

拡張カルマンフィルタ有限要素法を用いた弾性係数の同定に関する研究

Identification of Elastic Modulus using Extended Kalman Filter Finite Element Method

土木工学専攻 11号 加藤 有祐
Yusuke KATO

1 はじめに

山岳トンネルの掘削に当たり、事前に切羽前方の状況や、軟弱地盤の特定を行い、対策を講じることは大変重要である。その一つとして先進ボーリングにより地質を直接探査する方法が用いられている。しかし、この方法は長期間作業を止めて行う為、工期が遅延したり、調査費用等も膨大なものになる。そこで、本研究では有限要素法を用いた逆解析手法による弾性係数の同定に関する研究を行う。近年、コンピュータ技術は目覚ましい発展を遂げ、様々な分野で数値シミュレーションが広く行われている。しかしながら、コンピュータを用いた逆解析に用いる観測データの計測に当たって以下の問題点が挙げられる。観測データを計測する際、機械誤差、個人誤差、自然誤差など様々な誤差が含まれる。また物理的にも経済的にも多くの観測地点を設けることが非常に困難である。これらの問題点を解決するために、カルマンフィルタ理論を適用し、モデルの不確実性を確率過程に基づいて修正し、同定を行う。さらにカルマンフィルタ理論と有限要素法を組み合わせることで、時系列のみならず空間的に同定することが可能になる。これは多層モデルを同定する上で重要となる。本研究では、3次元トンネル解析モデルを用いて、発破時の振動による加速度を観測データとして逆解析を行う。その際、観測データには白色雑音に似た疑似雑音を与え、それによる弾性係数の同定解析を行った。本研究における主眼は、観測点の配置による同定精度への影響である。

2 数値解析手法

2.1 拡張カルマンフィルタ

カルマンフィルタとは、確率過程に基づいた推定手法の一つである。本手法を用いることによりモデルの不確実性を確率過程に基づいて修正し、状態量を逐次決定的に推定することができる。同定問題は非線形問題となるので、カルマンフィルタを拡張する必要がある。拡張カルマンフィルタの状態空間モデルを以下に示す。

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + G_k w_k \quad (1)$$

$$y_k = h_k(x_k) + v_k \quad (2)$$

ここで、 x_k はシステムの状態量、 f_k は状態遷移行列、 G_k は駆動行列、 y_k は観測データ、 h_k は観測行列である。 v_k 及び w_k は、システムノイズ及び観測ノイズと呼ばれ、平均 0、共分散行列 Q_{w_k} , R_{v_k} に従う正規白色ノイズであ

る。以下にカルマンフィルタのアルゴリズムを示す。

1. $[\hat{P}_{0|0}] = [P_{x_0}]$, $\{\hat{x}_{0|0}\} = \{\bar{x}_0\}$
2. $\{\hat{x}_{k+1|k}\} = [F_k]\{\hat{x}_{k|k}\}$
3. $[K_k] = [\hat{P}_{k|k-1}][H_k]^T([R_{v_k}] + [H_k][\hat{P}_{k|k-1}][H_k]^T)^{-1}$
4. $[\hat{P}_{k|k}] = ([I] - [K_k][H_k])[\hat{P}_{k|k-1}]$
5. $\{\hat{x}_{k|k}\} = \{\hat{x}_{k|k-1}\} + [K_k]\{y_k\} - [H_k]\{\hat{x}_{k|k-1}\}$
6. $[\hat{P}_{k+1|k}] = [F_k][\hat{P}_{k|k}][F_k]^T + [G_k][Q_{w_k}][G_k]^T$

但し、上式の F_k, H_k は感度行列と呼ばれ、

$$F_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_k} \right)_{x=\hat{x}_k}, \quad H_k = \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_k} \right)_{x=x_k^*}$$

ここで、 $\hat{x}_{k|k}$ は観測データ y_0, \dots, y_k が与えられたときの x_k の最小分散推定値である。 K_k はカルマンゲインである。

2.2 状態方程式

トンネルの周辺の地山の状態を表す状態方程式として弾性体の方程式を用いる。応力の釣り合い方程式、変位とひずみ関係式、応力とひずみの関係を表す土の構成則に対して四面体要素を用い、*Galerkin* 法を適用することにより、有限要素近似を行う。ここで、空間方向に離散化した有限要素方程式は以下の式で与えられる。

$$M_{i\alpha k\beta} \ddot{u}_{k\beta} + C_{i\alpha k\beta} \dot{u}_{k\beta} + K_{i\alpha k\beta} u_{k\beta} = \hat{\Gamma}_{i\alpha} \quad (3)$$

また、時間方向の離散化には *Newmark* β 法を用いた。*Newmark* β 法は $u_{i\beta}^{(n+1)}, \dot{u}_{i\beta}^{(n+1)}$ を以下のように仮定する。

$$u_{i\beta}^{(n+1)} = u_{i\beta}^{(n)} + \dot{u}_{i\beta}^{(n)} \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}_{i\beta}^{(n)} \Delta t^2 + \beta \Delta t^2 (\ddot{u}_{i\beta}^{(n+1)} - \ddot{u}_{i\beta}^{(n)}) \quad (4)$$

$$\dot{u}_{i\beta}^{(n+1)} = \dot{u}_{i\beta}^{(n)} + \ddot{u}_{i\beta}^{(n)} \Delta t + \Delta t \gamma (\ddot{u}_{i\beta}^{(n+1)} - \ddot{u}_{i\beta}^{(n)}), \quad (5)$$

上式で求めた $u_{i\beta}^{(n+1)}, \dot{u}_{i\beta}^{(n+1)}$ を以下の式に代入することで加速度を求めることができる。以下に加速度 $\ddot{u}_{k\beta}$ 、速度 $\dot{u}_{k\beta}$ 、変位 $u_{k\beta}$ に関する有限要素方程式を示す。

$$\ddot{u}_{k\beta}^{n+1} = -S_{i\alpha k\beta}^{-1} A_{i\alpha k\beta} \ddot{u}_{k\beta}^n + B_{i\alpha k\beta} \dot{u}_{k\beta}^n + K_{i\alpha k\beta} u_{k\beta}^n - \hat{\Gamma}_{i\alpha} \quad (6)$$

2.3 拡張カルマンフィルタ有限要素法

前述した拡張カルマンフィルタには物理モデルが含まれていない。そこで有限要素法で近似した有限要素方程式を物理モデルとして拡張カルマンフィルタに組み込む。カルマンフィルタに物理モデルを組み込む方法は大きく2種類ある。一つは状態方程式に組み込む方法、もう一つは観測方程式に組み込む方法である。後者の方は時間遷移過程を追従することはできないが、同定したいパラメータだけが変数となるので、行列が非常に小さくなる。ゆえに、今まで拡張カルマンフィルタ有限要素法における問題点の一つであった計算時間、計算容量の問題を解決することができる。またこの手法は我が研究室では注目されていなかった手法であり、本研究ではこの手法を用いて同定を行った。時間遷移過程を追えないという事に関しては、各ステップで収束計算を行うことで解決した。後でそのアルゴリズムを示す。本手法の説明に入るが、式(5)、(6)を用いて感度行列を計算し、式(2)の観測行列に代入する。本手法を拡張カルマンフィルタ有限要素法と呼ぶ。本手法を用いることにより、状態量の時間的分布のみならず空間的分布においても推定が可能となる。以下に感度行列 H_k を示す。

$$H_k = -S_{i\alpha k\beta}^{-1} \left[\frac{\partial S_{i\alpha k\beta}}{\partial S} \ddot{u}_{k\beta}^{n+1} + \frac{\partial A_{i\alpha k\beta}}{\partial E} \ddot{u}_{k\beta}^n \right. \\ \left. + \frac{\partial B_{i\alpha k\beta}}{\partial E} \dot{u}_{k\beta}^n + \frac{\partial K_{i\alpha k\beta}}{\partial E} u_{k\beta}^n \right] \quad (7)$$

本研究では、観測値が一時に観測されたと考えるため、弾性係数は変化しない。それゆえに、状態遷移行列 F_k は単位行列になる。よってシステム状態方程式は以下のようになる。

$$x_{k+1} = Ix_k \quad (8)$$

2.4 新アルゴリズム

- 1). $[\Gamma_0] = [v_0], \{\hat{u}_{-1}\} = \{\hat{u}_0\}$
- 2). \dot{u}_n u_n by eq.(4), eq.(5)
- 3). $[K_n] = [\Gamma_n][H_n]^T([R_n] + [H_n][\Gamma_k][H_n]^T)^{-1}$
- 4). $[P_n] = ([I] - [K_n][H_n])[P_n]$
- 5). $[\Gamma_{n+1}] = [I][P_n]$
- 6). $\{E_n^*\} = \{E_{n-1}^*\} + [K_n](\{y_n - [H_n]\{\ddot{u}_{n-1}^*\})$
- 7). $\{E_{n+1}^*\} = \{E_n^*\}$
If $\{x_{k+1}^*\} - \{x_k^*\} < \epsilon$, go to next time cycle.
else if return to 2).

3 数値解析例

3.1 解析モデル

数値解析例として、3次元トンネル解析モデルを用いる。観測点の配置と数による同定精度への影響を考察するため、4つのケースに分けて解析を行う。図1に有限要素

分割図を示す。総節点数は1413、総要素数は6152である。観測データは、計算した加速度データに白色雑音に似た疑似雑音を加えることで、拡張カルマンフィルタ有限要素法の有効性を検討する。図2に観測点 No.1 での x 方向の観測データを示す。観測データは x, y, z 方向の加速度を用いた。 y, z 方向およびその他の点についてのデータは本稿では割愛する。表1は、各断層のヤング係数の初期値と目的値である。

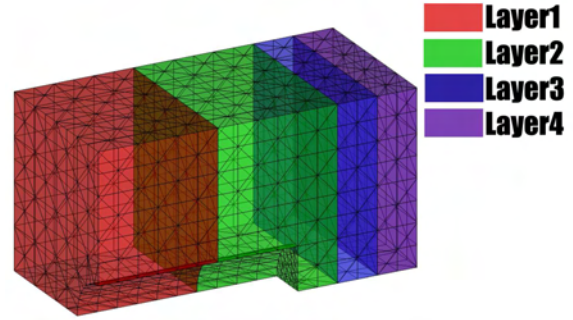


図1; 有限要素分割図

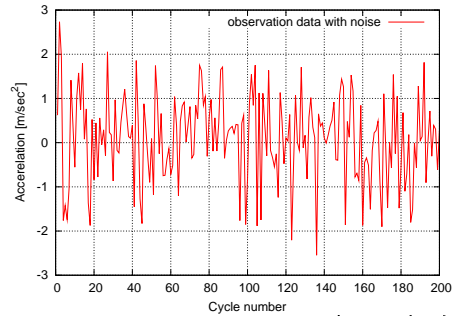


図2; Point1における x 方向の加速度

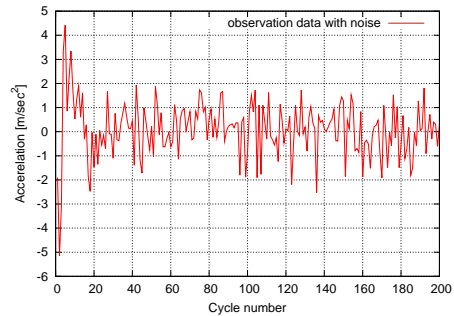


図3; Point1における y 方向の加速度

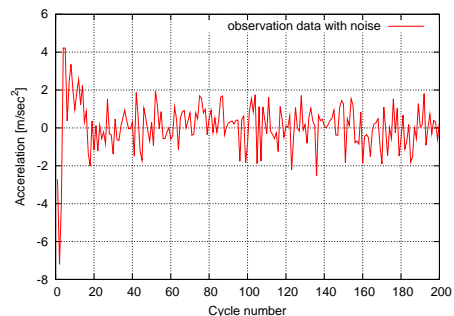


図4; Point1における z 方向の加速度

表 1 ; 弾性係数の初期値と目的値 $E[N/m^2]$

Layer	初期値	目的地
Layer1	5.0×10^5	1.0×10^5
Layer2	5.0×10^5	8.0×10^5
Layer3	5.0×10^5	1.0×10^6
Layer4	5.0×10^5	1.4×10^6

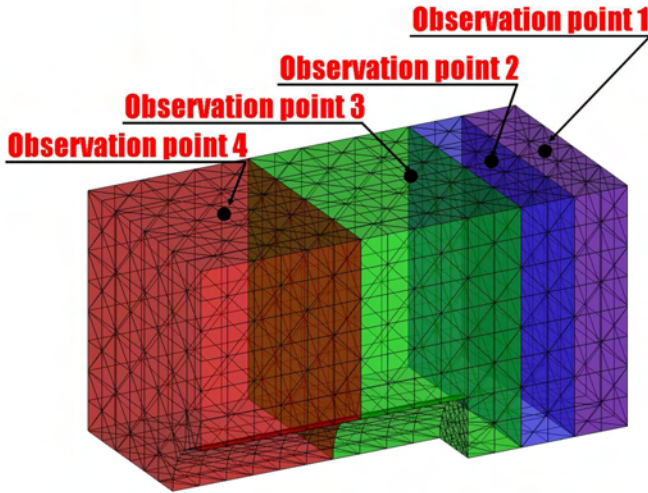


図 5; 観測点配置図

表 2; 各ケースにおける使用観測点の位置と数

Case	使用観測点	観測点数
Case1	1	1
Case2	1,2	2
Case3	1,2,3	3
Case4	1,2,3,4	4

3.2 解析結果

図 6~図 9 に各ケースにおける弾性係数の時刻歴, 表 2 に各ケースにおける収束率を示す. 観測点が 1 点の場合, 収束率は平均して 95% 程度である. 観測点が増えていくに従って, 精度は比例して増していることが分かる. また, ケース 1 に注目してみると, 1 点のみでも同定を行うことができることが確認できる. 4 ケースを比較し検討してみると, 発破が起きた場所から観測点の場所までに通過した層は同定を行うことが出来るが, 通過していない層に関しては同定が出来ていないことがわかる. つまり, 観測点の設置時には対象となる層を振動波が通過するように選定する必要がある. 逆に言えば, その点に留意さえすれば観測点が 1 点でも同定できるということであり, 拡張カルマンフィルタ有限要素法の有効性が確認できた. ノイズの影響もほぼ除去できており, 本研究の目的は CM 層, CL 層との判別という点で考えれば 90% 以上の精度が保障されれば十分であると考えられる.

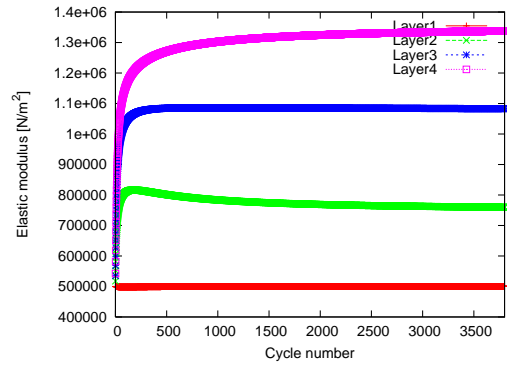


図 6; Case1 における弾性係数の時刻歴

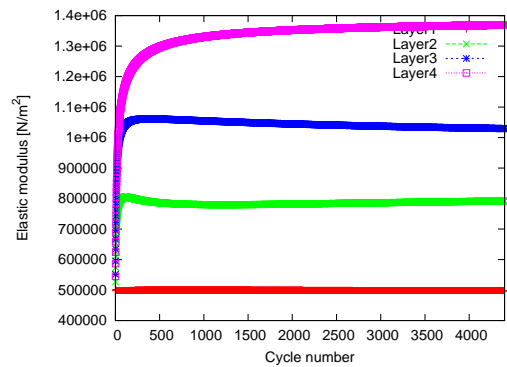


図 7; Case2 における弾性係数の時刻歴

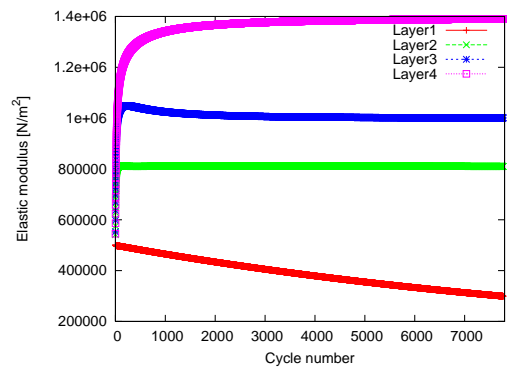


図 8; Case3 における弾性係数の時刻歴

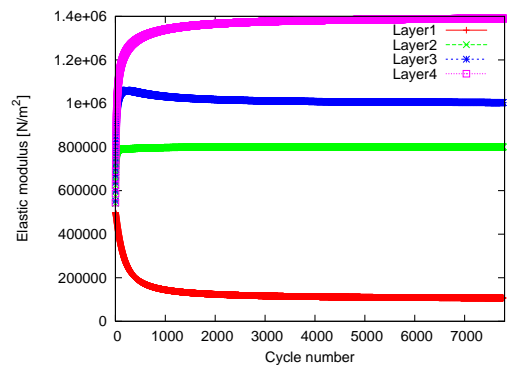


図 9; Case4 における弾性係数の時刻歴

表 2; 各ケースにおける弾性係数の収束率 [%]

	Layer1	Layer2	Layer3	Layer4
Case1	96	92	95	0
Case2	98	97	99	0
Case3	99	99	98	42
Case4	99	99	99	99

次に推定誤差共分散の初期値が同定の精度にどう影響するのかを考えるため、以下の4つのケースに分けて検討する。

表 3; 各ケースにおける初期推定誤差共分散

Case	初期値
Case1	1.0×10^5
Case2	1.0×10^6
Case3	1.0×10^7
Case4	1.0×10^8

解析領域、観測点の位置、数等は前検討例のCase2を用いる。まず、 1.0×10^8 に関しては、発散し収束しなかった。以下に、各ケースにおける収束率と、収束履歴を重ねたグラフを示す。初期値のオーダーが高いほど、収束率が良く、また収束速度も速くなっている。しかし、高すぎると発散をしてしまうことから、今後初期値における最適なオーダーもしくは最適な設定を考える必要がある。

表 4; 各ケースにおける弾性係数の収束率 [%]

	Layer1	Layer2	Layer3	Layer4
Case1	78	94	97	0
Case2	97	97	99	0
Case3	99	99	98	0

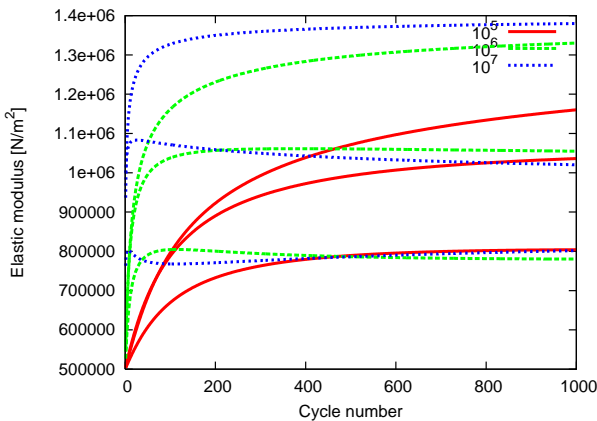


図 10; Case1~Case3 における弾性係数の時刻歴の比較

5 まとめ

本研究ではトンネル掘削における、地山の弾性係数の同定手法として拡張カルマンフィルタ有限要素法を提案し、その妥当性を観測データとの比較によって確認した。本研究の最大の目的でもある、誤差を含む観測データを用いた同定であるが、各層ともにほぼ正確に同定することができた。また、観測点の配置の位置や数が同定の精度にどのように影響するのかを4つのケースに分けて検証した。

- 発破時の振動波が通過した層においては同定を行うことができるが、通過していない層に関しては同定を行うことはできない。

- 観測点の数に関して、1点でも観測データがあれば同定を行うことができる。ただし、数が多いほど同定の精度が上がることも確認された事から可能な限り観測データは多く採取したほうが良い。

- ホワイトノイズの影響を除去することができた。

- 観測方程式へ物理モデルを適用したため、行列演算における計算時間や計算容量を大幅に削減することができた。その結果、以前から課題であった3次元解析が可能となった。

以上のことから、誤差を考慮しながら同定をする事が出来たと言えよう。ただ、問題点も多々存在する。

- 外力の与え方、荷重量の決定方法の検討

- 本手法は、あらかじめ層の分布が分かっていることを前提に行っているが実際にはそれを完璧に把握することは難しい。まずは層の分布の同定を行う必要がある。

- カルマンフィルタを用いる上で重要となる各共分散の初期設定。特に研究で明らかになったが、初期推定誤差共分散の設定は同定の収束速度や精度に大きな影響を及ぼすため、その最適な値の決定方法は大きな検討課題であろう。

参考文献

- 1 R.E.Kalman, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans.ASME,J. Basic Eng., vol182D, no.1,34-45,(1960)
- 3 A.Murakami and T.Hasegawa, Back Analysis by Kalman Filter Finite Elements and a Determination of Optimal Observed Points Location. Journals of the Japan Society of Civil Engineers Vol.388,227-235,(1987)
- 6 船越雄二,'拡張カルマンフィルタ有限要素法を用いた物質濃度の推定',中央大学修士論文,(2001)
- 7 樋川敦,'逆解析によるトンネル切羽前方のヤング係数の同定',中央大学修士論文,(2004)
- 8 須賀亮介,'カルマンフィルタ有限要素法を用いた潮流の推定',中央大学修士論文,(2004)
- 9 脇田博人,'カルマンフィルタ有限要素法を用いた潮流の推定問題',中央大学修士論文,(2005)