

# 統計的遅延解析におけるクリティカル確率に関する研究

## A Study on Probabilities of the Criticality in Statistical Timing Analysis

電気電子情報通信工学専攻 吉田 裕樹  
Yuki YOSHIDA

### 1. はじめに

微細化の進歩に伴って、製造プロセスのばらつきによる素子特性のばらつきが増大し、最悪コーナーを想定してマージンを設定する従来の設計手法では、制約の厳しい高性能回路を設計できないという事態が生じている[1].

このような問題を解決するため、大規模回路のタイミング解析に用いられている静的遅延解析(STA)に統計的な概念を導入した統計的静的遅延解析(SSTA: Statistical Static Timing Analysis)が注目され[2], この10年で数多くの研究がなされてきた. このSSTAを用いた統計的設計手法が実用化されるためには、解析だけではなく、テストや合成にも統計的技法を導入する必要がある. これらに対する研究もなされており、タイミング故障の検出[3,4]および回路の最適化[5-7]について幾つかの報告がある[2].

タイミング故障の検出を効率化するには適切な検査パスを見出す必要がある[3,4]. 組合せ回路の最大遅延を与えるクリティカルパスは、そのパスさえタイミング制約を満たしていれば、回路全体が制約を満たすという意味で有用であるが、統計的設計ではパスがクリティカルパスであるか否かも確率的になる. 本文では、与えられたパスがクリティカルパスになる確率を、そのパスのC確率と定義し、これを求めるアルゴリズムを提案すると共に、C確率の有効性を検証する.

一方、回路を最適化するには適切な修正候補素子を見出し、それを変更することによってタイミング違反確率を減少させる必要がある[5-7]. その際、素子がクリティカルパスに含まれる確率は修正候補素子の選出に有用で、[5]には2つの変量の一方がもう一方より大きくなる確率を用いてこれを計算するアルゴリズムが提案されている. しかし、遅延ばらつきの空間的相関やパス遅延間の相関が存在する場合、その計算方法は正確ではない.

本文では、素子の遅延ばらつきと回路の最大遅延のばらつきとの相関係数に着目し、それを計算するアルゴリズムを提案する. また、この相関係数が遅延改善の指標としてどの程度有効かを検証する. この修正候補素子選出の指標は、ゲートを規則的なレイアウトのセルに変更することにより、遅延ばらつき(分散)を減少する際に有用となる.

### 2. 諸定義

本文では、与えられた回路の接続関係をアサイクリックグ

ラフ  $G=(N,A)$  で表す.  $G$  は唯一のソース  $s \in N$  と唯一のシンク  $t \in N$  を持ち、 $s$  あるいは  $t$  以外の各点は回路の端子に、 $s$  あるいは  $t$  に接続する枝以外の各枝は配線あるいは論理ゲートにおける信号伝達経路に対応する. また、各枝  $e=(v,w) \in A$  に対して、次式で示される重み(遅延)  $d(e)$ 、各点の最大遅延  $D(v)$  を次式で与える.

$$d(e) = \mu_e + s_x[e] \cdot x_e + \sum_{i=1}^g s_i[e] \cdot r_i \quad (1)$$

$$D(v) = \mu_{D(v)} + s_x[v] \cdot x_v + \sum_{i=1}^g s_i[v] \cdot r_i \quad (2)$$

ここで、 $\mu_e$  および  $\mu_{D(v)}$  はそれぞれ  $d(e)$ 、 $D(v)$  の平均であり、 $x_e, x_v$  および各  $r_i (1 \leq i \leq g)$  はそれぞれ  $d(e)$ 、 $D(v)$  にのみ含まれる局所確率変数および他の枝  $e'$  の遅延  $d(e')$  にも含まれる大域確率変数である. これらの確率変数は互いに独立で、その分布は標準正規分布  $N(0,1)$  とする. また、 $x_e$  は他の枝  $e'$  の遅延  $d(e')$  の局所変数  $x_{e'}$  とは独立とする.  $s_x$  および各  $s_i[e]$  はそれぞれ  $x_e, x_v$  および各  $r_i$  に対する  $d(e)$  の感度である. また、ソース  $s$  からシンク  $t$  に至るあるパス  $P \in P(t)$  以外のパス  $P' \in P(t) - \{P\}$  の遅延  $d(P')$  の最大値を

$$D(P^\wedge) = \text{Max}[d(P') \mid P' \in P(t) - \{P\}] \quad (3)$$

としたとき、 $P$  が  $d(P) \geq D(P^\wedge)$  を満たすならば、 $P$  をクリティカルパスと呼び、 $P$  がクリティカルパスになる確率  $\text{Pr}[d(P) \geq D(P^\wedge)]$  を  $P$  のC確率と言い、 $\text{CPr}[P]$  と書く.

$$\text{CPr}[P] = \text{Pr}[d(P) \geq D(P^\wedge)] \quad (4)$$

また、 $t$  への遅延  $D(t)$  をクリティカル遅延と呼ぶ.

$$D(t) = \text{Max}[d(P) \mid P' \in P(t)] \quad (5)$$

クリティカル遅延  $D(t)$  の局所変数  $x_t$  と枝  $e \in A$  の局所変数  $x_e$  との相関係数  $R_x[t,e]$  を  $R_x[e]$  と書き、 $e$  のC係数と呼ぶ.  $D(t)$  と枝  $e$  の遅延  $d(e)$  との共分散  $C[D(t), d(e)]$  は

$$C[D(t), d(e)] = s_x[t] \cdot s_x[e] \cdot R_x[e] + \sum_{i=1}^g s_i[t] \cdot s_i[e] \quad (6)$$

であり大域変数の感度に影響されるが、C係数は局所変数間の相関係数なので、C係数  $R_x[e]=0$  であれば、クリティカル遅延は  $d(e)$  と独立、すなわちクリティカルパスは枝  $e$  を通らないことを示す. 従って、C係数を素子遅延のクリティカル遅延に対する影響度を示す指標として利用できる.

### 3. クリティカルパス確率

ここでは、与えられたパス  $P$  のC確率  $\text{CPr}[P]$  を求めるアルゴリズムを提案する. どのパスの遅延も正規分布をすと仮定しているので、 $d(P)$  および  $D(P^\wedge)$  の分布とこれらの共分散が分かれば、Clarkの手法[8]を用いて  $\text{CPr}[P]$  を計算できる.

$D(P)$ の分布計算は容易なので、以下では、 $D(P^\wedge)$ の計算手法について述べる。

パス  $P$  が  $e_j=(v_{j-1},v_j)$  ( $1 \leq j \leq k$ ) であるような点と枝の交互系列 ( $s=v_0, e_1, \dots, v_{j-1}, e_j, v_j, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k=t$ ) で与えられたとし、 $s$  から  $v_j$  に至る  $P$  の部分パスを  $P_{<j}$  と書く。また、 $s$  から  $v_j$  に至る  $P_{<j}$  以外のパス  $P' \in P(v_j) - \{P_{<j}\}$  の遅延  $d(P')$  の最大値を  $D(P_{<j}^\wedge)$  と書く。

$$D(P_{<j}^\wedge) = \text{Max}[d(P') \mid P' \in P(v_j) - \{P_{<j}\}] \quad (7)$$

さらに、点  $v$  に入る枝の集合を  $A^-(v)$  と書き、 $e_j$  以外の  $v_j$  に入る枝を  $f_{j,b}=(u_{j,b},v_j)$  ( $1 \leq b \leq |A^-(v_j)|-1$ )、 $e_j$  以外の枝  $f_{j,b}$  を通り  $v_j$  に入るパス  $P' \in P(v_j)$  の遅延  $d(P')$  の最大値を  $D(e_j^\wedge)$  と書くと、次式が成り立つ (図 1 参照)。

$$D(e_j^\wedge) = \text{Max}[D(u_{j,b})+d(f_{j,b}) \mid 1 \leq b \leq |A^-(v_k)|-1] \quad (8)$$

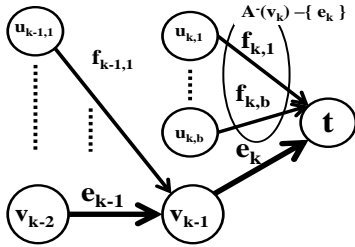


図 1: 点  $t=v_k$  および点  $v_{k-1}$  に入る枝

$P$  を通らないパスの遅延の最大値  $D(P^\wedge)$  は、 $e_k$  以外の枝を通り  $t=v_k$  に入るパス遅延の最大値  $D(e_k^\wedge)$  と、 $e_k$  を通り  $P$  を通らないパスの遅延の最大値から計算でき、後者は  $e_k$  の遅延  $d(e_k)$  と  $v_{k-1}$  に至る  $P_{<k-1}$  以外のパスの遅延の最大値  $D(P_{<k-1}^\wedge)$  の和  $D(P_{<k-1}^\wedge)+d(e_k)$  で計算できるから、次式が成り立つ。

$$D(P^\wedge) = \text{Max}[D(e_k^\wedge), D(P_{<k-1}^\wedge)+d(e_k)] \quad (9)$$

この式は、 $D(P^\wedge)=D(P_{<k}^\wedge)$  であるから、 $v_j$  に至る  $P_{<j}$  以外のパスの遅延の最大値  $D(P_{<j}^\wedge)$  を求める式に一般化できる。

$$D(P_{<j}^\wedge) = \text{Max}[D(e_j^\wedge), D(P_{<j-1}^\wedge)+d(e_j)] \quad (10)$$

さらに、 $D(P_{<1}^\wedge)=D(e_1^\wedge)$  であることから、 $D(P^\wedge)$  を計算する次のようなアルゴリズムを構築することができる。以下で、分布の計算や共分散の計算は Clark の手法 [8] に基づいており、その詳細は [9] に示されている。

<< $D(P^\wedge)$  の計算 >>

- 1°: SSTA [9] を実行し、各点  $v$  に対して  $D(v)$  の分布と、 $D(v)$  と  $v$  以外の点  $u$  の  $D(u)$  との局所変数の共分散  $C_x[D(u), D(v)]$  を求める。また、 $P$  の各枝  $e_j$  に対して、 $e_j$  が  $P(v)$  のパスに含まれるならば、 $D(v)$  と  $d(e_j)$  の局所変数の共分散  $C_x[D(v), d(e_j)]$  も求めておく。
- 2°: 式 (8) に基づいて  $D(e_1^\wedge)$  の分布を計算し、 $D(P_{<1}^\wedge)$  の分布とする。その際、 $D(P_{<1}^\wedge)$  の局所変数と、 $A^-(v_2)$  の各枝  $f_{2,b}=(u_{2,b},v_2)$  の始点  $u_{2,b}$  の遅延  $D(u_{2,b})$  の局所変数の共分散  $C_x[D(P_{<1}^\wedge), D(u_{2,b})]$  を求めておく。
- 3°: 各  $2 \leq j < k$  に対して、 $j$  の昇順に以下を繰り返す。

3-1°: 式 (8) に基づいて  $D(e_j^\wedge)$  の分布を計算する。その際、局所変数の共分散  $C_x[D(e_j^\wedge), D(P_{<j-1}^\wedge)]$  と、各枝  $f_{j+1,b}=(u_{j+1,b},v_{j+1}) \in A^-(v_{j+1})$  の始点  $u_{j+1,b}$  に対して、 $D(u_{j+1,b})$  の局所変数との共分散  $C_x[D(e_j^\wedge), D(u_{j+1,b})]$  を求める。また、 $P_{<j}$  上の各枝  $e_h=(v_{h-1},v_h)$  ( $1 \leq h < j$ ) の遅延  $d(e_h)$  の局所変数との共分散  $C_x[D(e_j^\wedge), d(e_h)]$  も求めておく。

3-2°: 式 (10) に基づいて  $D(P_{<j}^\wedge)$  の分布を計算する。その際、各枝  $f_{j+1,b}=(u_{j+1,b},v_{j+1}) \in A^-(v_{j+1})$  の始点  $u_{j+1,b}$  に対して、共分散  $C_x[D(P_{<j}^\wedge), D(u_{j+1,b})]$  を求める。また、 $P_{<j}$  上の各枝  $e_h=(v_{h-1},v_h)$  ( $1 \leq h < j$ ) の遅延  $d(e_h)$  の局所変数との共分散  $C_x[D(P_{<j}^\wedge), d(e_h)]$  も求めておく。

4°:  $j=k$  に対して 3° と同じ操作を実行し、 $D(P_{<k}^\wedge)=D(P^\wedge)$  の分布と共分散を計算する。ただし、 $f_{k+1,b}=(u_{k+1,b},v_{k+1})$  の始点  $u_{k+1,b}$  に対する操作は不要である。

<<C 確率  $CPr[P]$  の計算 >>

5°:  $D(P)$  の分布を計算しながら、式 (4) の C 確率  $CPr[P]$  を計算する。

このアルゴリズムには、分布を正規分布と仮定すること以外近似計算は含まれておらず、与えられたパス  $P$  の C 確率  $CPr[P]$  を、定義に従って忠実に計算している。そのため、計算量は  $O(|N| \cdot |A|)$  であり、これを全てのパスに対して実行することは効率的ではない。しかし、正規分布に基づいた SSTA を用いて計算した C 確率がどの程度の精度を持つかを検証するため、このアルゴリズムを用いる。

#### 4. C 確率の精度検証

上記のアルゴリズムによって得られる C 確率の精度を検証するため、ISCAS'85 ベンチマーク回路に対して、10 万回のモンテカルロ法を実行し、クリティカル遅延を与えることが多い上位 5 本のパス (path1 ~ path5) を選出した。

表 1 に典型的な結果を取り出して示す。表の MC,  $CPr$  それぞれはモンテカルロ法および提案手法による確率で、C 確率の 100 倍を示す。

c7552 の path1 において、確率の差が 6.1% と比較的大きくなっている。これは正規分布を用いた SSTA が持つ誤差が、確率計算によって拡大されたためである。ISCAS'85 ベンチマーク回路に対する SSTA のモンテカルロ法に対する誤差は小さく [9]、今回の実験でも、平均で高々 0.1%、標準偏差で高々 1% であった。しかし、この誤差が確率を大きく変える。現在の正規分布を用いた演算では確率の値として正確な値を計算することは困難である。従って、確率の値として正確な値を計算することは、正規分布を用いている限り困難であろう。我々は、混合正規分布を用いて SSTA の誤差を削減する手法を提案している [11] が、その有効性の検証は今後の課題である。

表 1: モンテカルロ法で得られた上位 5 本のパスの C 確率 (%)とその誤差 (CPr-MC)

circuit	c499			c3540			c5315			c7552		
	MC	CPr	誤差	MC	CPr	誤差	MC	CPr	誤差	MC	CPr	誤差
path1	0.06	0.11	0.05	2.9	4.0	1.1	10.4	9.1	-1.3	41.2	35.1	-6.1
path2	0.06	0.39	0.33	2.8	4.8	2.0	10.3	8.9	-1.4	9.4	9.8	0.4
path3	0.06	0.35	0.29	2.8	4.8	2.0	10.3	8.9	-1.4	9.2	9.6	0.4
path4	0.06	0.11	0.06	2.7	4.0	1.3	10.3	9.1	-1.1	9.1	9.5	0.4
path5	0.06	0.19	0.13	2.5	2.9	0.4	8.5	8.0	-0.5	9.0	9.5	0.5

表 2 に, C 確率の降順にパスを並べたとき, path1~path5 が第何番目になったかを示す. 例えば, c3540 の path1 はモンテカルロ法でクリティカル遅延を与えた回数が最大であったが, C 確率の大きさは全パス中 3 番目であることを示す.

表 2 より, c499 以外の回路では, モンテカルロ法で上位のパスが C 確率でも上位になっていることが分かる. c499 の回路は同程度の遅延を持つパスが多数あり, クリティカルパスになる確率が最大のパスでも, その確率は 0.06%であり, 実験では, 確率が 0.01%以上のパスが 3,000 本以上も見出されたため, 順位が大きく入れ替わる. C 確率が数%程度のパスがあるような回路に対しては, モンテカルロ法による上位のパスが C 確率でも上位のパスになっている. ちなみに, モンテカルロ法でクリティカル遅延を与えた回数の多い上位 10 本のパスの内, c3540, c5315 においては 9 本が, c7552 においては 10 本のパスが C 確率でも上位 10 本のパスになっていた. これは, ISCAS'85 ベンチマーク回路の C 確率の最大値が 0.029 以上のパスを持つ全ての回路において成り立つ. これより, C 確率は, 回路を選べば, パスを順位付けする際に利用できることが分かる.

表 2: C 確率による順位

circuit	c499	c3540	c5315	c7552
path1	2081	3	1	1
path2	57	1	3	2
path3	897	1	3	3
path4	2113	3	1	5
path5	1185	8	5	4

## 5. C 係数の精度評価

以下では, C 係数が修正候補素子を見出す評価指標として利用できるかを検証する.

各枝  $e$  に対する C 係数  $R_x[e]$  を計算するには, 点  $v$  の遅延  $D(v)$  を計算する際, パス上の枝  $e$  に対して, 局所変数の共分散  $C_x[D(v), d(e)]$  を計算しておく必要がある. これは, SSTA[9]の実行時に行うことができ, C 確率計算における操作 1° の  $C_x[D(v), d(e_j)]$  の計算を全てのパス上の枝  $e$  に対して行うだけである. その計算の概略は下記のようなものである.

点  $v$  の遅延  $D(v)$  に枝  $e=(v,w)$  の遅延  $d(e)$  を加算して, 遅延  $Dve = D(v)+d(e)$  を求める和の演算に関して,

$$C_x[Dve, d(e)] = s_x[e] \quad (11)$$

であり,  $e$  以外の枝  $e'$  で  $D(v)$  と  $C_x[D(v), d(e')] \neq 0$  なる共分散

の  $d(e')$  を持つ枝に関して,

$$C_x[Dve, d(e')] = C_x[D(v), d(e')] \quad (12)$$

である. また, 点  $w$  の遅延  $D(w)$  を,  $w$  に入ってくる各枝  $e_b=(v_b, w)$  ( $1 \leq b \leq |A^-(w)|$ ) に対して, 遅延  $Dve_b$  を用いて計算する Max 演算では,  $D_1(w)=Dve_1$  とした後, 各  $2 \leq b \leq |A^-(w)|$  に対して,  $D_b(w)=\text{Max}[D_{b-1}(w), Dve_b]$  を計算するから, 共分散  $C_x[D_b(w), d(e)]$  は次式となる.

$$C_x[D_b(w), d(e)] = C_x[D_{b-1}(w), d(e)] \cdot \Pr[D_{b-1}(w) \geq Dve_b] + C_x[Dve_b, d(e)] \cdot (1 - \Pr[D_{b-1}(w) \geq Dve_b]) \quad (13)$$

C 係数の性能を評価するため, 枝  $e$  の遅延  $d(e)$  の平均を  $\Delta\%$  減少させたときのクリティカル遅延  $D(t)$  の  $\mu+3\sigma$  値 ( $D(t)$  の CDF が 99.87% となる  $D(t)$  の値) の減少量を  $\mu\Delta[e]$  と書き,  $d(e)$  の標準偏差を  $\Delta\%$  減少させたときのそれを  $\sigma\Delta[e]$  と書く.  $\sigma\Delta[e]$  は,  $d(e)$  の標準偏差 (分散) の変化に対する変化量という点で, これまでの感度とは異なる概念で,  $\sigma\Delta[e]$  が最大の枝  $e$  は,  $d(e)$  の分散を縮小することにより  $D(t)$  の分散を減少させる上で最も効果のある枝を示す.

C 係数の効果を調べるため, 各枝  $e$  の遅延  $d(e)$  の標準偏差を 50% 減少させたときの  $\sigma\Delta[e]$  の値を調べた. すなわち, 前節の実験において, 各枝遅延の標準偏差を平均の 10% としていたところを, 着目している枝  $e$  だけ 5% として, SSTA を実行した. その際, 大域変数および局所変数の感度の比率は前節の実験と同じである. 図 2 に結果の一部を示す. 比較のため, 枝を C 係数の降順に並べた場合と,  $\Pr_c[e]$  の降順に並べた場合の両方を示す. これより, C 係数の降順に並べた方が右肩下がりになっており,  $\sigma\Delta[e]$  を知る上で有効であることが分かる.

図 3 に, 各枝  $e$  の遅延  $d(e)$  の平均を 50% 減少させたときの  $\mu\Delta[e]$  を示す. これより, C 係数は平均を改善する際の指標としては有効ではないことが分かる.

次に, C 係数が大きい上位 5 本の枝を選出し, これら全ての枝の分散を同時に 50% 減らしたとき (分散改善), クリティカル遅延  $D(t)$  の  $\mu+3\sigma$  値が減少した量を調べ, この量が,  $\Pr_c[e]$  の大きい上位 5 本の枝に対して同じことした場合の減少量に対してどの程度の割合であるかを求めた. その結果を表 4 に示す. これからも C 係数の有効性が分かる. 表 4 には, 平均を 50% 減らしたとき (平均改善) の割合も示しているが, これに関しては, C 係数の優位性は無く, [6,7] の手法を検討する必要がある.

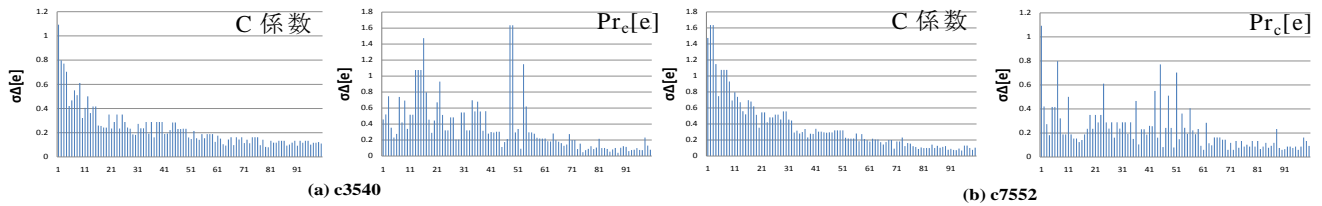


図 2 :  $\Delta=50\%$  のときの  $\sigma\Delta[e]$  の値 (C 係数順と  $Pr_c[e]$  順)

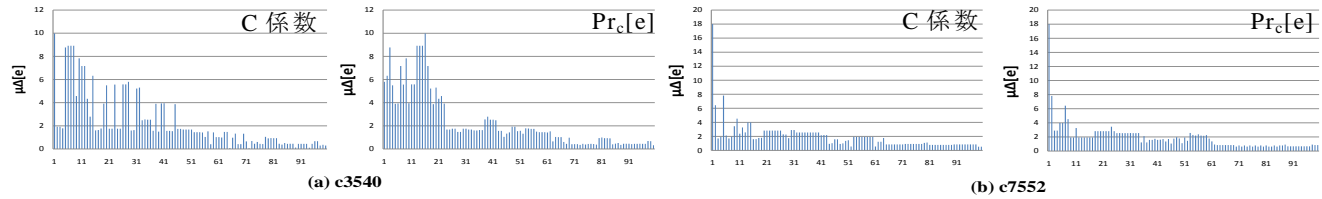


図 3 :  $\Delta=50\%$  のときの  $\mu\Delta[e]$  の値 (C 係数順と  $Pr_c[e]$  順)

表 4 : C 係数に依る上位 5 つの枝の改善割合

circuit	分散改善	平均改善
c1355	34.8%	140.4%
c1908	168.6%	-14.6%
c2670	14.5%	-4.9%
c3540	204.6%	-28.6%
c5315	36.0%	26.9%
c6288	9.5%	9.4%
c7552	60.3%	-79.1%

## 6. 結論

本文では、統計的設計のための2つの指標として、C 確率と C 係数を考え、これらの性能を評価した。

C 確率に関しては、クリティカルパスになりやすさの順位付けとしての有効性は認められた。しかし、確率の値としての精度には問題がある。また、C 係数に関しては、素子遅延のばらつき(分散)を減少させる際には、クリティカル遅延の  $\mu+3\sigma$  値を減らす上で有効であるが、平均を減少させる上では問題があることが分かった。

今後、混合正規分布[11]を用いて精度の向上を計れるかの調査や、より有効で効率的に計算できる指標の構築など今後の課題である。

## 謝辞

本研究を遂行するに当たり、様々な御指導を頂いた 築山修治先生に深く御礼を申し上げます。

## 文献

- [1] A.Srivastava, D.Sylvester, and D.Blaauw, Statistical Analysis and Optimization for VLSI: Timing and Power, Springer, 2005
- [2] D.Blaauw, K.Chopra, A.Srivastava, L.Scheffer, "Statistical timing analysis: From basic principles to state of the art,"

IEEE Trans. CAD/ICAS, vol.27, no.4, pp.589-607, 2008.

- [3] A.Krstic, L.Wang, K.Cheng, J.Liou, M.Abadir, "Delay defect diagnosis based upon statistical timing models – The first step," Proc. DATE, pp.328-333, 2003.
- [4] L-C.Wang, J-J.Liou, and K-T.Cheng, "Critical path selection for delay fault testing based upon a statistical timing model," IEEE Trans. CAD/ICAS, vol.23, no.11, 2004.
- [5] C.Visweswariah, K.Ravindran, K.Kalafala, S.G.Walker, D.K.Beece, J.Piaget, N.Venkateswaran, J.G.Hemmett, "First-order incremental block-based statistical timing analysis," IEEE Trans. CAD/ICAS, vol.25, no.10, pp.2170-2180, 2006.
- [6] X.Li, J.Le, M.Celik, L.Pileggi, "Defining statistical sensitivity for timing optimization of logic circuits with large-scale process and environmental variations," Tech. Digests ICCAD, pp.844-851, 2005.
- [7] H-S.Park, W.Kim, D-J.Hyun, Y-H Kim, "Timing criticality for timing yield optimization," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E91-A, no.12, pp.3497-3505, 2008.
- [8] C.E.Clark, "The greatest of a finite set of random variables," Operation Research, vol.9, pp.85-91, 1961.
- [9] 霜山涉, 築山修治, 高木勇輔, "パス遅延の相関を考慮した統計的静的遅延解析手法の実装とその評価", 電子情報通信学会和文論文誌 A, vol.J90-A, no.11, pp.826-838, 2007.
- [10] A.Agarwal, D.Blaauw, and V.Zolotov, "Statistical timing analysis for intra-die process variations with spatial correlations," Dig. Tech. Paper ICCAD, pp.900-907, 2003.
- [11] S.Takahashi and S.Tsukiyama, "A new statistical timing analysis using Gaussian mixture models for delay and slew propagated together," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E92-A, no.3, 2009. (掲載予定)