

混合整数計画法を用いた区分的線形回路のすべての解を求めるアルゴリズム

An Algorithm for Finding All Solutions of Piecewise-Linear Circuits

Using Mixed Integer Programming

電気電子情報通信工学専攻 金子 雄輔

Yusuke KANEKO

1. まえがき

非線形回路，あるいはそれを区分的線形近似することにより得られる区分的線形回路のすべての直流解を求める効率的かつ実用的なアルゴリズムを確立することは，集積回路設計における重要な課題の一つである．この課題に対し，これまで様々なアルゴリズムが提案されており [1] ~ [10]，近年では数千 ~ 数万変数クラス of 非線形方程式の全解探索に成功している [10]．しかし，これらのアルゴリズムはプログラムへ実装する際に高度な専門知識と複雑なプログラミングを要するため，初心者や非専門家には難易度の高い方法である．

これに対し，実現容易性に重点を置き，整数計画ソフトウェアを用いて区分的線形回路の全解探索を行う手法が提案されている [11]．特に有償ソフトウェアである IBM ILOG CPLEX を用いた場合，解プールという機能により極めて簡単に全解探索が行える．しかし，GLPK をはじめとする無償ソフトウェアには，一般に解プールと同等の機能がないため，全解探索を確実に行うことが困難となる問題が生じていた．本稿では，解プール機能のないソフトウェアを用いる場合を対象に，区分的線形回路のすべての解を確実に求める方法を提案する．

2. 整数計画を用いた区分的線形回路の全解探索法

n 個の区分的線形抵抗を含む抵抗回路は，一般に次のような形の区分的線形方程式で記述できる [1]．

$$f(x) \triangleq Pg(x) + Qx - r = 0 \quad (1)$$

ただし， $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ は区分的線形抵抗の枝電圧または枝電流を要素とする n 次元変数ベクトル， $g(x) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)]^T$ は抵抗の特性を表す $R^n \rightarrow R^n$ の区分的線形関数， P, Q は回路の構造によって決まる $n \times n$ 定数行列， r は電源の値によって決まる n 次元定数ベクトルである．

簡単のため， $g_i(x_i)$ は K 本の線分からなるものとし，

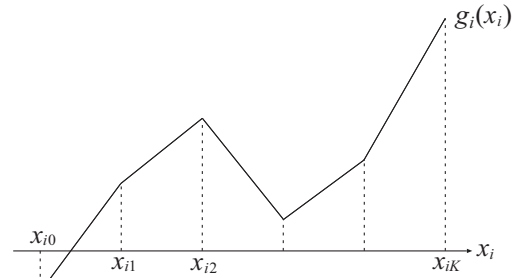


図 1 区分的線形関数

以下， f が線形となる領域を線形領域と呼ぶ (図 1)． f が変数分離可能とすると，線形領域は n 次元直方体の形状をとり，線形領域の総数は K^n となる．本稿では，この K^n 個の線形領域からなる初期領域に存在する式 (1) のすべての解を求める問題を考える．

この問題に対し，文献 [11] では，実現容易性を考慮した整数計画法による区分的線形回路の全解探索法が提案されている．これは，区分的線形方程式を整数計画問題へ定式化し，そこへ整数計画ソフトウェアを適用してすべての解を求めるという手法である．文献 [11] では，定式化手法として， λ フォームと δ フォームと呼ばれる二つの定式化手法が紹介されている．

λ フォームでは，以下に示す混合整数計画問題を考える．ただし， μ は 0 か 1 の値しか取らない変数である．

$$\begin{aligned} & \max x_1 \\ & \text{subject to} \\ & Py + Qx - r = 0 \\ & x_i = \sum_{j=0}^K x_{ij} \lambda_{ij}, \quad y_i = \sum_{j=0}^K g_i(x_{ij}) \lambda_{ij} \\ & \sum_{j=0}^K \lambda_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^K \mu_{ij} = 1 \\ & 0 \leq \lambda_{i0} \leq \mu_{i1} \\ & 0 \leq \lambda_{ij} \leq \mu_{ij} + \mu_{ij+1}, \quad j = 1, 2, \dots, K-1 \\ & 0 \leq \lambda_{iK} \leq \mu_{iK} \\ & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

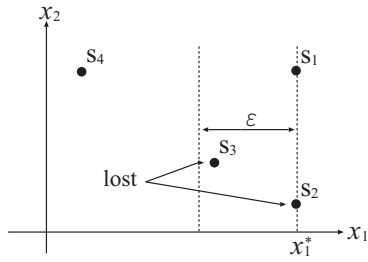


図 2 解の見落とし

δ フォームでは、以下に示す混合整数計画問題を考える。

$$\begin{aligned}
 & \max x_1 \\
 & \text{subject to} \\
 & Py + Qx - r = 0 \\
 & x_i = x_{i0} + \sum_{j=1}^K \delta_{ij} \\
 & y_i = g_i(x_{i0}) + \sum_{j=1}^K \frac{g_i(x_{ij}) - g_i(x_{ij-1})}{x_{ij} - x_{ij-1}} \delta_{ij} \quad (3) \\
 & \delta_{ij} \leq (x_{ij} - x_{ij-1})\mu_{ij-1}, \quad j = 1, 2, \dots, K \\
 & \delta_{ij} \geq (x_{ij} - x_{ij-1})\mu_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, K \\
 & \mu_{i0} = 1, \quad \mu_{iK} = 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

整数計画ソフトウェアを用いて式 (2), 式 (3) を解けば, 解の中で最も x_1 が大きい解 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ が得られる。以下, 制約式 $x_1 < x_1^*$ を追加した問題を解の個数+1 回解くことで, 式 (1) のすべての解を求めることができる。しかし, 整数計画法では $x_1 < x_1^*$ のように等号を含まない制約式は扱えない。簡単に不等式制約にする方法として, 正の微小な値 ε を設定し,

$$x_1 \leq x_1^* - \varepsilon \quad (4)$$

という制約式を付加する方法が考えられる。しかし, x_1 が同じ値を持つ解が存在する場合など, 確実に全解探索を行える保証がない (図 2 の s_2, s_3)。

これに対し, CPLEX の解プール機能を用いる方法が提案されている [11]。解プールは, 整数計画問題の制約条件を満たす解をすべて求め保存する機能であり, 整数計画問題を一回解くだけで区分的線形回路のすべての解を求められる。しかし, 一般には解プールと同等の機能はその他の整数計画ソフトウェアに組み込まれていない。次章では, 解プールが備わっていない整数計画ソフトウェアを用いて確実に全解探索を行う手法を提案する。

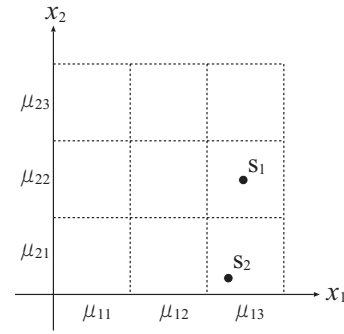


図 3 λ フォーム

3. 提案手法

一つの線形領域において, 式 (1) は高々一つの解しか持たない。そこで, 解が得られた線形領域のみを解析の対象から外す制約式を解が得られる度に付加していくことで, 確実にすべての解を求める手法を提案する。本章では, 各定式化手法における付加制約を説明する。

3.1 フォームにおける付加制約

λ フォームでは次の関係が成り立つ。

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1 & (j = l_i) \\ 0 & (j \neq l_i) \end{cases} \quad (5)$$

ただし, μ_{il_i} は, x_i 方向に対して値が 1 となる μ を表す。これにより一つの線形領域に対する μ の組み合わせが一意に決まり, 他の線形領域で同じ組み合わせは現れない。また, 他の線形領域では, 少なくとも一つ以上の μ_{il_i} が 0 となる必要がある。ここで, 次の制約式を考える。

$$\sum_{i=1}^n \mu_{il_i} \leq n - 1 \quad (6)$$

μ_{il_i} の値がすべて 1 となる場合, 式 (6) を満足することができない。しかし, どれか一つでも 0 となれば, つまり他の線形領域を表す場合は式 (6) を満足する。これにより, 任意の線形領域を解析対象から外すことができるので, 式 (6) を制約条件に追加しながら, 解が得られなくなるまで整数計画問題を解けば, 式 (1) のすべての解を求めることができる。

これを 2 変数, 線分数 3 の例で説明する。 μ_{ij} は図 3 のように対応付けられる。解 s_1 が得られたとき $\mu_{13} = \mu_{22} = 1$, それ以外の μ は 0 となる。式 (6) に従い, 次の制約式を追加する。

$$\mu_{13} + \mu_{22} \leq 1 \quad (7)$$

解 s_1 が存在する線形領域では式 (7) を満足しない。他

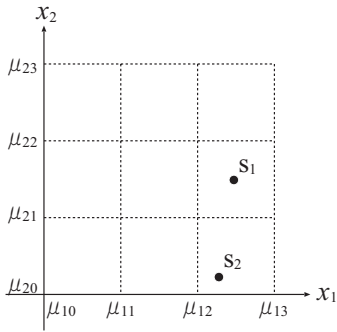


図 4 δ フォーム

の領域では μ_{13}, μ_{22} が同時に 1 にはならず、解析対象から外されない。例えば、解 s_2 が存在する線形領域では $\mu_{13} + \mu_{22} = 1$ となる。

3.2 フォームにおける付加制約

δ フォームは、式 (3) から次の関係を自動的に満たす。

$$0 = \mu_{iK} \leq \mu_{iK-1} \leq \dots \leq \mu_{i1} \leq \mu_{i0} = 1 \quad (8)$$

ある μ が 1 となれば、それより小さい添え字の μ はすべて 1、それより大きい添え字の μ はすべて 0 となる。

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1 & (j \leq l_i) \\ 0 & (j > l_i) \end{cases} \quad (9)$$

ただし、 μ_{il_i} は、 x_i 方向に対して値が 1 である μ のうち、添え字が最も大きいものを表す。式 (9) より次の関係が成り立つ。

$$\mu_{ij} - \mu_{ij+1} = \begin{cases} 1 & (j = l_i) \\ 0 & (j \neq l_i) \end{cases} \quad (10)$$

これにより一つの線形領域に対する μ の組み合わせが一意に決まり、他の線形領域で同じ組み合わせは現れない。また、他の線形領域では、少なくとも一組以上の $\mu_{ij} - \mu_{ij+1}$ が 0 となる必要がある。ここで、次の制約式を考える。

$$\sum_{i=1}^n (\mu_{il_i} - \mu_{il_i+1}) \leq n - 1 \quad (11)$$

$\mu_{il_i} - \mu_{il_i+1}$ の値がすべて 1 となる場合、式 (11) を満足することができない。しかし、どれか一組でも 0 となれば、つまり他の線形領域を表す場合は式 (11) を満足する。λ フォーム同様、式 (11) を制約条件に追加しながら、解が得られなくなるまで整数計画問題を解けば、式 (1) のすべての解を求めることができる。

これを 2 変数、線分数 3 の例で説明する。 μ_{ij} は図 4 の

表 1 例 1 における解の個数比較

回路	CPLEX	GLPK	
		式 (4) の手法	提案手法
文献 [11] の図 4	11	8	11
文献 [11] の図 8	9	8	9
文献 [11] の図 11	3	2	3
文献 [11] の図 12	3	1	3
文献 [11] の図 13	3	1	3

ように対応付けられる。解 s_1 が得られたとき、各 μ は次の値を持つ。

$$\begin{cases} \mu_{10} = 1, & \mu_{11} = 1, & \mu_{12} = 1, & \mu_{13} = 0 \\ \mu_{20} = 1, & \mu_{21} = 1, & \mu_{22} = 0, & \mu_{23} = 0 \end{cases}$$

式 (11) に従い、次の制約式を追加する。

$$(\mu_{12} - \mu_{13}) + (\mu_{21} - \mu_{22}) \leq 1 \quad (12)$$

解 s_1 が存在する線形領域では式 (12) を満足しない。他の線形領域では $\mu_{12} - \mu_{13}, \mu_{21} - \mu_{22}$ が同時に 1 にはならず、解析対象から外されない。例えば、解 s_2 が存在する線形領域では $(\mu_{12} - \mu_{13}) + (\mu_{21} - \mu_{22}) = 1$ となる。

4. 数値例

本手法を C 言語と GLPK Ver. 4.39 を用いて Dell Precision T7400 (CPU: Intel Xeon 3.4GHz) 上に実装した。本章ではいくつかの数値実験結果を示し、本手法の有効性を検証する。

例 1: 文献 [11] において図 4, 図 8, 図 11 ~ 13 として示されている回路を例題として解く。これらの回路に対し、式 (4) を用いた手法と本手法を適用して得られた解の個数を表 1 に示す。ただし、式 (4) における微小値は $\varepsilon = 10^{-3}$ とした。また、解プール機能を用いて解いた場合の解の個数もあわせて表 1 に載せる。式 (4) ではいくつかの解が得られていないことがわかる。これらの回路は、 x_1 が同じ値を持つ解が存在するため、 ε の値をどんなに小さく設定してもすべての解は得られない。このように、式 (4) を用いた手法は ε の値に関わらずすべての解が求められない場合があるのに対し、提案手法は確実に全探索を行うことができる。

例 2: 文献 [11] で数値例として取り上げている他の回路に対しても本手法を適用し、得られた解の個数と計算時間を表 2 に示す。ただし、 S は得られた解の個数を表す。これらの回路に対しても実用的な時間ですべての解が得られていることがわかる。

表 2 例 2 における解の個数と計算時間 (秒)

回路	S	λ	δ
文献 [11] の図 2	9	3	1
文献 [11] の図 3	3	0.4	0.6
文献 [11] の図 5	1	78	31
文献 [11] の図 6	3	3	0.7
文献 [11] の図 7	5	5	4
文献 [11] の図 9	1	25	3
文献 [11] の図 10	9	1558	225

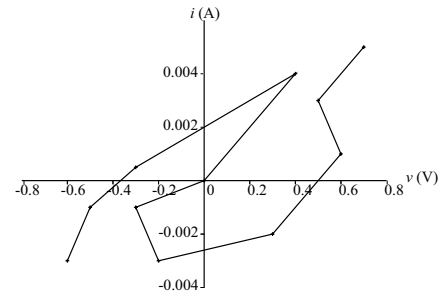


図 5 多値関数型区分的線形方程式

5. 応用例

式 (2), 式 (3) は, ある値に対して複数の関数値を持つ図 5 のような多値関数型区分的線形関数も定式化することができる. そのような例題として, マクロモデルを含んだ回路の全解探索に応用することが考えられる [12].

また, n 変数, $n - 1$ 式のように解が曲線となる方程式に対しても定式化手法を適用して求解することができ, 解曲線上の一点が解として得られる. その解を含む線形領域自体を解とし, 提案手法を適用すれば, 特性曲線探索などへ応用できる (図 6).

6. むすび

本稿では, 解プール機能を備えていない整数計画ソフトウェアを用いた区分的線形回路の確実な全解探索法を提案した. 本手法は, 求解後のバイナリ変数の値から簡単に得られる制約式を付加するだけで, 確実な全解探索が行える. この方法により, 複雑なプログラムを作ることなく, 初心者や非専門家でも簡単に区分的線形回路の全解探索を行うことができる. また, 提案手法を用いることで解曲線の探索などへ応用することができる.

文献 (下線は研究業績)

[1] L.O. Chua and P.M. Lin, Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[2] L.O. Chua and R.L.P. Ying, "Finding all solutions of piecewise-linear circuits," Int. J. Circuit Theory Appl., vol.10 no.3, pp.201-229, July 1982.

[3] K. Yamamura and M. Ochiai, "An efficient algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits," IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.39, no.3, pp.213-221, March 1992.

[4] S. Pastore and A. Premoil, "Polyhedral elements: A new algorithm for capturing all the equilibrium points of piecewise-linear circuits," IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.40, no.2, pp.124-132, Feb. 1993.

[5] M. Tadeusiewicz and K. Glowienka, "A contraction algorithm for finding all the DC solutions of piecewise-linear circuits," J. Circuits, Systems, and Computers, vol.4, no.3, pp.319-336,

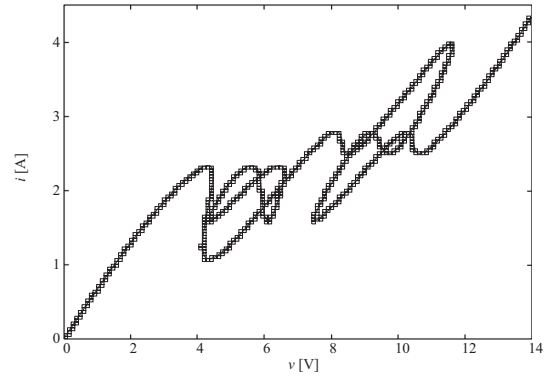


図 6 特性曲線探索

Sept. 1994.

[6] L.V. Kolev, "A new method for global solution of systems of non-linear equations," Reliab. Comput., vol.4, no.2, pp.125-146, April 1998.

[7] K. Yamamura and K. Yomogita, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using an LP test," IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.47, no.7, pp.1115-1120, July 2000.

[8] K. Yamamura and S. Tanaka, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the dual simplex method," Int. J. Circuit Theory Appl., vol.30, no.6, pp.567-586, Nov. 2002.

[9] K. Yamamura and A. Machida, "An efficient algorithm for finding all DC solution of piecewise linear circuits," Int. J. Circuit Theory Appl., vol.36, pp.989-1000, Nov. 2008.

[10] K. Yamamura, K. Suda, and N. Tamura, "LP narrowing: A new strategy for finding all solutions of nonlinear equations," Applied Mathematics and Computation, vol.215, no.1, pp.405-413, Sept. 2009.

[11] 田村直也, 山村清隆, "整数計画法を用いた区分的線形回路の全解探索法," 信学技報, NLP2009-68, CAS2009-32, pp.47-52, Sept. 2009.

[12] W. Kuroki and K. Yamamura, "A SPICE-oriented method for finding DC operating points of nonlinear circuits piecewise-linear macromodels," IEICE Transactions Fundamentals, vol.E89-A, no.11, Nov. 2006.

[13] 山村清隆, フィトラグナワン, 蓬田幸二, "線形計画法を用いた非線形抵抗回路の特性曲線の探索," 信学論 (A), vol.J83-A, no.6, pp.761-770, June 2000.

[14] 宮代隆平, 松井知己, "ここまで解ける整数計画," システム/制御/情報, vol.50, no.9, pp.363-368, Sept. 2006.

[15] 田村直也, 金子雄輔, 山村清隆, "GLPK を用いた区分的線形回路の全解探索法," 信学技報, NLP2009-144, pp.25-30, Jan. 2010.