

量子乱流の研究

Study of Quantum Turbulence

物理学専攻 久保 渉

Wataru Kubo

近年、3次元 Gross-Pitaevskii 方程式 [1, 2] で記述される量子流体において、コルモゴロフスペクトルが確認され [3, 4]、エネルギーカスケードが起こることが分かっている。エネルギー散逸の機構としては特異構造 (渦) のつなぎ替えが必須であり、このとき、音波やケルビン波の放出によってエネルギーが散逸される [5]。また、つなぎ替えを起こすためには、特異構造の次元が深く関係している。事実、Navier-Stokes 方程式に従う古典乱流でもエネルギーカスケードには特異構造のつなぎ替えが重要な役割を果たし [6]、空間次元を変えると特異構造の次元も変化しエネルギーカスケードの強さに変化が現れている [7, 8]。そこで本研究では次元を変えて Gross-Pitaevskii 方程式をシミュレーションし特異構造の次元を特定し、エネルギー散逸との関係を見ていく。

1 基礎方程式

本研究の基礎となる Gross-Pitaevskii 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu\right) \Psi + V_0 |\Psi|^2 \Psi \quad (1)$$

である。ここで μ は化学ポテンシャル、 V_0 は粒子間に働く 2 体の相互作用の結合定数である。Gross-Pitaevskii 方程式と流体方程式とは Madelung 変換

$$\Psi = Re^{iS} \quad (2)$$

で結ばれている。密度、速度、位相をそれぞれ

$$\rho = MR^2, \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{u} = \rho \nabla \phi, \quad \phi = (\hbar/M)S$$

と定義し、式 (2) を式 (1) に代入することにより実部より連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

が得られ、虚部より Euler 方程式

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(P \delta_{ij} + \sum_{ij} \right)$$
$$P = \frac{V_0}{2M^2} \rho^2, \quad \Sigma_{ij} = -\left(\frac{\hbar}{2M}\right)^2 \rho \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial x_i \partial x_j}$$

が得られる。また Σ_{ij} は量子圧力である。

実際数値計算をしていく上では、式 (1) を規格化しておくことと便利である。規格化された Gross-Pitaevskii 方程式は

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\xi^2 \nabla^2 \Psi - \Psi + |\Psi|^2 \Psi \quad (3)$$

となる。 ξ はコヒーレンス長で渦の中心で密度が 0 になった点から平衡値へ回復するおおよその長さを与え

る。今後、巨視的波動関数は密度 ρ が $\rho(\mathbf{x}) = |\Psi(\mathbf{x})|^2$ と与えられることから $\Psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi}$ と置く

量子流体では、古典流体とは違い数種類のエネルギーを定義することができ、 E を全エネルギー、 E_{kin} を運動エネルギー、 E_{kin}^c を圧縮性運動エネルギー、 E_{kin}^i を非圧縮性運動エネルギー、 E_q を量子エネルギー、 E_{int} を相互作用エネルギーとすると

$$E = E_{kin} + E_q + E_{int}, \quad E_{kin} = E_{kin}^c + E_{kin}^i$$

の関係があり、それぞれ以下のように与えられる

$$E_{kin} = \frac{1}{N} \int \xi^2 (\sqrt{\rho} \nabla \phi)^2 dx$$
$$E_{kin}^c = \frac{1}{N} \int \xi^2 (\sqrt{\rho} \nabla \phi)_{c,i}^2 dx$$
$$E_q = \frac{1}{N} \int \xi^2 (\nabla \sqrt{\rho})^2 dx$$
$$E_{int} = \frac{1}{2N} \int \rho^2 dx$$

ここで、 N は全粒子数、また $\nabla \times (\sqrt{\rho} \nabla \phi)_c = 0$ 、 $\nabla \cdot (\sqrt{\rho} \nabla \phi)_i = 0$ である、我々が興味のある量は、渦のエネルギーを表している非圧縮性運動エネルギー E_{kin}^i でありコルモゴロフスペクトルもこの量で確認されている。

次に特異構造がつなぎ替えが起こるための条件を与える。空間次元を d 、特異構造の次元を d_s とすると

$$2(d_s + 1) \geq d + 1 \quad (4)$$

の関係を満たさなければつなぎ替えは起こらない。ここで左辺は、 $d_s + 1$ は特異構造の時空間での次元を表し、2 つの特異構造の衝突なので 2 を掛けている。右辺は、特異構造が存在している時空間を表している。

2 シミュレーション

シミュレーションは式 (3) に対して行い、境界条件には周期 2π の周期境界条件を課している。空間処理には collocation 法を用い、時間積分には 4 次の Runge-Kutta 法を用いる。初期条件は、巨視的波動関数 $\Psi = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}$ の密度は全空間で $\rho = 1$ と一定とし、位相 φ を間隔 L_0 おきに乱数で $-\pi$ から π の間の値を指定し、残りの格子点ををスプライン補間によって補間した。また、渦芯のサイズを決めるパラメータ ξ は格子間隔を Δ とすると $\xi \sim 4\Delta$ となるように設定した。用いたパラメータは表 1 の通りである。

表 1: シミュレーションにおけるパラメータ d は空間次元、 M はサンプル数を表す。

d	M	N	L_0	ξ	Δt
2	14	1024^2	$2\pi/64$	0.025	0.001
3	10	128^3	$2\pi/8$	0.2	0.001
4	1	128^4	$2\pi/8$	0.2	0.001

2.1 2次元

今までなされてきた研究で、2次元量子流体での特異構造は点状であることがよく知られている [3]。2次元では特異構造は点なので $d_s = 0$ となり、特異構造のつなぎ替えの条件 (4) を満たさないため渦点の衝突は起こらず、エネルギー散逸は顕著には起こらないであろう。図 1 に 2次元での各種エネルギーの時間発展を示されているが、 $k_0^2\xi^2t \geq 20$ の領域で非圧縮性エネルギーが、ほぼ平坦になっていることが分かる。このことは、先ほどのつなぎ替えの条件と矛盾しない。

厳密にいうとわずかながら散逸しているが、これは、シミュレートしている系の大きさに対し、渦のサイズであるコヒーレンス長が有限の値をもつため渦点の衝突はまぬがれないためであるか、もしくは、メッシュサイズによる波数の上限 k_{max} が十分に大きくないために、小さなスケールでの誤差がシミュレーションに影響を与えているからであろう。また、時間発展の様子を連続的に動画で観察すると、時間が経過 ($k_0^2\xi^2t \geq 20$) した後も、渦の生成が観測される。このとき正の循環をもつ渦点と負の循環をもつ非常に接近した渦対が生成されるが詳しいことはわかっていない。

2.2 3次元

3次元はよく知られているように、特異構造はライン状 [3] であるので $d_s = 1$ となる。よって、2次元と

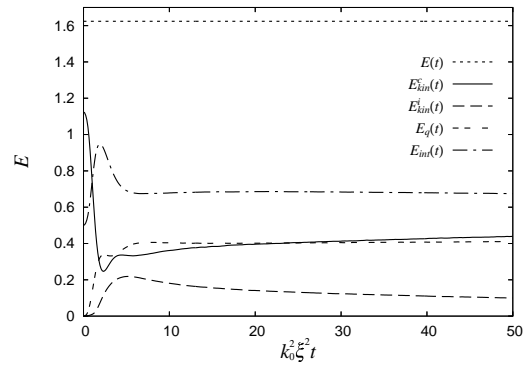


図 1: 各種エネルギーの時間発展 (2D) 14 サンプルの平均

は違い特異構造のつなぎ替えの条件 (4) を等号で満たしているためエネルギー散逸は 2次元より多いだろう。

図 2 に 3次元での各種エネルギーの時間発展を示す。非圧縮性エネルギーが時間とともに減衰していて、つなぎ替えの条件と一致する。また、渦のつなぎ替えには、量子流体には粘性がないので音波が主に関係していると考えられているが、確かに非圧縮性エネルギーの減少とともに、圧縮性エネルギーが増加していることがわかる。

3次元での渦を可視化すると、多数の渦輪が見える。量子乱流では渦は閉じていなければならず、粘性がないことを表している。

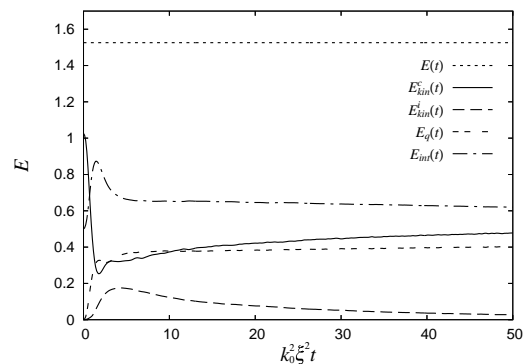


図 2: 各種エネルギーの時間発展 (3D) 10 サンプルの平均

2.3 4次元

今まで、Gross-Pitaevskii 方程式に従う 4次元量子乱流のシミュレーションは行われていない。現実存在する系ではないが特異構造の次元によってどのように散逸が変化するか調べるには興味深い系である。もし、特異構造がライン ($d_s = 1$) ならば特異構造のつなぎ替えの条件 (4) を満たさず、散逸は 2次元のように顕著ではないだろう。ただし、シート ($d_s = 2$) ならばつなぎ替えの条件を十分に満たし散逸は 3次元のそれより大きいことが予想される。

図 3 は 4次元量子乱流での $k_0^2 \xi^2 t = 4.48$ のときの特異構造の様子であり、4次元量子流体の特異構造は密度が小さな領域に対応するとした。この図より、特異構造が芯のサイズである ξ を越えて 4ξ の拡がりをもっており、特異構造がシート状であることがわかる。また、量子流体での特異構造は閉じていなければならず、トーラス状になることが予想されるが詳しいトポロジーは分かっていない。4次元量子流体での特異構造はシート状になるので、特異構造のつなぎ替えは 3次元よりも余裕をもって起こり、散逸は 3次元より多いだろう。

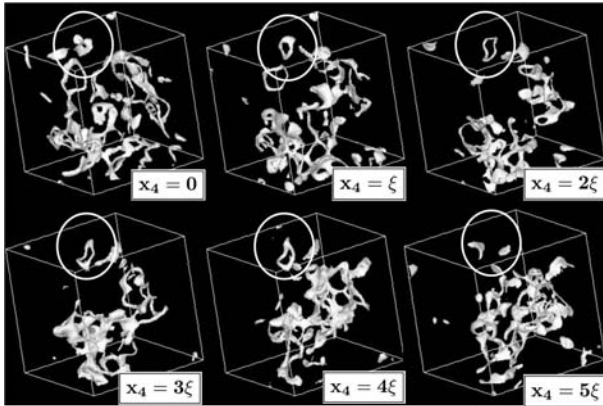


図 3: 4次元 ($128^4/2^4$) での特異構造の様子 $\rho = 0.05$ の等値面、4次元空間での 3次元断面を可視化し、残りの軸 x_4 を ξ ずつずらした。

図 4 に 4次元量子乱流の各種エネルギーの時間発展を示した (4次元は長時間に渡るシミュレーションを行えなかったため、図 4 と図 2 では横軸のスケールが違うことに注意)。次の節で詳しく比較するが、非圧縮性運動エネルギーの減衰は 3次元のそれより速いことがわかる。そして、圧縮性運動エネルギーも 3次元同様に増加していくことが確認でき、4次元量子乱流でも散逸の主な原因が音波であることを示して

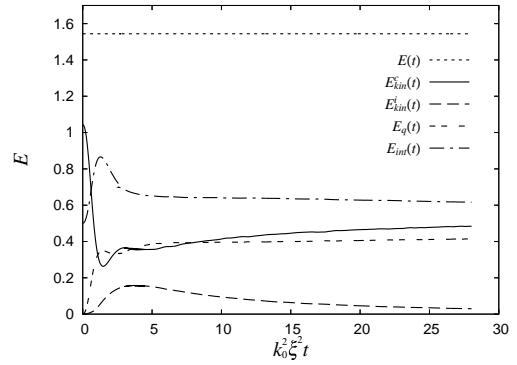


図 4: 各種エネルギーの時間発展 (4D)

いる。

2.4 各次元の比較

2~4 空間次元で Gross-Pitaevskii 方程式をシミュレーションすることにより、2次元では特異構造は点でつなぎ替えの条件 (4) を満たさず、3次元ではラインとなりつなぎ替えの条件を辛うじて満たし、4次元ではシートとなりつなぎ替えの条件を十分満たすことを示した。このことから、非圧縮性運動エネルギー散逸は 2次元、3次元、4次元の順番に大きくなっていくことが予想される。

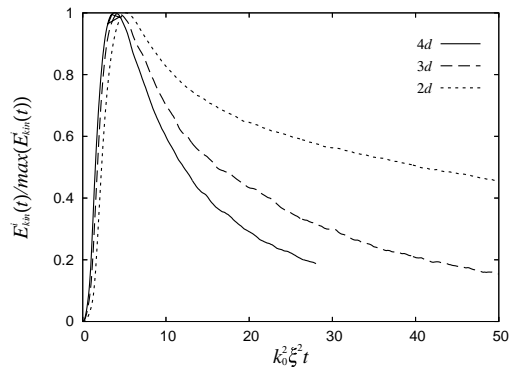


図 5: 非圧縮性運動エネルギーの比較

図 5 は各次元での非圧縮性運動エネルギーをそれぞれの次元の最大値で規格化した値を示している。これを見ると、先ほどの順番で散逸が大きくなるのがわかる。図 6 は各次元での非圧縮性運動エネルギーの散逸率をそれぞれの次元の非圧縮性運動エネルギー

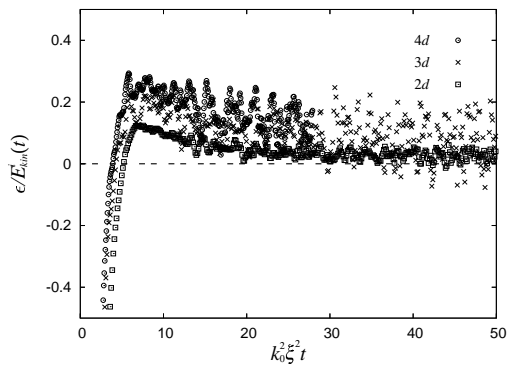


図 6: 非圧縮性運動エネルギーの散逸率の比較

で規格化した値を示す。2次元、3次元、4次元の順に散逸率が大きくなっており、図5と同様な結果を示していることが分かる。これらの結果より非圧縮性運動エネルギーの散逸に特異構造の次元が深く関わっているといえる。

3 結論と今後の課題

本研究の目的は、空間次元を変えることによって量子乱流での特異構造の次元を特定、特異構造の次元による非圧縮性運動エネルギーの散逸の変化を確認することであった。そのため、2~4次元空間で Gross-Pitaevskii 方程式に従う量子乱流のシミュレーションを行った。その結果、2次元空間、3次元空間では、それぞれ点、ライン状であることが確認できた。4次元空間では本研究で特異構造がシート状となることが初めて確認できた。しかし4次元量子流体での詳細な構造は分かっておらず今後の課題である。

非圧縮性運動エネルギーの散逸においては、特異構造のつなぎ替えの条件に一致する結果を得ることができ、エネルギー散逸の原因として特異構造のつなぎ替えが重要であり、そこには特異構造の次元と空間次元との関係が深く関わっていることが明らかとなった。

また渦と音波の相互作用、渦の生成のメカニズムは現在まで詳しいことは分かっておらず、これらを解明することは本研究にさらなる基礎を与えるためにも重要である。

参考文献

[1] E.P.Gross, J. Math. Phys. 4, 195 (1963).

[2] L. P. Pitaevskii, Soviet Phys. -JETP **13**, 451 (1961).
 [3] C. Nore, M. Abid and M. E. Brachet, Phys. Fluids **9**, 2644 (1997).
 [4] M. Kobayashi and M. Tsubota, J. Phys. Soc. Jpn **74**, 3248 (2005).
 [5] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1375 (1993).
 [6] M. E. Brachet, D. I. Merison, S. A Orszag, R. H. Morf and U. Frish, J. Fluid Mech. **130**, 411 (1983).
 [7] E. Suzuki, T. Nakano, N. Takahashi, and T. Gotoh . Phys. Fluids **17**, 081702 (2005).
 [8] T. Gotoh, Y. Watanabe, Y. Shiga, T. Nakano, and E. Suzuki . Phys. Rev. E, **75**, 016310 (2007).