

カオス結合系におけるネットワーク構造 Structures of networks in coupled chaotic systems

物理学専攻 佐藤 光隆
Mitsutaka Sato

1 本研究の概要

本研究では二つのネットワークモデルにおいてロジスティック写像を結合させ、それによって生じる時空カオスをロジスティック写像のパラメータや拡散の強さの変化による違いを調べた。本研究で使用したネットワークモデルの一つはワッツとストロガッツによって提案されたスモールワールド・ネットワーク、もう一つは一般化ランダムグラフである。

また、そうした結果を後述する結合写像格子、Coupled map lattice (CML) や大域結合マップ、Globally coupled map (GCM) [1] と比較し、時空カオスの振る舞いがネットワーク構造によってどのような影響を受けるかを調べた。

2 カオス結合系

2.1 結合写像格子

基本的なCMLについて考える。カオスとしてはロジスティック写像 $f(x) = 1 - ax^2$ を用いる [2]。この写像は a が大きくなるにつれて周期 2 の安定解、周期 4、周期 8、... を持ち、最終的に $a = 1.4011\dots$ で倍周期化が集積し、それ以上の a の値ではカオスが発生する。

また、格子点同士の相互作用としては最近接点の平均を用いる。よってまとめると、

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}(f(x_n(i+1)) + f(x_n(i-1))) \quad (1)$$

となる。ここで、 $x_n(i)$ は格子点 i における時刻 n での値で、 ε は結合の強さを表す結合係数である。また、 $x_n(i) = x_n(i+N)$ という周期的境界条件をかしている。ここで N は格子点の数である。

この写像はロジスティック写像の非線形性を表すパラメータ a と結合の強さを表すパラメータ ε によって、さまざまな様相を見せる。それは凍結カオス、パターン選択によるカオスの抑圧、欠陥のブラウン運動、時空間欠性、伝搬波などと呼ばれるものである。

2.2 GCM

ここまで扱ってきたCMLにおいて相互作用は最近接格子点とのものだけであった。しかしGCMでは逆に全ての格子点の平均場から相互作用を受けるものとする。よって写像は式 1 を変形して、

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n(j)) \quad (2)$$

となる。この系では次のような状態が見られる。全ての格子点が同期して振動するコヒーレント相、数個のアトラクターがほとんどの状態を占める秩序相、初期条件により様々なアトラクターが並存する部分秩序相、各格子点が独立に振動する非同期相などである。

3 スモールワールド・ネットワーク

3.1 スモールワールド・ネットワークの特徴

スモールワールドを特徴付ける上で重要な三つの量が存在する。それは次数、平均格子点間距離、クラスター係数のことである [3, 4]。

次数とは一つの格子点から出ている枝の本数のことであり、ここでは k を用いる。次数について重要なことは現実のネットワークの分布 $\{p(k)\}$ において、 $\{p(k)\} \sim k^{-\gamma}$ というベキ則が見られるということである。この分布はインターネットの構造、生態系の被食捕食関係、映画俳優の共演ネットワークなどに見られる。ベキ則はスケールフリーとも呼ばれ、指数分布などに比べてずいぶん大きい次数の格子点が多く存在するという意味がある。

平均格子点間距離 L とは、任意の格子点から別の格子点へ至るまでに通る枝の本数の平均のことである。スモールワールド・ネットワークではこの平均格子点間距離が非常に小さいという特徴が見られる。

クラスター係数 C とは格子点同士の関係の濃密さを表す指標である。具体的には親しい友人同士とは付き合いに掛ける時間が多くなり、また友人の友人はやはり友人であるといった傾向のことである。この係数は基本的にネットワーク内のサイクルの状態によって定義される。

3.2 WSモデル

WSモデルとはワッツとストロガッツによって提案されたスモールワールド・ネットワークである。このモデルはまず、第一に N 個の頂点を輪になるように置き、それぞれの頂点を k を偶数として左右に $k/2$ ずつの枝を繋ぐ。その枝をある確率 p でランダムな頂点と繋ぎ換える。その繋ぎかえられた枝をショートカットという。ショートカットが既に存在している格子点には新たなショートカットは繋がらないものとする。図 1 はそれを模式的に表したものである。

このネットワークはショートカットの働きにより平均格子点間距離 L はかなり小さいものとなり、次のような式で近似できる。

$$L \sim \begin{cases} \frac{N}{2k} & (\frac{Nkp}{2} \ll 1) \\ \frac{\log Nkp}{k^2 p} & (\frac{Nkp}{2} \gg 1) \end{cases} \quad (3)$$

また、クラスター係数 C は p が小さいときには次のように近似できる。

$$C \sim \frac{3k-6}{4k-2}(1-p)^3 \quad (4)$$

これらの値から、スモールワールド・ネットワークと呼ばれる小さい L と大きい C を持ったネットワークは、 $0.01 < p < 0.1$ 程度のときに得られることが分かっている。また、そのときのショートカットの本数は $Nkp/2$ となる。

3.3 一般化ランダムグラフ

一般化ランダムグラフとは、頂点から出る枝の数の分布が固定されたある分布 $\{p(k)\}$ に従うグラフである。枝の数の分布 $\{p(k)\}$ をさきに固定し、ある頂点からその分布に従ってサイコロを振り、その頂点から伸びる枝の本数を決める。その枝の先にそれぞれ新たな頂点を作り、その頂点についてまた同じことをして枝を伸ばしていく。このとき新しい枝が古い頂点に繋がることはない

します。また、格子点の数は有限なので必然的に1つの格子点としか繋がっていない端が存在する。このグラフは平均格子点間距離 L に関しては、

$$L \sim \log N \quad (5)$$

となっていて小さい L は実現できている。しかし、クラスター係数 C に関してはグラフ内にサイクルが存在していないためうまく定義できない。

このグラフの模式図は図2のようになる。

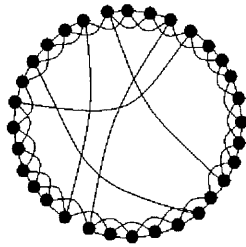


図 1: WSモデル $k = 4$ のもの。

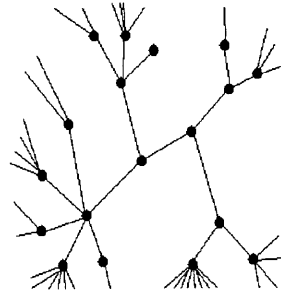


図 2: 一般化ランダムグラフ

4 ネットワーク構造を持つカオス結合系

4.1 CMLとの比較

3章で述べたネットワーク構造においてロジスティック写像を結合させその時間発展を調べた。この際に式1を変形して、次のようにした。

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{k_i} \sum_{(i,j)} f(x_n(j)) \quad (6)$$

ここで、 k_i 、 $x_n(j)$ はそれぞれ格子点 i の次数、一本の枝を渡って到達できる格子点である。以下ではこの系を使って時間発展を計算している。

4.2 WSモデル

ロジスティック写像を結合するにあたって上述のWSモデルとは違い、とある確率でランダムに枝を増やすこととした。 p がそれほど大きくない範囲においては先ほどの近似で L と C を記述できる。新たに増やした枝、つまりショートカットの本数を、 $0.01 < p < 0.1$ 程度の範囲で調べてみた。スモールワールドの現象の効果により早い段階で同期などの現象が起きることが期待されたが、通常のカMLの $x_n(i)$ の時間発展と比較して目立った影響は出なかった。

4.3 一般化ランダムグラフ

この系の時間発展ダイアグラムでは、極端な値でない範囲の γ による変化は、任意のパラメータ a, ε によって発生する時空カオスの様相が多少前後するというものだったため、もっともベキ則に即していると思われる $\gamma = 3$ を採用した。

また、このグラフは γ の大きい極限では一次元のCMLと同じものとなり、 γ の小さい極限ではGCMと同様のものとなる。

この系の時間発展の様子はGCMと似た様相を示す。ここで格子点の番号に関してはこれまでと違い、グラフを生成する段階で適当に割り振ったものなので、数字が近いもの同士がグラフの構造で近いわけではない。

ここで部分秩序相に相当すると思われる状態に注目し、実際のネットワークの構造で同期している格子点の場所を調べた。予想では特に次数が高い格子点の周辺で同期が起こっていると考えていた。しかし、同期している部分はネットワーク内に転々と分散していることが分かった。

また、その同期している部分はほとんどネットワーク構造に依存していることが分かった。これは初期条件を変化させても、同期している格子点がほとんど変わらなかったこと。パラメータ a, ϵ を多少前後させても、同じような部分秩序相となる範囲においては、やはり同期する格子点がほとんど一致したことから分かった。

5 まとめ

本研究では二つのネットワークモデルにおいてロジスティック写像を結合させ、それによって発生する時空カオスの様相を調べた。

WSモデルに関しては、期待されていたものは少ないショートカットでのCMLからGCMへの遷移であった。しかし結果としてはほとんどCMLと変化がない時空カオスが発生していた。これはショートカットによるスモールワールド効果に比べて、ロジスティック写像の非線形性が強かったためだと考えられる。

一般化ランダムグラフに関しては、このグラフは γ の大きい極限では一次元のCMLと同じものとなり、 γ の小さい極限ではGCMと同様のものとなると考えられたことから、CMLとGCMの中間的な時空カオスが見られると予想された。結果はGCMにかなり近い時空カオスが発生していた。しかし、この系における部分秩序相の同期現象は、初期条件に同期する格子点が依存するGCMと違い、ネットワークの構造に依存しているということが分かった。さらにその同期している部分はネットワーク全体に散らばって配置されており、構造的な関連性が発見できなかった。この遠距離の格子点間の同期がどのような理由で発生しているかを考えるのが今後の課題である。

参考文献

- [1] 金子邦彦, 津田一郎, 複雑系のカオスのシナリオ, 朝倉書店, 1996
- [2] 鈴木いく雄, Mathematica で学ぶシリーズ4 カオス入門, コロナ社, 2000
- [3] 増田直紀, 今野紀雄, 複雑ネットワークの科学, 産業図書, 2005
- [4] D.Watts (著), 栗原聡, 佐藤進也, 福田健介 (訳), スモールワールドーネットワーク構造とダイナミクス, 東京電機大学出版局, 2006