2009 年度修士論文要旨

Banach 空間上における非拡大写像族の共通不動点への強収束定理

THOREMS ON STRONG CONVERGENCE TO COMMON FIXED POINTS FOR FAMILIES OF NONEXPANSIVE MAPPINGS IN A BANACH SPACE

数学専攻　冨澤 佑季乃
TOMIZAWA Yukino

研究背景

不動点は多くの分野において平衡や安定性を表す基本概念である。不動点理論は集合や写像の性質を研究する本来の意味に加え、方程式の数値解法の原理、力学系やゲーム理論の研究へ応用されるなどその活用性は幅広い。「問題の解」と「不動点」を同一視することで解を直接に求めるような困難な方法を使わずとも不動点への近似で与えられるなど、不動点理論は様々な分野の問題に利用可能であるため、この理論を研究することは他分野の発展にも繋がる有益さを持ち合わせている。

本論文では、一般 Banach 空間上の非拡大写像に焦点を当てて研究を行った。Lipschitz 定数の範囲を 1 まで許すことで写像が非可算無限個の不動点をとることができる。非拡大写像を用いてその不動点へ収束するような iteration (反復法) を与えることができるが、これはコンパクト集合上で成り立つことが分かっている。非拡大写像、非拡大写像族及び非拡大半群に対する各々の iteration の性質を調べ、これらの iteration に対してコンパクト性を除いた場合の研究結果をまとめた。

研究内容

以下、X を一般 Banach 空間、$\mathbb{N}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$ をそれぞれ自然数、有理数、実数全体とする。T を部分集合 $D \subset X$ から X への写像とする。点 $z \in D$ が T の**不動点**であるとは、$Tz = z$ を満たすことをいう。$F(T) := \{z \in D : Tz = z\}$ を T の不動点集合とする。 T が**非拡大**であるとは、次の条件を満たすことをいう。

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \le \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in D$$

これは Lipschitz 条件 $\|Tx_1 - Tx_2\| \le k\|x_1 - x_2\|$ における Lipschitz 定数 $k = 1$ の場合に相当する。非拡大写像 T に対して次のような iteration (反復法) を定める。

$$x_1 \in D, \quad x_{n+1} = t_n T x_n + (1 - t_n) x_n, \quad \{t_n\} \subset \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$x_1 \in D$ と $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ が **Condition A** を満たすとは、次の 3 条件を満たすことをいう。

$$(A1)\ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty \qquad (A2)\ 0 \le t_n \le b < 1, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (A3)\ x_n \in D, \quad n \in \mathbb{N}$$

$\{t_n\}$ が $(0,1)$ 内の自然数列ならば上記の条件 (A1) と (A2) を満たす。Iteration (1) が Condition A を満たすとき **Mann iteration** という。コンパクト部分集合 $C \subset X$ 上の非拡大写像 T に対して Mann iteration $\{x_n\} \subset C$ は T の不動点に強収束することが知られている。

定理 1 (Ishikawa)**.** T をコンパクト部分集合 $C \subset X$ から閉部分集合 $D \subset X$ への非拡大写像とする。このとき、$x_1 \in C$ と $\{t_n\}$ が *Condition A* を満たすならば、*Mann iteration* $\{x_n\} \subset C$ は T の不動点に収束する。

部分集合 $D \subset X$ 上の可算無限個の可換非拡大写像族 $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ に対して $\{\lambda_n\} \subset (0,1)$ をとり、$\{\alpha_n\} \subset [0,1/2]$ が $0 = \liminf_{n\to\infty} \alpha_n < \limsup_{n\to\infty} \alpha_n$, $\lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0$ を満たすとき次を定める。

$$x_1 \in D, \quad \begin{cases} x_{n+1} = \lambda_n y_n + (1-\lambda_n)x_n, \\ y_n = (1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_n^k) T_1 x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_n^k T_{k+1} x_n, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

これを **Krasnoselskii-Mann iteration** という。コンパクト凸部分集合 $C \subset X$ 上の無限個の可換非拡大写像族 $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ に対して Krasnoselskii-Mann iteration $\{x_n\} \subset C$ は $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点に強収束することが知られている。

定理 2 (Suzuki)**.** $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ をコンパクト部分凸集合 $C \subset X$ 上の無限個の可換非拡大写像族とする。$\lambda \in (0,1)$ をとり $\{\alpha_n\} \subset [0,1/2]$ を次を満たすようにとる。

$$0 = \liminf_{n\to\infty} \alpha_n < \limsup_{n\to\infty} \alpha_n, \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

このとき $\lambda_n = \lambda$ とする *Krasnoselskii-Mann iteration* $\{x_n\} \subset C$ は $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点に収束する。

本論文では、無限個の可換非拡大写像族の iteration を用いた共通不動点への強収束定理がコンパクト性を除く場合に保たれる条件を考え、非拡大な強連続半群 (以下、非拡大半群) にこの収束定理が適応できるかを研究した。

T が閉部分集合 $D \subset X$ 上の非拡大写像のとき、次の 2 条件を満たせば Mann iteration による $\{x_n\} \subset D$ は T の不動点に強収束することが知られている。

$(M1)$ $F(T) \neq \emptyset$

$(M2)$ 非減少関数 $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ で $f(0) = 0, f(r) > 0,\ r \in (0,\infty)$ と
すべての $x \in D$ に対して $\|Tx - x\| \geq f\Big(d\big(x, F(T)\big)\Big)$ が成り立つものがある。

ただし d は X 内の距離とする。写像 T がこの 2 条件を満たすとき **Condition B** を満たすという。

定理 3 (Senter & Dotson)**.** T を閉部分集合 $D \subset X$ から X への非拡大写像とする。$x_1 \in D$ と $\{t_n\}$ が *Condition A* を満たし T が *Condition B* を満たすならば、*Mann iteration* $\{x_n\} \subset D$ は T の不動点に収束する。

ここで新たに Condition B を閉凸部分集合 $D \subset X$ 上の無限個の可換非拡大写像族 $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ へ拡張することを試みた。結果、次の 2 条件を新たに定義した。

$(K1)$ $\bigcap_{l=1}^{\infty} F(T_l) \neq \emptyset$

$(K2)$ 非減少関数 $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ で $f(0) = 0, f(r) > 0,\ r \in (0,\infty)$ と
$\|y_n - x_n\| \geq f\Big(d\big(x_n, \bigcap_{l=1}^{\infty} F(T_l)\big)\Big),\ n = 1, 2, \ldots$ が成り立つものがある。

ただし $\bigcap_{l=1}^{\infty} F(T_l)$ は $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点集合、x_n と y_n は (2) で定まるものとする。$\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ がこの 2 条件を満たすことを **Condition C** を満たすということにする。$\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ が Condition C を満たせばコンパクト性なしに Krasnoselskii-Mann iteration による $\{x_n\} \subset D$ が $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点に強収束することが本研究で新たに分かった。

定理 4. $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ を閉凸部分集合 $D \subset X$ 上の無限個の可換非拡大写像族とする。$\{\lambda_n\} \subset (0,1)$ をとり $\{\alpha_n\} \subset [0,1/2]$ を次を満たすようにとる。

$$0 = \liminf_{n\to\infty} \alpha_n < \limsup_{n\to\infty} \alpha_n, \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

もし $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ が条件 $(K1)$ と $(K2)$ を満たすならば、*Krasnoselskii-Mann iteration* $\{x_n\} \subset C$ は $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点に収束する。

$\{T(t):t\geq 0\}$ を集合 $D\subset X$ 上の写像族とする。$\{T(t):t\geq 0\}$ が**非拡大半群**であるとは次の 3 条件を満たすことをいい、$\{T(t):t\geq 0\}$ の共通不動点集合を $\bigcap_{t\geq 0} F\big(T(t)\big)$ で表す。

$(ns1)$ 各 $t\geq 0$ に対して $T(t)$ は D 上の非拡大写像である。

$(ns2)$ 全ての $s,t\geq 0$ に対して $T(s+t)=T(s)\circ T(t)$ である。

$(ns3)$ 各 $x\in D$ に対して $[0,\infty)$ から D への写像 $t\mapsto T(t)x$ は強連続である。

I を D 上の恒等写像として $T(0)=I$ を満たすならば、非拡大半群 $\{T(t):t\geq 0\}$ は恒等性をもつという。非拡大半群 $\{T(t):t\geq 0\}$ においては次が成り立つことが知られている。

定理 5 (Suzuki). $\{T(t):t\geq 0\}$ をコンパクト凸部分集合 $C\subset X$ 上の非拡大半群とする。$\lambda\in(0,1)$ をとり $\{\alpha_n\}\subset[0,1]$ を次を満たすようにとる。

$$0=\liminf_{n\to\infty}\alpha_n<\limsup_{n\to\infty}\alpha_n,\quad \lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)=0$$

σ と τ は正の実数で $\sigma/\tau\notin\mathbb{Q}$ であるとする。点列 $\{x_n\}\subset C$ を次で定める。

$$x_1\in C,\quad x_{n+1}=\lambda\Big((1-\alpha_n)T(\sigma)x_n+\alpha_nT(\tau)x_n\Big)+(1-\lambda)x_n,\quad n\in\mathbb{N} \tag{3}$$

このとき $\{x_n\}\subset C$ は $\{T(t):t\geq 0\}$ の共通不動点に収束する。

(2) に対して非拡大写像族 $\{T_l\}$ が 2 個の非拡大写像 T_1,T_2 の場合、次を得る。

$$y_n=(1-\sum_{k=1}^{2-1}\alpha_n^k)T_1x_n+\sum_{k=1}^{2-1}\alpha_n^kT_2x_n=(1-\alpha_n)T_1x_n+\alpha_nT_2x_n,$$

$$x_{n+1}=\lambda_ny_n+(1-\lambda_n)x_n=\lambda\big((1-\alpha_n)T_1x_n+\alpha_nT_2x_n\big)+(1-\lambda_n)x_n,\quad n\in\mathbb{N} \tag{4}$$

(4) が (3) と形が同じであることから、定理 5 は定理 2 の写像が 2 個 ($l=2$) の場合に相当するといえる。

非拡大半群 $\{T(t):t\geq 0\}$ に対しても同様にコンパクト性をもたない条件を考察した。$\{T(t):t\geq 0\}$ に Condition C を適応すると次の 2 条件になる。

$(S1)$ $\bigcap_{t\geq 0} F\big(T(t)\big)\neq\emptyset$

$(S2)$ 非減少関数 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ で $f(0)=0, f(r)>0,\ r\in(0,\infty)$ と $x_n\in D$ に対して $\|(1-\alpha_n)T(\sigma)x_n+T(\tau)x_n-x_n\|\geq f\Big(d\Big(x_n,\bigcap_{t\geq 0}F\big(T(t)\big)\Big)\Big)$ が成り立つものがある。

ただし $\{x_n\}$ は (4) で定まるものである。(S2) は (K2) の写像が 2 個の場合に相当する。

さらに次の 2 つの補題を提示する。

補題 1. $\{T(t):t\geq 0\}$ を部分集合 $D\subset X$ 上の非拡大半群とする。σ,τ は正の実数で $\sigma/\tau\notin\mathbb{Q}$ であるとする。このとき次が成り立つ。

$$\bigcap_{t\geq 0}F\big(T(t)\big)=F\big(T(\sigma)\big)\cap F\big(T(\tau)\big)$$

補題 2. 閉凸部分集合 $D\subset X$ において次は同値である。

$(F1)$ D 上の全ての非拡大写像が不動点をもつ。

$(F2)$ D 上の全ての非拡大半群が共通不動点をもつ。

$(F3)$ D 上の全ての恒等性をもつ非拡大半群が共通不動点をもつ。

以上から (S1) も (K1) の写像が 2 個の場合に相当するといえる。閉凸部分集合 $D\subset X$ 上の非拡大半群 $\{T(t):t\geq 0\}$ は (S1) と (S2) を満たせば (3) による $\{x_n\}\subset D$ が $\{T(t):t\geq 0\}$ の共通不動点に収束することも本研究で新たに分かった。

定理 6. $\{T(t) : t \geq 0\}$ を閉凸部分集合 $D \subset X$ 上の非拡大半群とする。$\{\lambda_n\} \subset (0,1)$ をとり $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ を次を満たすようにとる。

$$0 = \liminf_{n\to\infty} \alpha_n < \limsup_{n\to\infty} \alpha_n, \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0$$

σ と τ は正の実数で $\sigma/\tau \notin \mathbb{Q}$ であるとする。点列 $\{x_n\} \subset C$ を次で定める。

$$x_1 \in C, \quad x_{n+1} = \lambda_n \Big((1-\alpha_n) T(\sigma) x_n + \alpha_n T(\tau) x_n \Big) + (1-\lambda_n) x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$\{T(t) : t \geq 0\}$ が $(S1)$ と $(S2)$ を満たすとき、$\{x_n\} \subset C$ は $\{T(t) : t \geq 0\}$ の共通不動点に収束する。

結果、Krasnoselskii-Mann iteration と新たに設けた条件 (K1)(K2) によってコンパクト性を除いた非拡大写像族 $\{T_l : l \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点への強収束定理を得ることができた。また非拡大半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ における強収束定理は非拡大写像族が写像 2 個で生成される場合の強収束定理に相当することが分かった。

今後の展望

本論文で取り扱った非拡大写像の不動点理論は、具体的な応用として、ある種の変分不等式問題の解を求めるのに用いられている。工学では変分不等式の解と非拡大写像の不動点集合を同一視することで、不動点に収束する iteration を用いて変分不等式の解を近似的に求めることができる方法が研究されている。今後、非拡大写像の不動点理論の研究から新たに作られる他分野の問題を解く方法にも注目したい。

参考文献

[1] S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space,* Proc. Amer. Math. Soc., **59**(1976), 65-71.

[2] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings,* Pacific J. Math., **80**(1979), 493-501.

[3] T. Suzuki, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach space,* Fixed Point Theory Appl., **1**(2005), 103-123.

[4] T. Suzuki, *Common fixed points of one-parameter nonexpansive emigroups,* Bull. London Math. Soc., **38**(2006), 1009-1018.

[5] T. Suzuki, *Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals,* J. Math Anal. Appl., **305**(2005), 227-239.

[6] T. Suzuki, *The set of common fixed points of a one-parameter continuous semigroup of nonexpansive mappings is* $F(\frac{1}{2}T(1) + \frac{1}{2}T(\sqrt{2}))$ *in strictly convex Banach spaces,* Taiwanese J. Math., **10**(2006), 381-397.

[7] T. Suzuki, *Fixed point property for nonexpansive mappings versus that for nonexpansive semigroup,* Nonlinear Anal., **70**(2009), 3358-3361.