非線形移流拡散方程式に対する
半群解の差分近似による構成

Construction of Semigroup Solutions to Nonlinear Convective Diffusion Equations by means of Finite-difference Approximations

数学専攻　須賀 啓子
SUGA Keiko

序論

次の非線形移流拡散方程式の $Cauchy$ 問題 (IVP) について考える.

$$\text{(IVP)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta\varphi(u) + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} F_i(u)_{x_i}, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0; \\ u(0,x) = u_0(x) \in L^1 \cap L^\infty,\ x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで, φ と $F_i (i = 1, \cdots, N)$ は次の条件 $(C1), (C2)$ を満たすとする.

(C1) φ は $\mathbb{R}^1$ 上狭義増加, 局所リプシッツ連続な関数で $\varphi(0) = 0$.

(C2) F_i は $\mathbb{R}^1$ で定義された関数で $F_i(0) = 0$ かつ,
$\dfrac{(F_i(r) - F_i(s))^2}{|(r-s)(\varphi(r) - \varphi(s))|}$ は $\mathbb{R}^1$ の各有界区間で r, s に対して有界.

本論文では, 次の差分近似によって (IVP) の半群解の構成について論じる.

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{h}[u(t+h,x) - u(t,x)] \\ \qquad = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k^2}[T_i(k) - 2I + T_i(-k)]\varphi(u(t,x)) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2k}[T_i(k) - T_i(-k)]F_i(u(t,x)), \\ T_i(k)u(x) = u(x + ke_i),\ e_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0),\ i = 1, \cdots, N. \end{cases}$$

$C_{h,m}$ は $L^1(\mathbb{R}^N)$ 上の作用素で, 各 $m > 0$ に対して安定性条件 (S) の下で, 次のように定義される.

$$C_{h,m}u = u + \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{k^2}[T_i(k) - 2I + T_i(-k)](\varphi(u) + ku) + \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{2k}[T_i(k) - T_i(-k)]F_i(u).$$

$$(S):\ h > 0,\quad Nh + \sqrt{N^2h^2 + 2NM_m h} \le k \le \frac{16}{N_m^2}$$

ただし $M_m = \displaystyle\sup_{r,s\in I_m} \frac{\varphi(r) - \varphi(s)}{r - s},\ N_m = \max_{1\le i\le N} \sup_{r,s\in I_m} \frac{|F_i(r) - F_i(s)|}{\sqrt{(r-s)(\varphi(r) - \varphi(s))}}$ である.

1　半群の構成

補題 1.1 $\varphi_k(r)=\varphi(r)+kr$ とおく. 条件 $(C1),(C2),(S)$ の下で,

$$r-2N\frac{h}{k^2}\varphi_k(r),\ \varphi_k(r)\pm\frac{k}{2}F_i(r),\quad (i=1,\cdots,N),$$

は $I_m=[-m.m]$ 上非減少である.

定義 1.1 $C_{h,m}$ の定義域 D_m を次のように定義する.
$D_m=\{u\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)\mid \|u\|_\infty\le m\}$.

定理 1.2 $A_h=\dfrac{1}{h}(C_h-I)\quad(h>0)$ に対して, 次が成り立つ. ただし $C_h=C_{h,m}$ である.

(1) A_h は D_m における消散作用素.

(2) 十分小さな $\lambda>0$ に対して, $R(I-\lambda A_h)\supset D_m$.

これより非線形半群の生成定理を使って D_m 上の半群 $\{S_h(t)|t\ge 0\}$ が生成され, $u\in D_m$ に対して

$$S_h(t)u=\lim_{\lambda\downarrow 0}(I-\lambda A_h)^{-[\frac{t}{\lambda}]}u,\quad in\ L^1$$

という指数公式が成立する.
条件 (S) の特別な場合として, $(S)'$: $h>0,\quad k=Nh+\sqrt{N^2h^2+2NM_mh}$ を定義する.

命題 1.3 十分小さな $\lambda>0$ を取って固定し, $u\in D_m$ は与えられているとする. このとき条件 $(C_1),(C_2),(S)'$ の下で次が成り立つ.

(1)

$$\lim_{h\downarrow 0}(I-\lambda A_h)^{-1}u=w,\quad in\ L^1.$$

(2) $\|w\|_p\le\|u\|_p\ (p=1,\infty)$, $\varphi(w)\in H^1$ となるような $w\in D_m$ は, すべての $f\in H^1\cap L^\infty$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left\{(w-u)f+\lambda\sum_{i=1}^{N}(\varphi(w)_{x_i}+F_i(w))f_{x_i}\right\}dx=0 \tag{1.2}$$

を満たす.

定義 1.2 作用素 A を $A=\Delta\varphi+\displaystyle\sum_{i=1}^{N}F_i(\cdot)_{x_i}$ と定義する. すなわち

$$u\in D(A),\ Au=v\in L^1\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}u\in L^1\cap L^\infty,\ \varphi(u)\in H^1\text{であり, すべての } f\in H^1\cap L^\infty\text{に対して}\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\{vf+\sum_{i=1}^{N}(\varphi(u)_{x_i}+F_i(u))f_{x_i}\}dx=0.\end{cases}$$

命題 1.4 作用素 A は次の性質をもつ.

(1) 十分小さな $\lambda>0$ に対して, $R(I-\lambda A)\supset L^1\cap L^\infty$.

(2) A は L^1 における消散作用素で, (1.2) の解 w に対して, $(I-\lambda A)^{-1}u=w$.

(3) A は $L^1 \cap L^\infty$ で稠密に定義されている.

定理 1.5 条件 $(C_1), (C_2), (S)'$ の下で, 十分小さな $\lambda > 0$ に対して作用素 $J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$ は次の性質を持つ.

(1) $J_\lambda : L^1 \cap L^\infty \to L^1 \cap L^\infty$ は $u \in L^1 \cap L^\infty$ に対して

$$\|J_\lambda u\|_p \leq \|u\|_p, \quad (p = 1, \infty).$$

(2) $u \in D_m$ に対して

$$\lim_{h \downarrow 0} (I - \lambda A_h)^{-1} u = J_\lambda u \;\; in \; L^1.$$

以上より主結果 $1, 2, 3$ が得られる.

定理 1.6 (**主結果** 1) 十分小さな $\lambda > 0$ と $u \in L^1 \cap L^\infty$ に対して, 半群 $\{S(t) \mid t \geq 0\}$ が生成され, 指数公式

$$S(t)u = \lim_{\lambda \downarrow 0} (I - \lambda A)^{-[\frac{t}{\lambda}]} u, \quad in \; L^1.$$

で与えられる.

定理 1.7 (**主結果** 2, 3) 十分小さな $\lambda > 0$ に対して, 半群 $\{S(t) | t \geq 0\}$ は次の性質を持つ.

(1) $u \in D_m$ に対して,

$$S(t)u = \lim_{h \downarrow 0} S_h(t) u, \quad in \; L^1$$

が成立する. この収束は $[0, \infty)$ の各有界区間上でで一様である.

(2) $k = Nh + \sqrt{N^2 h^2 + 2NM_m h}$ とする. $u \in D_m$ に対して,

$$S(t)u = \lim_{h \downarrow 0} C_{h_m}^{[\frac{t}{h}]} u, \quad in \; L^1$$

が成立する. この収束は $[0, \infty)$ の各有界区間上で一様である.

2 解の存在

補題 2.1 $u_0 \in L^1 \cap L^\infty, \; t > 0$ ととる. すべての $f \in H^1 \cap L^\infty$ に対して, $u(t,x) = [S(t)u_0](x)$ は次の方程式を満たす.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \{u(t,x) - u_0(x)\} f(x) dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t \{\varphi(u(r,x))_{x_i} + F_i(u(r,x))\} dr f(x)_{x_i} dx = 0 \; (*)$$

この $(*)$ は解の存在と一意性を示す際, 元になる式である.
この $(*)$ よりすべての $T > 0$ と任意の $f \in C_0^\infty(Q_T = (0,T) \times \mathbb{R}^N)$ に対して

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u f_t dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{N} (\varphi(u)_{x_i} + F_i(u)) f_{x_i} dx dt$$

が得られる. よって次の定理が得られる.

定理 2.2 $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ に対して, 式 $(*)$ の解 $u(t,x) = [S(t)u_0](x)$ は (IVP) の超関数解になる.

3　解の一意性

命題 3.1 すべての $T>0$ に対して, u, v は

$$u, v \in L^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T),\ \varphi(u)_{x_i}, \varphi(v)_{x_i} \in L^2(Q_T),\ (i=1,\cdots,N),\ Q_T=(0,T)\times\mathbb{R}^N$$

であり, $(*)$ の解とする. このとき次が成り立つ.

(1) 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\varepsilon t}(u-v)(\varphi(u)-\varphi(v))dxdt \le \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^N\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\varepsilon t}(F_i(u)-F_i(v))^2dxdt.$$

(2) $a.e.\ (t,x)\in Q_T$ 上で, $u(t,x)=v(t,x)$.

以上, 定理 2.2 と命題 3.1 (2) より, $u(t,x)=[S(t)u_0](x)$ は (IVP) の一意な超関数解であるといえる (**主結果** 4).

4　数値計算

次の退化型方程式を取り扱う.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}=\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2}\quad (Re:\text{レイノルズ数})$$

初期値は $\sin 2\pi x$, 区間 $[0,1]$ を 128 等分し, 周期境界条件とする.
ここでレイノルズ数を 400 とし, 次の 1, 2 のスキームで計算し比較する.

1　移流項, 拡散項ともに中心差分で差分近似した, 人工粘性項を加えていない差分スキーム.

2　人工粘性項を加えた (1.1) の差分スキーム.

1 の場合, 衝撃波が形成された後, 解が減衰する際に数値振動が起こってしまう. しかし 2 の場合, 最後まで安定な計算結果が得られる. 以上より, 退化型方程式の場合, 人工粘性項を加えた方が安定に計算できるとわかる.
また, 人工粘性項を加えた場合にはレイノルズ数をもっと大きくしても, 計算は安定である. これより, 人工粘性項の持つ役割の大きさが伺える.

参考文献

[1] H. Brézis and A. Pazy, Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces, J. Funct. Anal., 9 (1972), 63-74.

[2] K. Okamoto and S. Oharu, Nonlinear evolution operators assosiated with nonlinear degenerate parabolic equations, Adv, Math, Sci, Appl., 8 (1998), 581-629.

[3] M. Watanabe, An approach by difference to the porous medium equation with convection, HIROSHIMA MATH. J., 25 (1995), 623-645.

[4] 橋口 真宜, Java による Burgers 方程式の数値計算 (2002).

[5] 宮寺 功, 非線形半群 (紀伊国屋数学叢書), 紀伊国屋書店 (1977).