

ASYMPTOTIC LINKING NUMBER OF VOLUME PRESERVING FLOWS

体積保存流の漸近的纏わり数

数学専攻 小川 竜
Noboru Ogawa

0 序

3次元多様体上の滑らかな流れに対して、軌道全体の linking number を見ることにより多様体自身のトポロジー若しくはそれに付随する構造について調べたい。近年、これをよく眺めることによって多様体上の接触構造を調べる事が可能になってきた。今回は3次元球面上の美しい流れ Hopf fibration の力学系に注目して、その linking と標準的接触構造との関連を見てゆこう。

1 Linking pairing = Asymptotic linking number \int_M

M を有向閉3次元多様体とする。 M 上の体積形式を $dvol_M$ で表し $\int_M dvol_M = 1$ となるように正規化しておく。

1.1 ベクトル場と微分2形式

まず復習としてベクトル場と微分2形式の間の対応を見る。ここでは全て C^1 のカテゴリーで考えている。

$$\begin{array}{ccc} X \in \mathfrak{X}(M) & \leftrightarrow & \int_M i(X)dvol_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}_d(M) & \leftrightarrow & Z^2(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}_h(M) & \leftrightarrow & B^2(M) \end{array}$$

X に対して $\int_M i(X)dvol_M$ を対応させることで、 $\mathfrak{X}(M)$ と $\int_M \mathfrak{a}^2(M)$ との間にベクトル空間としての同型が与えられる。特に Cartan の公式を使うと volume preserving (divergence free) なベクトル場全体 $\mathfrak{X}_d(M)$ と閉2形式全体 $Z^2(M)$ が対応する。この時、完全2形式と対応するベクトル場を null homologous なベクトル場と呼び、その空間を $\mathfrak{X}_h(M)$ と表すことにしよう。

注) ベクトル場全体の空間には Lie bracket により Lie 環の構造が入るが、特に $\mathfrak{X}_d(M)$ は部分環であり $\mathfrak{X}_h(M)$ は $\mathfrak{X}_d(M)$ のイデアルである。

1.2 linking pairing

我々の舞台は $X_h(M) \cong B^2(M)$ である. $X; Y \in X_h(M)$ を取ると $X_h(M)$ の定義より $i(X)dvol_M = d\tilde{a}$; $i(Y)dvol_M = d\tilde{a}$ となる $\tilde{a}; \tilde{a} \in \mathfrak{a}^1(M)$ が存在する. この時, 次の積分を定義しよう.

$$lk(X; Y) := \int_M \tilde{a} \wedge d\tilde{a}$$

この Hopf 不変量タイプの積分を **linking pairing** と呼ぶ.

注 1) Stokes formula より well-defined に定義出来る. (Exercise: 確認せよ.)

注 2) これは流体力学における Helicity という概念とほぼ一致する.

Property ([1]) linking pairing は次の良い性質を持つ.

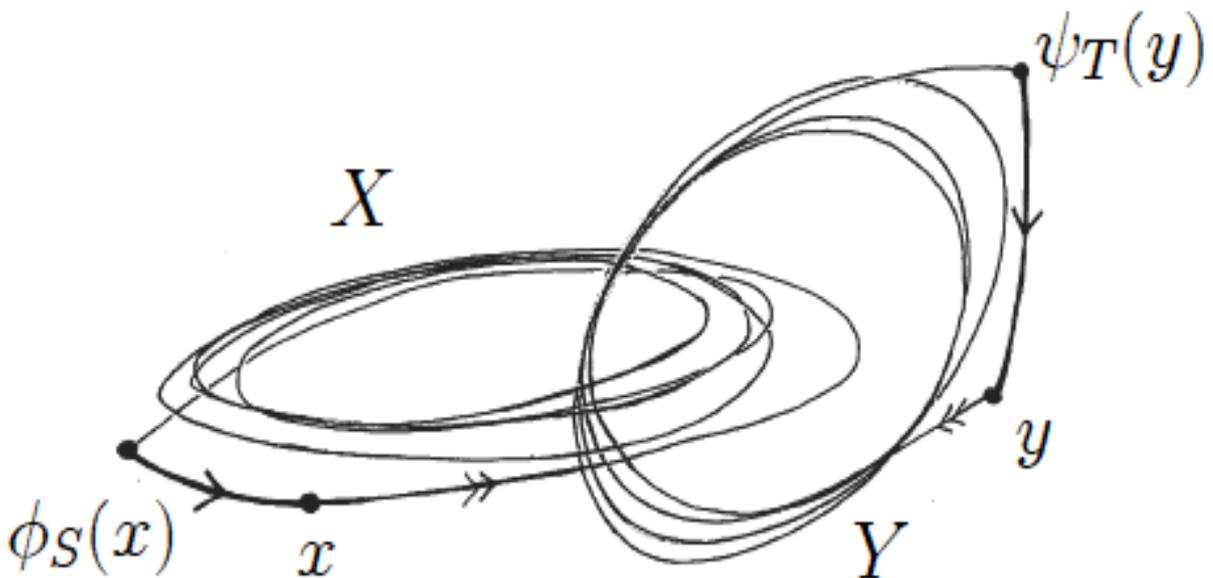
- 1) $B^2(M)$ 上の非退化対称 2 次形式である. 即ち $B^2(M)$ 上の不定値内積を定める.
- 2) $Di\mathfrak{a}_0^1(M)$ 上で adjoint invariant である. (注: Homeo で同じ事が云えるかは未解決.)

これを幾何学的に考えると ベクトル場が生成する軌道全体の linking number と思える. それを説明する為にもう一つの linking number を与える.

$X; Y \in X_h(M)$ の **Asymptotic linking number** とは,

$$\mathcal{A}(X; Y) := \lim_{(x; y) \in 2M \times M} \lim_{T_1; T_2 \rightarrow 1} \frac{\text{link } \hat{U}_{(x; T_1)}; \hat{V}_{(y; T_2)}}{T_1 T_2} dvol_M(x) \wedge dvol_M(y)$$

ここで $\hat{U}_{(x; T_1)} := (X \text{ の } T_1 \text{ 秒までの軌道}) + (\text{shortpath で閉じる})$:



今回鍵となるのが次の Arnol'd の定理である.

Theorem (V: I: Arnol'd '86 [1])

M が単連結の時, $\mathcal{A}(X; Y)$ が 定義され, $\mathcal{A}(X; Y) = lk(X; Y)$

2 接触幾何学と linking pairing

$\tilde{\alpha} \wedge d\tilde{\alpha} \neq 0$ となる $\tilde{\alpha}$ を 接触形式 (contact form), $\xi_{\tilde{\alpha}} = \text{Ker } \tilde{\alpha}$ が生成する平面場を 接触構造 (contact structure) 若しくは 接触平面場 (contact plane field) という.

注) $\xi_{\tilde{\alpha}}$ は最も非可積分な平面場を生成する.

我々は与えられた正の接触構造に対して, それを生成する接触形式全体に注目したい. 例えば次のような空間である.

$$P(\xi_{\tilde{\alpha}}) := \{f d(f\tilde{\alpha}) \mid f \in C^1(M), g \in \mathfrak{so}(B^2(M); \mathbb{R})\}$$

これは \mathbb{R} が正定値な部分空間である. 特に $B^2(M)$ での 内積 \mathbb{R} に関して直交補空間を取ると, 次の様に書ける.

$$P(\xi_{\tilde{\alpha}})^{\perp} = \{f d\tilde{\alpha} + i(X)f \text{dvol}_M \mid X \in \mathfrak{X}(M), g \in \mathfrak{so}(B^2(M); \mathbb{R}) \text{ null homologous な Legendre ベクトル場}\}$$

ここで3次元接触トポロジーにおける重要な定義を与えよう.

Definition 接触構造 ξ が tight とは disc を $(M; \xi)$ にどのように埋め込んでも, ξ の切り口に limit cycle が出来ない状態を云う.

一般に tight 性を示すのは非常に難しく, 接触幾何学の大きなテーマとなっている. 次の定理より $P(\xi)^{\perp}$ を見ることによって我々は tight 性の判定が出来る.

Theorem (Y. Mitsumatsu '01 [2])

$\text{Tor}^{\text{an}}(M; \xi) := \sup \{ \dim P \mid P \in P(\xi)^{\perp}; \mathbb{R} \text{ 上 } \langle \cdot, \cdot \rangle_P : \text{正定値 } g \text{ を analytic torsion invariant と呼ぶ. この時,}$

$$\text{Tor}^{\text{an}}(M; \xi) < 1 \iff \xi \text{ tight}$$

今回我々は Hopf fibration を詳しく調べる為に quaternion \mathbb{H} を考える. 特に $e^{it}; e^{jt}; e^{kt}$ による掛け算は Hopf fibration $\{hX_i; hX_j; hX_k\}$ を生成する. また $h_i; h_j; h_k$ は S^3 の Lie 環であり, その dual basis を $\tilde{a}; \tilde{b}; \tilde{c}$ とすればこれらは S^3 上の標準的な正の接触形式となる. (図を見よ) 実は次の事が知られている.

Theorem (D. Benuquin '83, (Y. Eliashberg, M. Gromov '90))

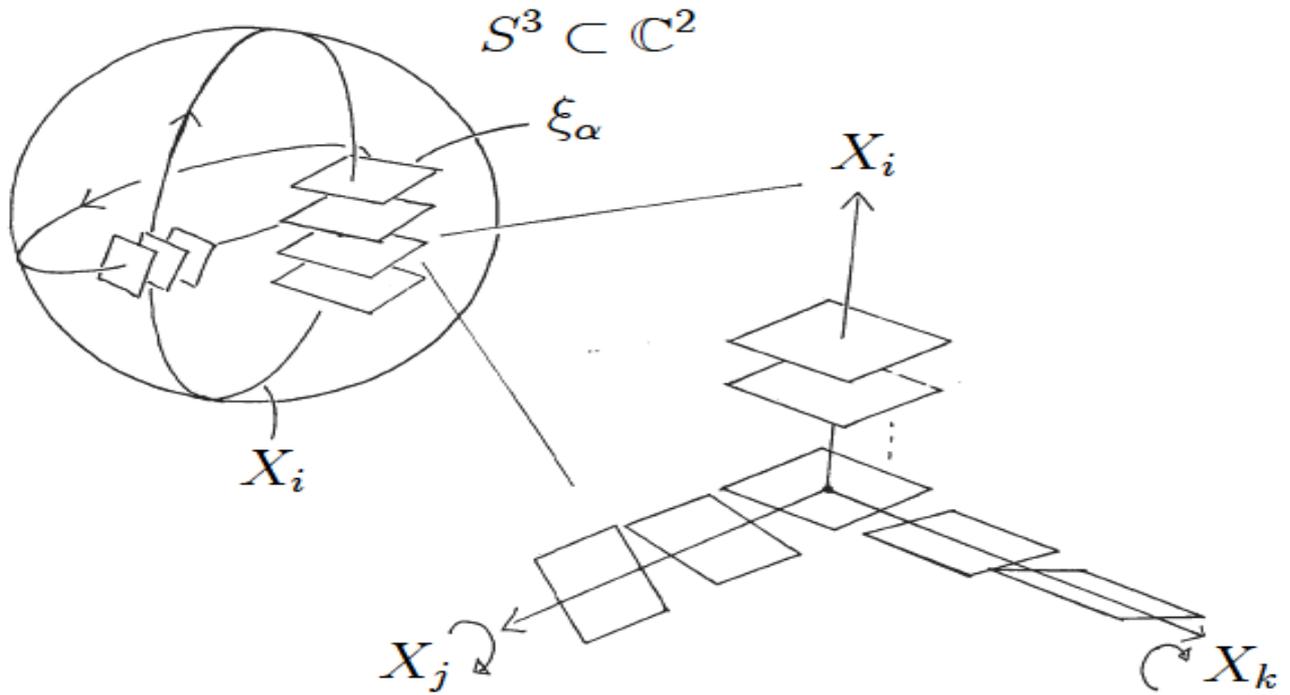
S^3 上の標準的接触構造 $\xi_{\tilde{a}}$ は tight である.

この事から $\text{Tor}^{\text{an}}(S^3; \xi_{\tilde{a}}) < 1$ が期待されるのだが, 実際には \mathbb{R} が正定値な無限次元の部分空間が作れてしまう. 今回はこの様な空間を巡って考察してきた結果を紹介したい.

$P(\xi_{\tilde{a}})^{\perp}$ を調べる為に, 次の空間を導入する.

$$V(X_j) := \{f d\tilde{a} + j \tilde{a}(X_j) = 0 \mid g \in \mathfrak{so}(B^2(M); \mathbb{R})\}$$

すぐに $P(\xi_{\tilde{a}}) \cap V(X_j); P(\xi_{\tilde{a}})^{\perp} \cap V(X_j)^{\perp} + V(X_k)^{\perp}$ 等が分かる.



Hopf fibration と 標準的接触構造 \mathbb{Q}_α

結果

1: 微分形式の計算 (即ち線形代数!) からの考察:

$$P(\mathbb{Q}_\alpha)^? \setminus V(X_j) \circ P \circ L^2(S^2)$$

として, lk が正定値な無限次元の部分空間 P が作れることが分かった.

2: S^3 上の Hopf fibration の幾何学からの考察:

$$P(\mathbb{Q}_\alpha)^? \circ V(X_j)^? + V(X_k)^?$$

に注目して $V(X_j)^? + V(X_k)^?$ の linking pairing を考察する. ここで Arnol'd の定理を使ってベクトル場の力学系に話を置き換えて計算するのがポイント! それを通して Hopf fibration の moduli に関する興味深い幾何学が見えてきた. これを精密に考察することで rank が $+1; \mathbb{A}^1$ となる部分空間が存在することを示した. この見方から無限次元の部分空間を具体的に構成することは今後の課題である.

参考文献

- [1] V: I: **Arnold**, The asymptotic Hopf invariant and its applications. Selected translations. Selecta Math. Soviet. 5 (1986), no. 4, 327{345}.
- [2] Y: **Mitsumatsu**, Linking Pairing, Foliated Cohomology, and Contact Structures. Department of mathematics Chuo university preprint series No.67 (2006).