

# Euler 型有限被覆法に基づく大変形固体解析手法の構築研究

## Studies on Development of a Numerical Method for Large Deformation Solid Analysis Based on Eulerian Finite Cover Method

土木工学専攻 31 号 寺沢 英之  
Hideyuki TERASAWA

### 1. はじめに

大変形を伴う固体解析において、物質点の大変位や回転に対して取り扱いが可能な解析手法が必要となる。固体力学の従来の定式化では、物質の変形に追従した観測点において変形を記述する Lagrange 型解法が用いられるが、大変形問題を解析した際に、解析要素が潰れ、解析精度の低下や計算が破綻することが問題として挙げられている。それに対して、空間に固定された観測点において変形を記述する Euler 型解法では、解析要素の極端な歪みによる解析精度の低下や計算の破綻を回避することができ、大変形を伴う固体解析に有効な手段だと考えられる。以上の点から、有限要素法を用いた Euler 型の大変形固体解析手法に関する研究を行ってきた<sup>1)</sup>。しかしながら、Euler 型解法では、固体境界面上に自由度を持つ節点が存在するとは限らないために、固体境界面に力学的境界条件・幾何学的境界条件を精度良く課すことが難しいといった問題点がある。そのため、既往の研究で行っていた有限要素法を用いた Euler 型の大変形固体解析手法では、固体境界面にこれらの境界条件を精度良く課すことが困難であった。本研究では、上記の問題点を改善する手法として、有限被覆法<sup>2)</sup>に着目する。有限被覆法は、要素内に存在する固体領域の位置を反映し、固体境界面に力学的境界条件・幾何学的境界条件を精度良く課すことが出来る手法である。

そこで本研究では、固体の大変形解析において、より高精度な数値解析手法の構築を目的とし、固体境界面に対して力学的境界条件・幾何学的境界条件を高精度に課すために Euler 型有限被覆法に基づく大変形固体解析手法の構築を行う。数値解析例として、弾塑性材料の衝突解析、押し込み解析を取り上げ、本手法の妥当性、有効性を検討する。

### 2. 支配方程式

保存則の記述において、Lagrange 型表記では、各物質点での時間変化率を表す物質時間微分が用いられる、それに対し、Euler 型表記では空間に固定された点での時間変化率を表す空間時間微分が用いられる。これら 2 つの関数の関係は以下のように示される。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi \quad (1)$$

ここで、 $\phi$  は任意の物理量、 $\mathbf{v}$  は物質点の移動速度、 $\frac{D\phi}{Dt}$  は物質時間微分、 $\frac{\partial\phi}{\partial t}$  は空間時間微分である。Lagrange

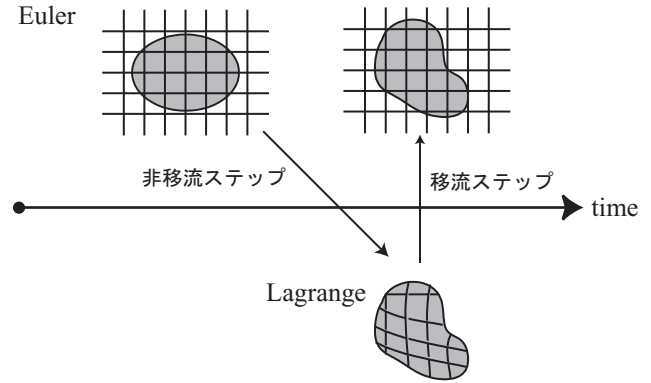


図-1 operator split 法

型表記の運動量保存則は以下のようなになる。

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2)$$

ここで、 $\rho$  は密度、 $\boldsymbol{\sigma}$  は応力テンソル、 $\mathbf{b}$  は物体力ベクトルを表している。式 (1) の関係を用いて、Lagrange 型表記の運動量保存則を Euler 型表記に書き換えると以下の式で表される。

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (3)$$

本研究では式 (3) を支配方程式とする。

### 3. 数値解析手法

#### 3.1 operator split 法

固体の大変形解析で用いられる構成方程式では、各物質点に追従した点で観測されるひずみ速度が用いられる。しかしながら、支配方程式 (3) の左辺第 1 項目は空間に固定された点での時間変化率を表す空間時間微分であるため、式 (3) を解くことによって求められたひずみ速度を構成方程式で用いることは出来ない。そのため、本研究では、支配方程式 (3) を operator split 法<sup>3)</sup>を用いることによって 2 つの方程式に分割する。

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)^L = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)^E + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)^L + \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)^E \quad (6)$$

式 (4) は外力項を含んだ非移流ステップ、式 (5) は移流項を含んだ移流ステップである。式中の L の添え字で

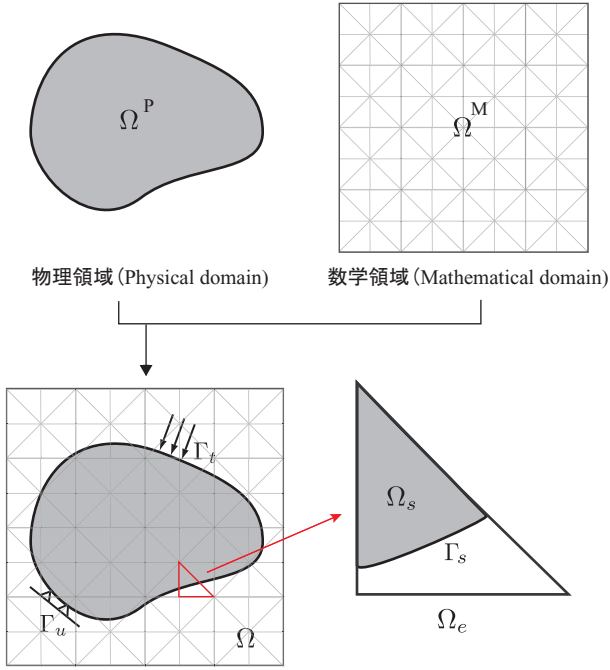


図-2 数学領域と物理領域

表された時間変化率は、各物質点に追従した点で観測される変形速度の時間変化率を示しており、非移流ステップを解くことによって求められたひずみ速度を用いて、構成方程式を解き、応力の算出を行う。また、式中の  $E$  の添え字で表された時間変化率は、非移流ステップで求められた変形速度を空間に固定されたメッシュへ投影する際の変化率を示しており、この時間微分は実際には時間進行はなく静的なものである。式 (6) は各時間変化率の関係を示している。解析アルゴリズムとしては、非移流ステップを解くことによって、固体の変形量、応力、ひずみ等の計算を行う、次に非移流ステップで求められた物理量を固定メッシュに反映させるために、移流ステップにおいて移流方程式を解くことにより、固定されたメッシュ上に応力・ひずみ等を投影させる。operator split 法の概念を図-1 に示す。

### 3.2 非移流ステップ

式 (4) に対して、仮想変位を掛け、空間の離散化を施すことにより以下の方程式が得られる。

$$M\dot{v} + F_{int} = F_{ext} \quad (7)$$

ここで、 $M$  は質量マトリックス、 $F_{ext}$  と  $F_{int}$  はそれぞれ外力および内力ベクトルである。

#### 3.2.1 有限被覆法 (Finite Cover Method) の適用

有限被覆法<sup>2)</sup>は、数学領域  $\Omega^M$  と物理領域  $\Omega^P$  を分離して定義するという点で、有限要素法と大きく異なる。図-2 にそれぞれの領域を示す。数学領域とは、近似関数が定義される数学的な部分領域であり、数学被覆(要素)と呼ばれる部分領域が重なり合うことによって形成されている。物理領域とは、支配方程式が満たされ

るべき物理的な部分領域である。しかしながら、解析対象を要素で部分分割し、各要素間の未知量を節点値により補間近似するという点において有限要素法と一致するため、有限要素法を一般化した手法と見なすことが出来る。以上の特性から、有限被覆法では、有限要素法と同様の近似関数を用いながらも、要素間に固体境界が存在することを許容し、要素内の固体領域の位置を考慮した質量・内力・外力を評価することが可能になる。以下にその式を示す。

$$M = \sum_{e=1}^{nel} \rho_e \times \int_{\Omega_s} N_e^T N_e d\Omega_e \quad (8)$$

$$F_{int} = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_s} B_e^T \sigma_e d\Omega_e \quad (9)$$

$$F_{ext} = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_s} N_e^T t d\Gamma_e \quad (10)$$

ここで、 $t$  は外力、 $nel$  は総要素数を表している。また、 $\Omega_e$ 、 $\Omega_s$ 、 $\Gamma_s$  はそれぞれ図-2 に示す要素領域、要素内での固体が存在する領域、要素内での固体の境界領域を示している。

#### 3.2.2 変形速度の算出

固体の変形速度の算出には、動的陽解法を用いる。また、動的陽解法の時間積分には中央差分法を用いることにより、次式のように各節点の変形速度  $v$  を求めることが出来る。

$$v^{n+\frac{1}{2}} = v^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \overline{M}^n (F_{ext}^n - F_{int}^n) \quad (11)$$

ここで、 $\overline{M}$  は対角化された集中質量行列、上添字  $n$  は現時刻ステップであることを意味する。また、求められた変形速度を用いて応力・ひずみの算出を行う。

### 3.3 移流ステップ

移流ステップでは、固体形状、変形速度だけでなく、応力、相当塑性ひずみ等の物理量も固定メッシュ上へと投影する必要がある。そのため、移流ステップで解かれる方程式は、式 (5) を変換した以下の式を解く必要がある。

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^E + v \cdot \nabla \phi = 0 \quad (12)$$

式中の  $\phi$  は、固定メッシュ上へと投影する任意の物理量を表す。

#### 3.3.1 移流方程式解法

本研究では、移流方程式 (5) の計算法には高精度移流スキームとして知られる CIVa 法を適用する。CIVa 法は、移流方程式の厳密解から、時刻  $t - \Delta t$  において上流点に位置する点  $x - v^{n+\frac{1}{2}} \Delta t$  を探索し、上流点での値である  $\phi^n(x - v^{n+\frac{1}{2}} \Delta t, t - \Delta t)$  を、上流点を含む三角形要素間で高次の補間により値を求める手法である。

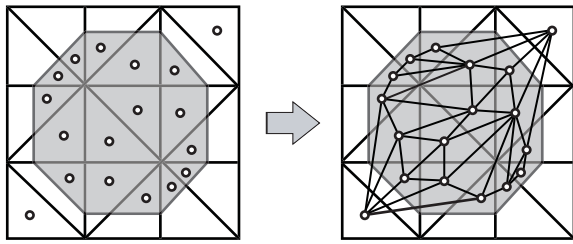


図-3 移流メッシュの再構築手法

### 3.3.2 応力・相当塑性ひずみの移流手法

式(12)をCIVA法を用いて計算する際に、移流計算される物理量は節点上の値となる。よって、その値を節点で持つ界面関数や速度などの節点値は容易に移流計算をすることが出来るのに対して、応力や相当塑性ひずみなどの要素値として求まる物理量は、そのままでは解くことができない。そこで、要素値として与えられる物理量の移流に関しては、要素内に新たに点を発生させ、その点を節点とする様な移流用の計算格子を再構築する。図-3に移流メッシュの再構築手法の概要図を示す。有限被覆法では固体領域を含んだ要素では固体部分の重心に新たに点を配置する、固体領域を含まない部分では要素の重心に点を配置し、新たに移流計算格子を構築する。この新たな移流計算格子を用いることによって要素値として与えられる物理量を節点上の物理量として扱い、移流方程式を解くことにより、物理量を更新することが可能となる。なお、移流計算格子の生成には、Delaunay分割法を用いた。

## 4. 動的引張解析

### 4.1 棒の衝突解析

数値解析例として、大変形固体解析のベンチマーク問題である弾塑性材料棒の衝突解析を行う。数値解析モデルは数値解析モデルは図-4に示すように、材料に対して鉛直下向きに初期速度300m/sを与える。材料特性は、バイリニア硬化型の $J_2$ 流れ則、初期降伏応力は0.02GPa、ポアソン比は0.28、密度は $1710\text{kg}/\text{m}^3$ を仮定する。また、解析領域の境界条件に関しては、下端部、左端部をローラ支点とした。図-5に解析に用いた要素分割図を示す、本解析では総節点数3969、総要素数7680、要素幅0.0935cmの構造格子を用いた。

図-6, 7, 8は、Lagrange型有限要素法、Euler型有限要素法、有限被覆法で解析を行った際の変形・相当応力の分布図の数値解析結果を示している。図-9は、 $80\mu\text{s}$ 後の固体形状を比較したものである。以上の結果より、有限被覆法を用いた本手法、従来の手法であるEulerian有限要素法は参照解であるLagrange型解法による解析結果とほぼ同等の変形挙動、相当応力分布を示していることが分かる。また、固体形状に関しては本手法は、Eulerian有限要素法よりも参照解に近い形状を示し、本手法の妥当性・有効性が確認された。

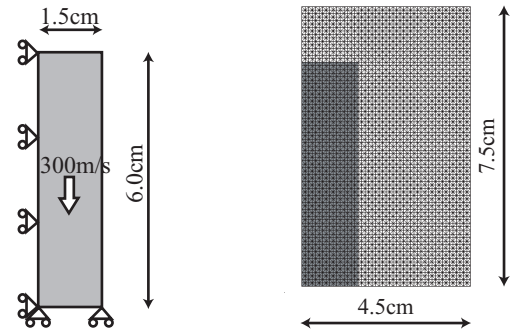


図-4 棒の衝突解析モデル

図-5 要素分割図

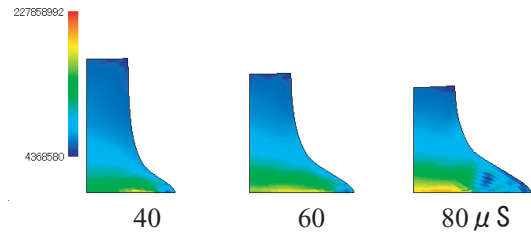


図-6 Lagrange型有限要素法

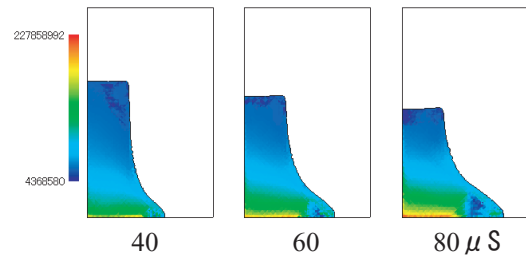


図-7 Euler型有限要素法

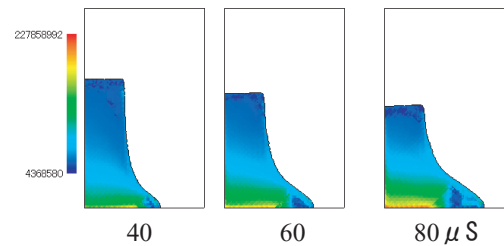


図-8 Euler型有限被覆法(本手法)

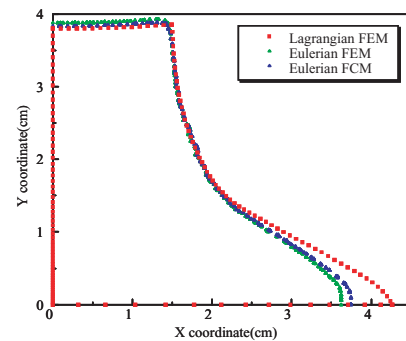


図-9 固体形状の比較 ( $80\mu\text{s}$ )

## 4.2 棒の押し込み解析

2つ目の数値解析例は、固体境界に力学的境界条件が課される問題を取り上げる。数値解析モデルは図-10に示すように、材料上端部に1000kN/mの分布荷重を与え押し込む。材料定数は1つ目の数値解析例と同様のものを仮定する。図-11に解析に用いた要素分割図を示す、本解析では総節点数2501、総要素数4800、要素幅0.05cmの構造格子を用いた。参照解としてLagrange型有限要素法での解析結果を示し、本手法の妥当性・有効性の検討を行う。

図-12、13は、Lagrange型有限要素法、有限被覆法で解析を行った際の変形形状・相当応力の分布図を示している。図-14は、60 $\mu$ S後の両手法の固体の境界形状を比較したものである。以上の結果より、有限被覆法を用いた本手法は、参照解であるLagrange型有限要素法による解析結果と変形挙動・相当応力分布に関してほぼ同等の結果を得ることが確認できた。また、固体形状についてもほぼ一致を示したことから、本手法の妥当性を示すことが出来た。よって、Euler型有限要素法では解析の困難だった、固体境界面に力学的境界条件を課す問題を解析することが可能であることが確認され、本手法の有効性を示すことが出来た。

## 5. おわりに

本研究は固体の大変形解析において、より高精度な数値解析手法の構築を目的として、Euler型有限被覆法を用いた大変形固体解析手法の構築を行い、以下の結論を得た。

- 本手法は、参照解であるLagrange型有限要素法、Euler型有限要素法と同等の応力分布・固体挙動の解析結果を得ることが確認され、本手法の妥当性を示すことが出来た。
- 本手法は、従来のEuler型有限要素法では適用が困難な固体境界に力学的境界条件が課される問題において、参照解であるLagrange型有限要素法の解析結果とほぼ同等の応力分布・変形挙動の解析結果が得ることが確認された。

今後の課題として、本手法の鍛造問題などのより複雑な問題への適用が挙げられる。

### 参考文献

- 1) S.Okazawa, K.Kashiyama, Y.Kaneko : Eulerian formulation using stabilized finite element method for large deformation solid dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007; 72: 1544-1559
- 2) 車谷麻緒, 寺田賢二郎 : 有限被覆法における一般化要素の近似性能に関する基礎的研究, 日本計算工学会論文集, 日本計算工学会, 論文番号 20030027, 2003
- 3) 岡澤重信, 河口篤志, 藤久保昌彦 : 各種メッシュ制御における動的陽解法, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.6, pp.151-158, 2003.

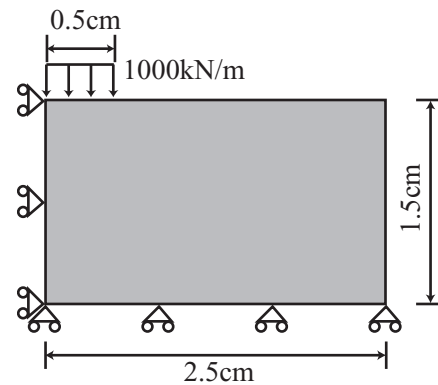


図-10 押し込み解析モデル

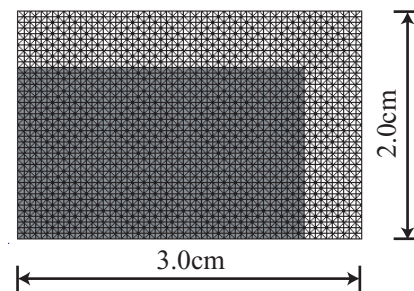


図-11 要素分割図

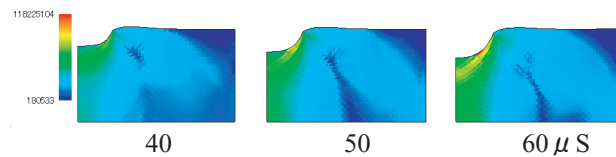


図-12 Lagrange型有限要素法

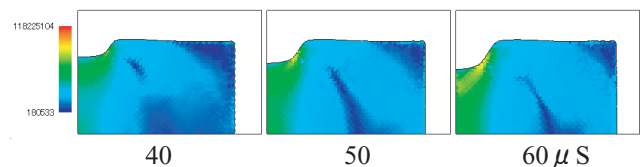


図-13 Euler型有限被覆法(本手法)

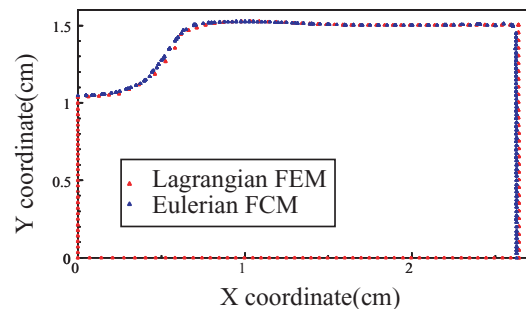


図-14 固体形状の比較(60 $\mu$ S)