

パス追跡回路—式を回路で記述する SPICE 指向型数値解析法—

Path Following Circuits—SPICE-Oriented Numerical Methods
Where Formulas Are Described by Circuits—

電気電子情報通信工学専攻 黒木 渉

Wataru KUROKI

1. まえがき

SPICE は 1970 年代に開発された回路シミュレータであり、オープンソースであることから、多くの改良や機能拡張が加えられ、開発から 30 年たった今でも回路シミュレータのデフォルトスタンダードとして世界中で使われている。SPICE は大規模で非線形性の高い LSI に対処できるよう、様々な効率化手法が導入された非常に優れたソフトウェアであるため、適用対象を回路だけに限定するのは大きな損失であると考えられる。

本研究では「数値解法の式を回路で記述し SPICE で解く」という逆転的発想に基づく方法論である SPICE 指向型数値解析法 (図 1) とその中核的アイデアであるパス追跡回路を考える。例えば、ホモトピー法は幅広い分野に応用できる非線形方程式の数値解法で、その魅力は大域的収束性 (必ず解に収束する性質) にある。しかし、大規模で複雑な問題にも対処できる「高度な」ホモトピー法を実現しようとする場合、かなりの専門的知識と複雑なプログラミングが必要となるため、非専門家や初心者には敷居の高い方法であった。しかし、パス追跡回路のアイデアを用いることにより、SPICE 上で「かなり高度なホモトピー法を」、「ホモトピー法の知識があまりなくても」、「複雑なプログラミングを行うことなく」、「手軽に」、「無料で」、「広範囲の問題に」適用することができる。

本研究は大別すると二つに分けられる。まず、パス追跡回路のアイデアを様々な理工学問題に対して拡張し、SPICE の機能を拡大する。次に、理論的には興味深いが実用化されなかった様々な回路解析法を、パス追跡回路を用いて実用化への道を開く。本稿では紙面の都合上、これまで行った研究のいくつかを紹介するが他については文献 [1]~[12] を参照して頂きたい。

2. パス追跡回路を用いたホモトピー法

ここではまず、パス追跡回路を用いたホモトピー法について説明する [1]~[4]。非線形方程式 $f(x) = 0$ の解をホモトピー法で求める場合、この方法では x^0 を解とする別の方程式 $f^0(x) = 0$ を考え、パラメータ t を導入し、 (x, t) を変数とする方程式を考える。また、 $(x^0, 0)$ を始点としたときのパスの弧長を s とする弧長の微小変化に関する方程式を考え、これら二つの式を連立させた微分代数方程式

$$h(x, t) = tf(x) + (1-t)f^0(x) = 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1 \quad (2)$$

を $(x^0, 0)$ から始めて数値積分することによりパスを追跡することができる。

このような作業を SPICE 上で実現するには、式 (1) を図 2 のような回路で記述し、式 (2) を図 3 のような回路で記述する。 G は SPICE の制約を満たすためのダミー抵抗で、本研究では $G = 10^{-12}$ としている。したがって、これらの回路を SPICE で過渡解析する事により式 (1) のパスを追跡する事ができる。但し、弧長 s は過渡解析における時間に対応する。図 3 のような回路をパス追跡回路とよぶ。

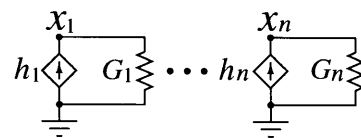


図 2 式 (1) を記述する回路

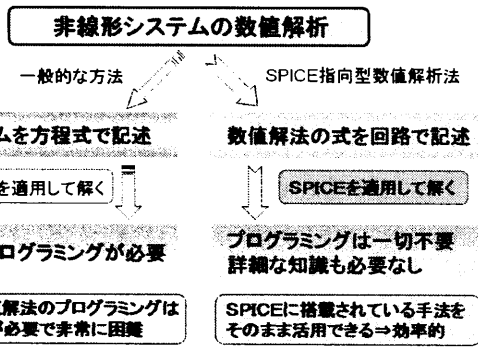


図 1 SPICE 指向型数値解析法の概略図

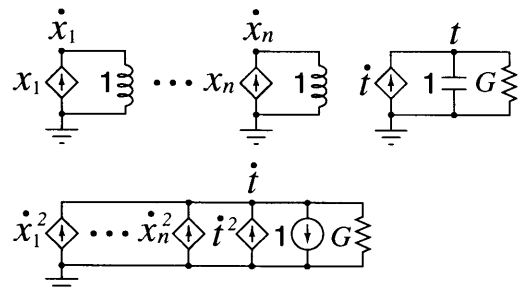


図 3 式 (2) を記述する回路

3. パス追跡回路による様々な理工学問題の解法

本節ではパス追跡回路を不動点問題，線形計画問題，非線形計画問題に適用する．この際には提案手法である新たなパス追跡法やメモリの削減手法なども導入されているが，詳細については紙面の都合上省略する．

3.1 不動点問題

文献 [1]～[3] に示されている不動点問題に適用し，問題 2，3 の x_1 のパスをそれぞれ示す．

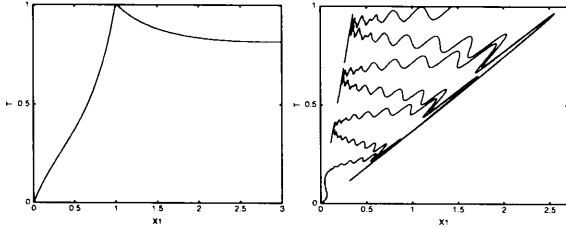


図 4 不動点問題 2, 3 の変数 x_1 のパス

問題 1 は 40000 変数の解析に成功し，この際の計算時間は 10 時間程度であり，5000 変数ならば 576 秒と非常に短時間で解析を行えている．問題 2 では 1800 変数までの解析に成功したが，この問題は図 4 に示すよう $t = 1$ でパスが折れ曲がる非正則問題である．本手法はこのような問題に対しても正常に動作することがわかる．問題 3 では図 4 に示すよう非常に複雑なパスが得られたが，本手法はこのようなパスに対しても効率良く追跡することが可能である．すなわち，SPICE には stiff な回路方程式に対応できるような様々な手法が導入されているので，本手法は非線形性の強い問題やパスが複雑な形状となる問題に対してもロバストな性質を持つことがわかる．

3.2 線形計画問題

線形計画問題に対するインフィージブル主双対内点法は次のような非線形方程式に対するホモトピー法と等価であることが示されている．

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} - \mathbf{b} - (1-t)(\mathbf{Ax}^0 - \mathbf{b}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} - \mathbf{c} - (1-t)(\mathbf{A}^T \mathbf{y}^0 + \mathbf{s}^0 - \mathbf{c}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Xs} - (1-t)(\mathbf{X}^0 \mathbf{s}^0) &= \mathbf{0} \\ t \geq 0, (\mathbf{x}, \mathbf{s}) &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3)$$

したがってこの式のパスを追跡することで線形計画問題を解くことができる．

数値例として標準的なベンチマーク問題である Netlib 問題集から制約条件 221，249 変数の問題 (BRANDY)，制約条件 1152，5427 変数の問題 (SHIP12L) に本手法を適用したときの目的関数と x_1 のパスを示す．計算時間は BRANDY が 105 秒で SHIP12L は 2018 秒であった．これらの問題はすべて現実問題から派生した線形計画問題であるが，その中でも SHIP12L は大規模クラスに属し，式 (3) の形にしたときは 12108 変数という非常に大規模な問題となる．しかし，本手法はわずか 30 分程度で解析を行うことができた．

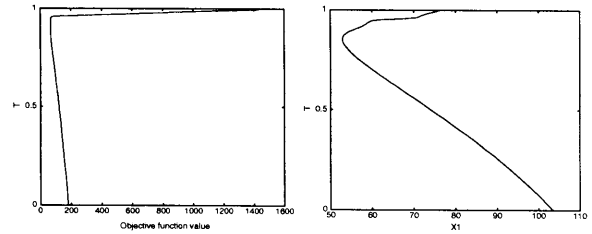


図 5 BRANDY の目的関数と変数 x_1 のパス

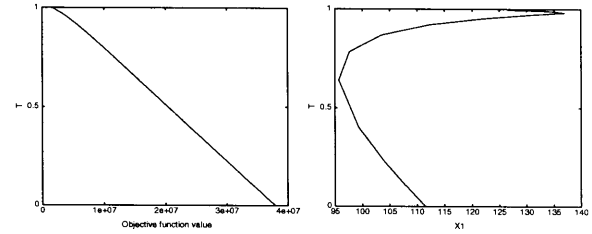


図 6 SHIP12L の目的関数と変数 x_1 のパス

3.3 非線形計画問題

非線形凸計画問題

$$\begin{aligned} \text{目的関数 } f(\mathbf{x}) &\rightarrow \text{最大化} \\ \text{制約条件 } g_j(\mathbf{x}) &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \\ h_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (4)$$

に対する Kuhn-Tucker 方程式に不動点ホモトピー法を適用すると，次のようになる．

$$\begin{aligned} -(1-t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + t \nabla f(\mathbf{x})^T \\ + \sum_{j=1}^r \alpha_j^+ \nabla g_j(\mathbf{x})^T + \sum_{j=1}^s \mu_j \nabla h_j(\mathbf{x})^T &= \mathbf{0} \\ \alpha_j^- - g_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \\ h_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (5)$$

ここで， α_j^+ ， α_j^- は与えられた実数 α_j に対して

$$\alpha_j^+ = [\max\{0, \alpha_j\}]^k, \quad \alpha_j^- = [\max\{0, -\alpha_j\}]^k \quad (6)$$

で定義される．ただし， k は正の整数である．したがって，この式のパスを追跡することで非線形計画問題を解くことができる．

ここではベンチマーク問題として非常に有名な Rosen-Suzuki 問題 [3] の目的関数と x_1 のパスを図 7 示す．このパスは急激な変化を起こしているが，本手法は効率良く解くことができる．

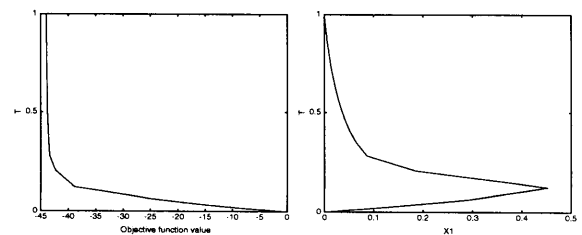


図 7 Rosen-Suzuki 問題の目的関数と変数 x_1 のパス

4. 可変利得ニュートンホモトピー法の SPICE 上への実装

回路シミュレーションにおいて、直流動作点解析は全ての解析の出発点となる重要なもので、この解析に失敗すると後続する他の特性の解析も不可能になる。SPICE では直流動作点の求解においてニュートン法を使用するが、この方法は非収束問題を抱えている。この問題を改良した方法にホモトピー法があるが、その代表的なものには不動点ホモトピー (FPH) 法、ニュートンホモトピー (NH) 法、ニュートン不動点ホモトピー (FPH) 法、可変利得ホモトピー (VGH) 法となっている。しかし、これらの方法は直流動作点解析から派生する非線形方程式に対して大域的収束性が保証されるが、計算効率においてはそれぞれ問題点を抱えている。そのため、これらのホモトピー法はそれぞれさらなる改良が必要となる。

そこで、近年提案された方法に可変利得ニュートンホモトピー (VGNH) 法がある [8]。この方法はこれまでのホモトピーのすべての長所もち、欠点が解消された方法となっており、すべての価値観において非常に優れた方法となっている。

しかし、この方法を SPICE などのシミュレータ「内部」に実装することはかなりの専門的知識と複雑なプログラミングが必要となるため、非専門家や初心者には敷居の高い方法となる。そこで、本稿ではパス追跡回路を用いて VGNH 法を「SPICE 上」に実装する方法を提案する。この方法は以下のような特徴を持っている。

- 解くべき回路のネットリストにわずかな修正を施すだけで実現が可能
- プログラミングが一切不要
- SPICE に搭載された様々な手法をそのまま活用できる
- VGNH 法に関する知識があまりなくても手軽に利用することができる

したがって、本手法により SPICE 上で簡単に VGNH 法を利用した直動作点解析を行うことが可能となる。

VGNH 法は微分代数方程式

$$f(x) + (1-t)\tilde{f}(x) - (1-t)(f(x^0) + \tilde{f}(x^0)) = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{dv_{be_i}}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 1 \quad (8)$$

を $(x^0, 0)$ から数値積分することによって実現できる。ただし m は回路に含まれるトランジスタの数、 v_{be_i} は i 番目のトランジスタのベース・エミッタ間電圧を表す。

したがって、VGNH 法を SPICE 上に実現するには式 (7)、(8) を回路で記述し、過渡解析を施せばよい。まず、式 (8) は図 2 に示されているパス追跡回路と同様の方法で実現が可能である。問題は式 (7) をどのようにして回路表現するか (特に左辺の定数ベクトル $f(x^0) + \tilde{f}(x^0)$ をどのようにして求めるか) であるが、同時に、“良い”初期値 x^0 をどのようにして求めるかも考える。

4.1 初期値と定数項の設定

提案手法の第一段階では、初期値 x^0 を求めるための初期回路を構成し、その回路を解くことにより初期値 x^0 を決定すると同時に、式 (7) の定数項の値 $f(x^0) + \tilde{f}(x^0)$ を求める。

まず、すべてのトランジスタの v_q を forward active 領域 $v_q = (V_{be}^0, V_{bc}^0)^T$ (例えば $v_q = (0.7, 0)^T$) に設定する。具体的には、図 8 に示すようにベース・エミッタ間に V_{be}^0 、ベース・コレクタ間に V_{bc}^0 なる独立電圧源を接続する。

次に $\tilde{f}(x)$ の定義より [6]~[10]、 $\tilde{f}(x)$ を足すということは回路的には各トランジスタに $\tilde{f}(x)$ を表す従属電流源を接続することを表す。すなわち、式 (7) で $t=0$ とした式

$$f(x) + \tilde{f}(x) - (f(x^0) + \tilde{f}(x^0)) = 0 \quad (9)$$

の左辺第二項の $\tilde{f}(x)$ を記述する従属電流源を各トランジスタに接続する (図 8 の J_{be} , J_{bc})。

このように各トランジスタに独立電圧源と従属電流源を接続した回路 (初期回路と呼ぶ) をまず SPICE の直流解析で解く。このとき得られた解 x^0 では $v_q = (V_{be}^0, V_{bc}^0)^T$ が成立しているため、VGNH 法の初期値 x^0 として使用することができる。

また初期回路において、もとのトランジスタ回路の部分は $f(x)$ で記述され、従属電流源 J_{be} , J_{bc} は $\tilde{f}(x)$ で記述されることから、式 (9) より、独立電圧源 V_{be}^0 , V_{bc}^0 に流れる電流 (図 8 の I_1 , I_2 に相当する) は定数項 $f(x^0) + \tilde{f}(x^0)$ を与えることが分かる。すなわち、図 8 のように構成された初期回路を直流解析で解くことにより、初期値 x^0 と定数項 $f(x^0) + \tilde{f}(x^0)$ を同時に求めることができる。以上が提案手法の第一段階である。

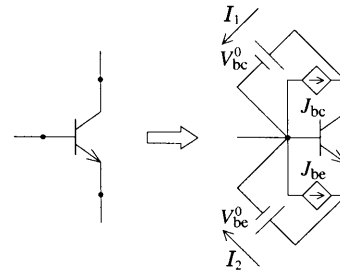


図 8 初期値と定数項を求めるための初期回路

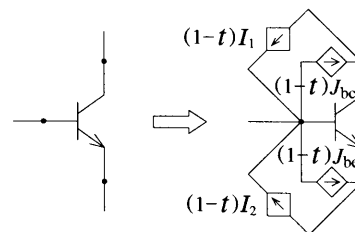


図 9 式 (7) を記述する回路

4.2 式 (7) を記述する回路

提案手法の第二段階では、式 (7) を記述する回路を構成し、式 (8) を記述するパス追跡回路と併せて SPICE で過渡解析する。

式 (7) を記述する回路は、もとの回路のすべてのトランジスタに図 9 のように従属電流源を接続することにより得られる。

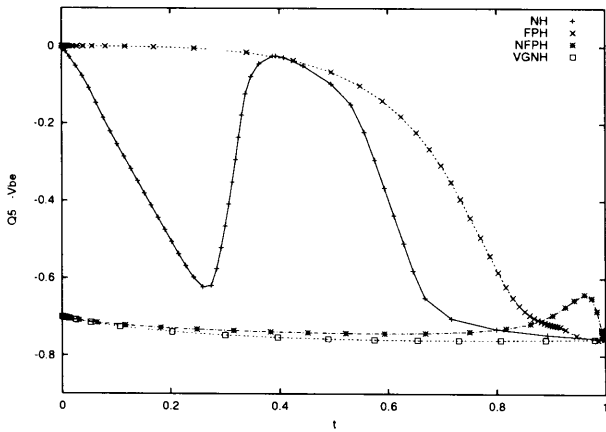


図10 基準電圧回路に本手法を適用した結果

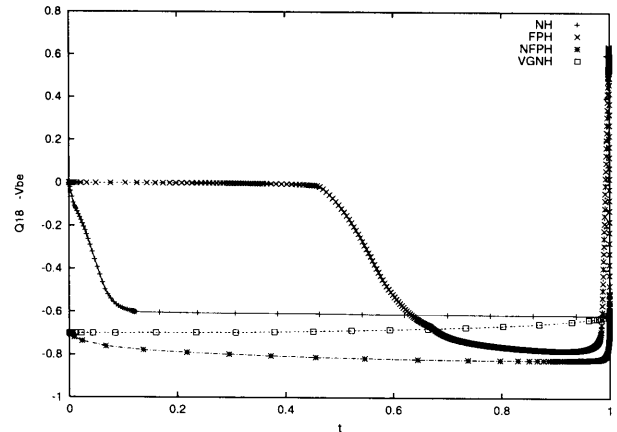


図11 高利得演算増幅器に本手法を適用した結果

すなわち、各トランジスタに式(7)の左辺第二項の $(1-t)\tilde{f}(x)$ を記述する従属電流源 $(1-t)J_{be}$ と $(1-t)J_{bc}$ を接続し、更に左辺第三項の $-(1-t)(f(x^0) + \tilde{f}(x^0))$ を記述する従属電流源 $(1-t)I_1$ と $(1-t)I_2$ を接続する。この回路が式(7)を記述することは明らかである。

4.3 提案手法

以上をまとめると、提案手法では VGNH 法を次のようにして実現する。

(1) もとの回路の各トランジスタに図8のように独立電圧源と従属電流源を接続した初期回路を SPICE の直流解析で解き、初期値 x^0 と式(7)の定数項 $f(x^0) + \tilde{f}(x^0)$ を求める。(初期回路は実質的に線形回路となるので、SPICE の直流解析で容易に解くことができる。)

(2) もとの回路の各トランジスタに図9のように従属電流源を接続したホモトピー回路と式(8)を記述するパス追跡回路を併せて SPICE で過渡解析する。但し初期値は $(x^0, 0)$ とする。これにより式(7)のパスを追跡することができるので、 $f(x) = 0$ の解 x^* が得られる。

4.4 数値例

パス追跡回路を用いて SPICE に NH 法、FPH 法、NFPH 法、並びに提案手法である VGNH 法を実装し、基準電圧回路と高利得演算増幅器に適用したときの結果を図10,11にそれぞれ示す。この図で、縦軸はあるトランジスタの v_{be} 、横軸は t を表し、またパス上のマークはステップを表している。

VGNH 法ではパスの複雑な動きや追跡の鈍化は起こらず、またパスも短く、スムーズに追跡されていることが分かる。これらより、提案手法における VGNH 法の有効性を確認できる。

5. むすび

本稿では、「数値解法の式を回路で記述し SPICE で解く」という逆転的発想に基づくパス追跡回路 (SPICE 指向型数値解析法) を利用した様々な解析方法を提案した。本手法は SPICE に搭載された様々な効率化手法をそのまま活用できるため、非常に効率的で便利な方法論となる。さらに、本手法は理論的には興味深い、実用化には至らずに埋もれてしまったような様々な方法を実用に結びつける架け橋になるものと予想される。本

稿では紙面の都合上、これまで行った研究のいくつかを紹介したが、他のものについては文献[1]~[12]を参照して頂きたい。

謝辞 本研究を行うにあたり、多大なる御指導を賜りました山村 清隆 教授に心より感謝の意を表します。

文献 (研究業績)

- [1] 黒木 渉, 大熊秀明, 山村清隆, 井上靖秋, “パス追跡回路一式を回路で記述する SPICE 指向型数値解析法—” 第17回回路とシステム軽井沢ワークショップ論文集, pp.351-356, April 2004.
- [2] 山村清隆, 黒木 渉, 井上靖秋, “パス追跡回路一式を回路で記述する SPICE 指向型数値解析法—” 電子情報通信学会技術研究報告, CAS2004-27, NLP2004-39, pp.33-38, Sept. 2004 【招待講演】.
- [3] K. Yamamura, W. Kuroki, H. Okuma, and Y. Inoue, “Path following circuits — SPICE-oriented numerical methods where formulas are described by circuits —,” IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Sciences, vol. E88-A, no.4 April 2005.
- [4] K. Yamamura, W. Kuroki, and Y. Inoue, “Path following circuits — SPICE-oriented numerical methods where formulas are described by circuits —,” Proc. IEEE 2005 International Symposium on Circuits and Systems, pp.3761-3764, May 2005.
- [5] 黒木 渉, 山村清隆, 頼 犁, “SPICE 指向型数値解析法—パス追跡回路を用いた様々な回路解析法の SPICE 上への実装—” 第18回回路とシステム軽井沢ワークショップ論文集, pp.61-66, April 2005.
- [6] 黒木 渉, 山村清隆, 井上靖秋, “パス追跡回路を用いた可変利得ニュートンホモトピー法の SPICE 上への実装,” 電子情報通信学会技術研究報告, CAS2005-28, NLP2005-41, pp.13-18, Sept 2005.
- [7] 山村清隆, 黒木 渉, 井上靖秋, “SPICE に簡単に実装できる効率的なホモトピー法,” 電子情報通信学会技術研究報告, VLD2005-39, SDM2005-158, pp.9-14, Sept 2005.
- [8] K. Yamamura, and W. Kuroki, “An efficient and globally convergent homotopy method for finding DC operating points of nonlinear circuits,” Proc. 11th Asia and South Pacific Design Automation Conference 2006, pp.408-415, Jan 2006.
- [9] 黒木 渉, 山村清隆, “SPICE に簡単に実装できる効率的なホモトピー法” 第19回回路とシステム軽井沢ワークショップ論文集 掲載決定.
- [10] K. Yamamura and W. Kuroki, “An efficient homotopy method that can be easily implemented on SPICE,” Proc. IEEE 2006 International Symposium on Circuits and Systems 掲載決定.
- [11] 黒木 渉, 山村清隆, “SPICE に簡単に実装できる効率的なホモトピー法” 2006年電子情報通信学会総大会講演論文集 掲載予定.
- [12] W. Kuroki and K. Yamamura, “A SPICE-oriented method for finding DC operating points of nonlinear circuits containing one-port macromodels,” Proc. 2006 IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems 投稿中.