集合がブール代数を形成するブールクラスの多次元論理系の 2 つのブール多次元論理系を新たに定義し, 柔軟な様式の推論を単純化する方式について述べる.

本論文で論ずる多次元論理系はブール多次元論理式をメンバー, それぞれの真理値をメンバーシップ値とすることで新たに定義されるビットごとに処理可能である補完的なファジィ論理系 ([3], [4]) の実現に相当する.

2　ブール多次元論理

多次元論理系は従来ブールクラスでは定義されない. 本節では従来の多次元論理系に対し, 固定点二進数を真理値とみなすことにより 論理式の集合がブール代数を形成するブールクラスの新しい多次元論理系を定義する. 本節で述べる論理系は, ビットごとに処理が可能である補完的なファジイ論理系の実現に相当する.

2.1　アトムと論理演算

それぞれのアトムは真理値を持つ. 真理値は任意の固定点二進数 $0.x^{(1)}x^{(2)}\cdots\ x_{\mathrm{b}}^{(n)}(x^{(1)} \in (0,1), x^{(2)} \in (0,1), \cdots, x^{(n)} \in (0,1))$ である. ここに正整数 n を次元とする. 論理式は, 論理演算をアトム, あるいは論理式そのものに適用した結果とする.

論理式 $x = 0.x^{(1)}x^{(2)}\cdots x_{\mathrm{b}}^{(n)}$ に対する否定 $\neg x$ は, ブール二値論理の否定を満たす $z^{(i)} = \neg x^{(i)}(i = 1, 2, \cdots, n)$. から成る真理値 $0.z^{(1)}z^{(2)}\cdots z_{\mathrm{b}}^{(n)}$ をとる.

論理式 $x = 0.x^{(1)}x^{(2)}\cdots x_{\mathrm{b}}^{(n)}$ と $y = 0.y^{(1)}y^{(2)}\cdots y_{\mathrm{b}}^{(n)}$ に対する論理積 $x \wedge y$ はブール二値論理の論理積を満たす $z^{(i)} = x^{(i)} \wedge y^{(i)}(i = 1, 2, \cdots, n)$. から成る, 真理値 $0.z^{(1)}z^{(2)}\cdots\ z_{\mathrm{b}}^{(n)}$ をとる.

同様に, x と y に対する論理和 $x \vee y$ は $z^{(i)} = x^{(i)} \vee y^{(i)}$. から成る, 真理値 $0.z^{(1)}z^{(2)}\cdots\ z_{\mathrm{b}}^{(n)}$ をとる. x から y への含意 $x \to y$ は $z^{(i)} = x^{(i)} \to y^{(i)}$. から成る, 真理値 $0.z^{(1)}z^{(2)}\cdots\ z_{\mathrm{b}}^{(n)}$ をとる. x と y の等価 $x \leftrightarrow y$ は $z^{(i)} = x^{(i)} \leftrightarrow y^{(i)}$. から成る, 真理値 $0.z^{(1)}z^{(2)}\cdots\ z_{\mathrm{b}}^{(n)}$ をとる.

上記の 5 つの論理演算に加えベイズの定理 [7] を扱うための算術的な演算を, 条件化とする. 論理式 x から, 別の論理式 y への条件化は

$$y|x = \frac{x \wedge y}{x} \tag{1}$$

である. ここで,

$$x \wedge (x \wedge y) = x \wedge y \tag{2}$$

であり, かつ

$$x \wedge (x \to y) = x \wedge (\neg x \vee y) = (x \wedge \neg x) \vee (x \wedge y) = x \wedge y \tag{3}$$

であるので,

$$(x \wedge y)|x = (x \to y)|x = y|x \tag{4}$$

である．

2.2　ファジィ論理への拡張

クリーンの三値論理系より拡張される典型的な多次元論理系は [0,1] の範囲での真理値を持つ論理式 x, y に対し，論理式の集合がブール代数を形成しない $\neg x = 1 - x$, $x \wedge y = \min(\mathrm{x,y})$, $x \vee y = \max(\mathrm{x,y})$ により定義される．ファジィ論理系は通常このようなブールクラスではない多次元論理上で定義される．ファジィ論理系は $a_1, a_2, \cdots, a_n$ をメンバー，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ をメンバーシップ値とするファジィ部分集合 ([2], [6]) $(a_1 : t_1, a_2 : t_2, \cdots, a_n : t_n)$ によって定義される任意の論理系である．ブール多次元論理式をメンバー，それぞれの真理値をメンバーシップ値とすることで新たに定義されるファジィ論理系をブールファジィ論理系とする．ブールファジィ論理系は通常のファジィ論理系に対し，ビットごとに処理する補完的なファジィ論理系 ([3], [4]) の実現として全ての二値論理系の特性を保持する．

3　ゲーデルプラットフォームの構成

本節ではブール多次元論理上で，ユーザーによって任意に与えられる知識群の一貫性の評価，一貫性を維持するための知識の改善の提案，任意の推論をおこなう論理分析モデルである，(ゲーデルの偉大な功績 [9] に因んで名づけた) ゲーデルプラットフォームについて述べる．また，本節ではゲーデルプラットホームの典型的な動作例を示す．

図 1 にゲーデルプラットフォームの構成を示す．

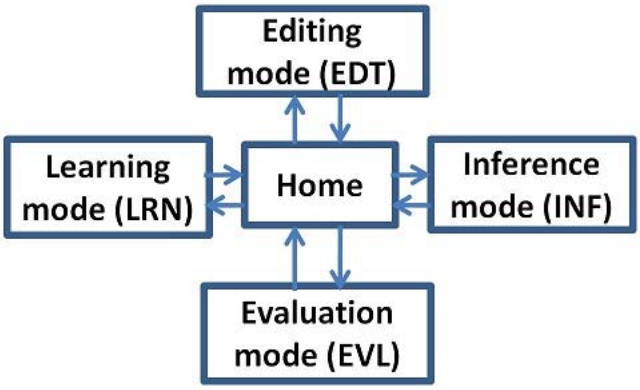


図 1　Architecture of Goedel Platform

本章ではゲーデルプラットホームの典型的な動作例も示す．

3.1　Editing Mode

Editing Mode は，ユーザーが知識を入力，または更新できる mode である．本論文では，知識 $x \equiv r$ を以下の制約式として定義する．左辺 x: 論理式，右辺 r: $[0, 1]$ の範囲での望まれる真理値．両辺は，論理式 x は望まれる真理値 r をとるべきだ，ということを意味する $\equiv$ によって結ばれる．

3.2　Lerning Mode

Learning Mode は最適化されたアトムの真理値を求める Mode である．

一時的にアトムの真理値の集合を仮定することで，任意の論理式の真理値を計算することができるので，それぞれの知識 $x \equiv r$ における x の真理値を計算することができる．計算された x と望まれる真理値 r との差の絶対値 $|x - r|$ を誤差とする．誤差は可能な限り小さいことが望ましい．学習は全ての知識について誤差を最小化するようなアトムの真理値を探索するプロセスである．学習は整数計画問題とみなすことができ，その他の手法においてもアプローチ可能である [10].

3.3　Evaluation Mode

Evaluation Mode は学習後のアトムの真理値を用いて単純に平均誤差と最大誤差を求める Mode である．Evaluation Mode は Learning Mode の一部である．

3.4　Inference Mode

学習 (それぞれのアトムの真理値の最適化) の後，任意の論理式の真理値を計算することができる．推論は，単純に学習後に論理式の真理値を計算するプロセスである．尚，多くの論理系において推論は複雑なプロセスを必要とする．

Inference Mode はユーザーから与えられた論理式の真理値を即座に計算するモードである．

3.5　ゲーデルプラットフォームの動作例

ゲーデルプラットフォームの典型的な動作例を数例示す．図 2 に Editing Mode においてユーザーが任意の知識を入力する様子を示す．

図 2　Input in Editing Mode

入力された知識を用いて，Learning Mode において学習をおこない，Evaluation Mode において知識の一貫性を評価する様子を図 3 に示す．

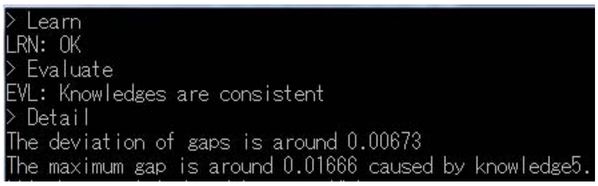


図 3　Learn and Evaluate

このとき，平均誤差は 0.00673，最大誤差は reflex|fly より生じる 0.01666 であり，値が Evaluation Mode の定める閾値 0.1 より小さいため入力された 8 つの知識は一貫性があると判断する．

次に，学習の結果を用いて Inference Mode にて任意の論理式の真理値を計算する様子を図 4 に示す．

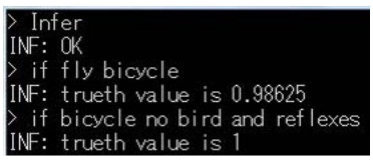
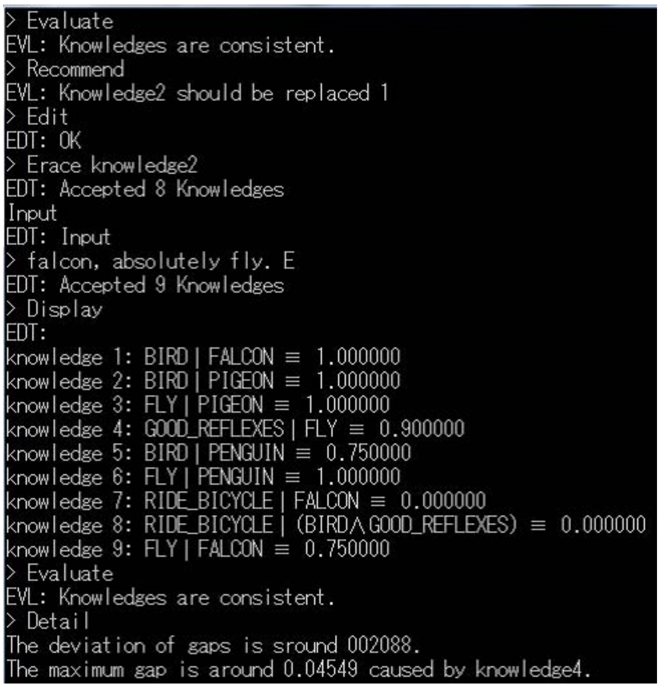


図 4　Inference

このとき，1 つめの推論結果は，もし自転車に乗るならば，それはほぼ飛ぶだろう．ということを示す．2 つめの推論結

果は, 鳥でなく優れた反射神経をもつものは必ず自転車に乗る. ということを示す.

これらの推論結果は非常に違和感を感じるかもしれないが, 与えられた 8 個の知識の中に自転車に関する知識は bicycle|falcon の 1 個のみであり, 全ての知識の数に対する自転車に関する知識の数の割合が少ないためであると考えられる. そこで新たに自転車に関する知識を加え, システムが知識の矛盾を改善し更新する様子を図 5 に示す.



```
> Evaluate
EVL: Knowledges are consistent.
> Recommend
EVL: Knowledge2 should be replaced 1
> Edit
EDT: OK
> Erace knowledge2
EDT: Accepted 8 Knowledges
Input
EDT: Input
> falcon, absolutely fly. E
EDT: Accepted 9 Knowledges
> Display
EDT:
knowledge 1: BIRD | FALCON ≡ 1.000000
knowledge 2: BIRD | PIGEON ≡ 1.000000
knowledge 3: FLY | PIGEON ≡ 1.000000
knowledge 4: GOOD_REFLEXES | FLY ≡ 0.900000
knowledge 5: BIRD | PENGUIN ≡ 0.750000
knowledge 6: FLY | PENGUIN ≡ 1.000000
knowledge 7: RIDE_BICYCLE | FALCON ≡ 0.000000
knowledge 8: RIDE_BICYCLE | (BIRD∧GOOD_REFLEXES) ≡ 0.000000
knowledge 9: FLY | FALCON ≡ 0.750000
> Evaluate
EVL: Knowledges are consistent.
> Detail
The deviation of gaps is sround 002088.
The maximum gap is around 0.04549 caused by knowledge4.
```

図 5　Recommend

4　柔軟な様式の推論の単純化

本章では従来の多次元論理系に対し, 有限ビット列において 1 となるビットの数を引数とする関数値を真理値とみなすことにより論理式の集合がブール代数を形成するブールクラスの多次元論理系を定義し, ブール代数の特性により従来の多次元論理系では複雑なプロセスをとる推論を柔軟な様式で単純化する様子を示す.

それぞれの論理式の全てのビットを探索し, 帰納推論は 1 となるビット数をカウントし類比することで, 演繹推論は語義的に真理値の範囲を狭めることで推論をおこなう. 直感的に理解しやすい例として, 生物の種に関する帰納推論と演繹推論の例を示す.

4.1　ブール多次元論理

本節で述べるブール多次元論理では, アトムは $n-$bit 配列の論理値 $x^{(1)}x^{(2)}\cdots\ x_{\mathrm{b}}^{(n)}(x^{(1)}\in(0,1),x^{(2)}\in(0,1),\cdots,x^{(n)}\in 0,1)$ をもつものとする. ここに正整数 n を次元とする. 論理式は, 後に述べる論理演算をアトム, あるいは論理式そのものに適用した結果とする. 論理式 x が持つ真理値の値 $T(x)$ は以下の関数により一意に決まる

$$T(x)=\frac{N(x)}{n} \tag{5}$$

である. ここに, $N(x)$ の値は x における 1 となるビットの数である. 論理演算についても, 2 章で述べた固定点二進数を真理値とみなすことによるブール多次元論理系と同様に定義できる. 本章で述べるブール多次元論理における 2 つの論理式間の論理積, 論理和がとる真理値に関して

$$\begin{array}{l} T(x\wedge y)\\ \in\\ [\max(0,\mathrm{T(x)+T(y)}-1),\min(\mathrm{T(x)},\mathrm{T(y)})],\\ T(x\vee y)\\ \in\\ [\max(\mathrm{T(x)},\mathrm{T(y)}),\min(\mathrm{T(x)+T(y)},1)] \end{array} \tag{6}$$

が成り立つ.

本節で述べるブール多次元論理においても, 2 章で述べた固定点二進数を真理値とみなすことによるブール多次元論理系と同様にブールクラスの特性を有し, ブール代数を形成する.

本節で述べるブール多次元論理において, ベイズの定理を扱うために新たな論理演算である述語論理を定める. 任意の n 次元の論理式 x, y に対する述語論理 $y[x]$ は, x によって $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ において $x_i=1$ となるビットのみ含むようにフィルタリングされた y による $N(x)$ 次元の論理値をとる. 例として, $x=1100110011$, $y=1010100001$ のとき $y[x]$ は $y_1=1$, $y_2=0$, $y_5=1$, $y_6=0$, $y_9=0$, $y_{10}=1$ を含む 101001 である. このとき $T(y[x])=3/6=0.5$ である.

尚, 他の論理系に対し命題論理と述語論理の間に明白な関連性は与えられていない.

4.2　推論

一般的ではない (珍種の) 生物の多様性に関する推論は, 多次元論理系の推論に対する適用性を試験するのに適している. 脊椎動物とそれらのもつ特徴を描写するアトムの直感的に理解できる例を示す.

両生類について, CNL を 1 番目のビットが 1 となる 50 次元の論理値をもつカリフォルニアイモリの幼体 (California newt's larva) とする. 同様にその他 9 個のアトムを与え, 両生類をあらわすアトム AMP を 10 個のアトムの論理和をとった

$$\mathrm{AMP}=\overbrace{1\cdots1}^{\text{10bits}}\overbrace{0\cdots00\cdots00\cdots00\cdots0}^{\text{40bits}} \tag{7}$$

とする. その他同様に, 鳥類 BRD, 魚類 FSH, 哺乳類 MAM, 爬虫類 RPT についての知識を定める.

脊椎動物のもつ特性について, FIN は 50 次元の論理値をもち, 脊椎動物がヒレをもつときその動物のアトム i 番目のビットが 1 となる論理値をもつ, ヒレをもつという特性 (fin) をあらわすアトムとする.

同様にその他 9 つの脊椎動物の持つ特性 FLY, GIL, HMT, LCT, OVP, SCL, MTM, MST, WNG について知識を定める.

本章で述べるブール多次元論理系を用いた推論は, 任意の論理式の真理値を直接計算するプロセスである. 上述した脊椎動物とその特性に関するアトムを用いて柔軟な様式の推論を単純におこなう様子を示す.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mathrm{HMT[AMP]}\\ \mathrm{HMT[BRD]}\\ \mathrm{HMT[FSH]}\\ \mathrm{HMT[MAM]}\\ \mathrm{HMT[RPT]} \end{pmatrix} \wedge\neg \begin{pmatrix} \mathrm{LCT[AMP]}\\ \mathrm{LCT[BRD]}\\ \mathrm{LCT[FSH]}\\ \mathrm{LCT[MAM]}\\ \mathrm{LCT[RPT]} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0000000000\\ 1111111111\\ 0000000000\\ 0000000000\\ 0000000000 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

であることより, $HMT \wedge \neg LCT = BRD$ である. これより,

$$T((\mathrm{HMT} \wedge \neg \mathrm{LCT})[\mathrm{x}]) = \mathrm{T}(\mathrm{BRD}[\mathrm{x}]) \tag{9}$$

である. これは恒温であり吸水性でないものは必ず鳥であるということを示している.

次に帰納推論をおこなう例を示す. それぞれの脊椎動物の種ごとに与えられた知識より,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{GIL[AMP]} \\ \mathrm{GIL[BRD]} \\ \mathrm{GIL[FSH]} \\ \mathrm{GIL[MAM]} \\ \mathrm{GIL[RPT]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1010101010 \\ 0000000000 \\ 1111111111 \\ 0000000000 \\ 0000000000 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

$T[\mathrm{GIL[AMP]}] = 0.5$ であることより両生類はヒレをもつかもしれない. という帰納的な推論が可能である. 同様にその他 4 種の脊椎動物に関しても $T[\mathrm{GIL[BRD]}] = 0$ であることより鳥類はヒレをもたない, $T[\mathrm{GIL[FSH]}] = 1$ であることより魚類は必ずヒレをもつ, $T[\mathrm{GIL[MAM]}] = 0$ であることより哺乳類はヒレをもたない, $T[\mathrm{GIL[RPT]}] = 0$ であることより爬虫類はヒレをもたない. という帰納的な推論結果を得られる.

次に演繹推論をおこなう様子を示す. 脊椎動物とそれらの特性についての知識について論理値が与えられておらず真理値のみが与えられているとき, 本章におけるブール多次元論理の 2 つの論理式の間における論理積と論理和の関係を用いて演繹推論をおこなうことができる.

$$\begin{pmatrix} T(\neg\mathrm{GIL[AMP]} \wedge \mathrm{SCL[AMP]}) \\ T(\neg\mathrm{GIL[BRD]} \wedge \mathrm{SCL[BRD]}) \\ T(\neg\mathrm{GIL[FSH]} \wedge \mathrm{SCL[FSH]}) \\ T(\neg\mathrm{GIL[MAM]} \wedge \mathrm{SCL[MAM]}) \\ T(\neg\mathrm{GIL[RPT]} \wedge \mathrm{SCL[RPT]}) \end{pmatrix}$$

$$\in \begin{pmatrix} [\max(-0.5, 0), \min(0.5, 0)] \\ [\max(0, 0), \min(1, 0)] \\ [\max(-0.2, 0), \min(0, 0.8)] \\ [\max(0, 0), \min(1, 0)] \\ [\max(1, 0), \min(1, 1)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

これより, 任意のアトム x に関して $\neg\mathrm{GIL} \wedge \mathrm{SCL} = \mathrm{RPT}$, $T((\neg\mathrm{GIL} \wedge \mathrm{SCL})[\mathrm{x}]) = \mathrm{T}(\mathrm{RPT}[\mathrm{x}])$ である. これはもし与えられたものがエラをもたずにウロコをもつならばそれは爬虫類である. という演繹推論による結果をあらわす.

5 ブール複素論理

本章では正整数 N を次元とし, $(X_0, \cdots, XN-1)$ を 0,1 の範囲の値をとるスペクトルとする, アトムを時間 t に関する複素関数

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j2\pi n/N \cdot t}, \tag{12}$$

アトムのとる真理値を

$$T[x] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} X_n \tag{13}$$

とする.

2 章, 4 章で述べたブール多次元論理系と同様に論理式の集合がブール代数を形成し, 4 章で述べたブール多次元論理系と同様に推論を扱うことができる.

6 結論

本論文では, 固定点二進数を真理値とみなすことにより, 学習と推論を扱うことができる新しい多次元論理系であるブール多次元論理を定義した. また, ブール多次元論理上でユーザーによって任意に与えられた知識の一貫性を評価, 矛盾を含む知識の改善の提言, 学習の結果を用いた推論をおこなう論理分析モデルであるゲーデルプラットフォームについて述べた. ゲーデルプラットフォームはルールベースのインタラクティブシステムであり, 多くの分野での知識の一貫性を管理するシステムに有用であると考えられる.

また, ゲーデルプラットフォームの推論部の別の実現方法として, 有限ビット列において 1 となるビットの数を引数とする関数値を真理値とみなすことにより, 論理式の集合がブール代数を形成するブールクラスの多次元論理系, アトムと論理式を複素関数にて記述した論理式の集合がブール代数を形成するブールクラスの多次元論理系の 2 つのブール多次元論理系を新たに定義し, 柔軟な様式の推論を単純化する方式について述べた.

今後の課題として, 本論文で述べたシステムはユーザーが定められたフォームに従って知識を入力する仕様になっているが, 今後自然言語処理技術を導入し, ユーザーが入力した任意の自然言語文より知識を抽出する演算機構を加えることにより, 更にユーザーが直感的に知識を入力できるインターフェースを開発することがあげられる.

参考文献

[1] George B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton Univ. Press, 1963.

[2] George J. Klir and Tina A. Folger, Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice Hall, Jan. 1988.

[3] Hisashi Suzuki, “A complementary fuzzy logic system,” IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern., vol. 27, no. 2, pp. 293-295, Apr. 1997.

[4] Hisashi Suzuki and Suguru Arimoto, “Embedment of a fuzzy logic system into a boolean lattice for satisfying a complementary law,” Information Sciences; An International Journal, vol. 78, pp. 257-268, 1994.

[5] Leon Henkin, “The Completeness of the First-order Functional Calculus,” The Jour. of Symbolic Logic, Vol. 14, 1949, pp. 159-166.

[6] Lotfi A. Zadeh, “Fuzzy sets,” Information and Control, vol. 8, pp. 338-353, 1965.

[7] Rudolf Carnap, Logical Foundations of Probability, The Univ. of Chicago, 1967.

[8] Stephen C. Kleene, Introduction to Metamathematics, New York: Van Nostrand, 1952.

[9] Wesley C. Salmon, “Confirmation,” Scientific American, pp. 75-83, May 1973.

[10] 岩佐 圭祐, “ブール多値論理上の学習の整数計画問題へのモデル化,” **中央大学大学院理工学研究科情報工学専攻修士論文**, 2010.