On Besov and Triebel–Lizorkin spaces with variable exponents

野井 貴弘

変動指数関数空間に関する最初の論文は 1931 年の Orlicz による論文 [9] であり, 次の問題 “1 より大きい実数の列 $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ と実数列 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ を与え, $\sum_i x_i^{p_i}$ が収束するとしよう. このとき, $\sum_i x_i y_i$ が収束するために実数列 $\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ の満たすべき必要十分条件は何か?” という考察に端を発する. Olicz はさらに変動指数 Lebesgue 空間の基本的性質と Hölder 型の不等式を示している. その後 1991 年に Kováčik と Rákosník [5] により $\mathbb{R}^n$ 上の変動指数 Lebesgue 空間と変動指数 Sobolev 空間の基本性質が解明された. 2000 年以降, 多くの研究者により, 変動指数関数空間の系統的な研究が活発に行われ, 特に Diening [2] により Hardy–Littlewood の最大作用素が変動指数 Lebesgue 空間上でも有界であるような変動指数 $p(\cdot)$ の十分条件が与えられて以来さらに多くの進展があり, 他分野への応用も研究されるようになった. 具体的な応用としては, 電圧により粘性が変化する流体現象を対象とする電気粘性流体力学への応用があり ([10]), 別の応用として, 粘性が熱に依存する流体現象を対象とする熱粘性流体力学や画像処理が挙げられる. 偏微分方程式論においても $p(\cdot)$-ラプラシアン型の準線形楕円型方程式の境界値問題の解の存在と一意性の研究などが揚げられる. よって今後も変動指数関数空間の枠組みで偏微分方程式論などへの応用が盛んに行われることが期待され, 本研究の進展が待たれる状況にある.

本論文は, Almeida & Hästö [1] と Diening らの論文 [3] により導入された変動指数 Besov 空間 $B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ 及び Triebel–Lizorkin 空間 $F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ の基礎研究に基づき, 現代の調和解析における重要な問題を扱っている. これらの空間は数列指数 $q(\cdot)$ と滑らかさを表す指数 $s(\cdot)$ の取り方により, 変動指数 Lebesgue 空間や変動指数 Sobolev 空間などの関数空間と同型となるため, $B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ と $F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ に関する研究は大変意義があるものと考えられる. 本論文は 3 部構成で, 主結果は以下に述べる Fourier multiplier 定理, 複素補間空間と双対空間に関する定理である.

変動指数関数空間の定義

$\mathbb{R}^n$ から $(0,\infty)$ への可測関数 $p(\cdot)$ で $0 < p_- = \text{ess inf}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) \le \text{ess sup}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) = p_+ < \infty$ を満たす $p(\cdot)$ 全体を $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ と表す. $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 f で,

$$||f||_{L^{p(\cdot)}} = \inf\left\{\lambda > 0 \ \ : \ \ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} \mathrm{d}x \le 1\right\} < \infty$$

を満たす f 全体を $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ と表す. $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ は上の準ノルムにより準 Banach 空間である. $C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ で次の条件を満たす実数値関数 $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の全体とする: ある $C_{p(\cdot)} > 0$ と $p_\infty \in \mathbb{R}$ が存在し

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C_{p(\cdot)}}{\log(e + |x-y|^{-1})} \quad (x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \ne y), \quad |p(x) - p_\infty| \le \frac{C_{p(\cdot)}}{\log(e + |x|)} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つ.

変動指数 Besov 空間及び変動指数 Triebel–Lizorkin 空間を定義するために, 混合 Lebesgue ノルム及び単位の分解を導入する. $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ とし, $\{g_j\}_0^\infty$ を可測関数列とする. $L^{p(\cdot)}(\ell^{q(\cdot)})$ 準ノ

ルムを

$$\|\{g_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{L^{p(\cdot)}(\ell^{q(\cdot)})} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |g_j(\cdot)|^{q(\cdot)} \right)^{\frac{1}{q(\cdot)}} \right\|_{L^{p(\cdot)}}$$

と定義する．ただし, $p_+ = \infty$ または $q_+ = \infty$ の場合は自明な置き換えにより定義する．

一方 $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$ 準ノルムは,

$$\|\{g_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} = \inf\left\{ \mu > 0 \,:\, \varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left(\left\{ \frac{g_j}{\mu} \right\}_{j=0}^{\infty} \right) \le 1 \right\} < \infty$$

と定義する．ここで,

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left(\{g_j\}_{j=0}^{\infty}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \inf\left\{ \lambda_j \,:\, \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|g_j(x)|}{\lambda_j^{\frac{1}{q(x)}}} \right)^{p(x)} \mathrm{d}x \le 1 \right\}$$

である．

次に単位の分解を導入する．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数空間, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の緩増加超関数の空間とする．$\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は, $\mathrm{supp}\ \mathcal{F}\Phi \subset \{\xi : |\xi| \le 2\}$ であり, $|\xi| \le 1$ のとき $\mathcal{F}\Phi(\xi) = 1$, $1 < |\xi| \le 2$ のとき $0 \le \mathcal{F}\Phi(\xi) \le 1$ を満たす関数とする．ここで, $\mathcal{F}$ で Fourier 変換, $\mathcal{F}^{-1}$ で逆 Fourier 変換を表す．さらに, $\Phi_j(x) = 2^{nj}\Phi(2^j x)$ とおく．$j \in \mathbb{N}$ に対し $\theta_j = \Phi_j - \Phi_{j-1}$ とし, $\theta_0 = \Phi_0$ とすると $\{\mathcal{F}\theta_j\}_{j=0}^{\infty}$ は単位の分解になる．

Definition 1. $p(\cdot), q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, $s(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ とし, $\{\theta_j\}_{j=0}^{\infty}$ を上で定めた単位の分解とする．

(1) 変動指数 Besov 空間 $B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ は,

$$\|f\|_{B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} = \left\| \left\{ 2^{js(\cdot)}\theta_j * f \right\}_{j=0}^{\infty} \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} < \infty$$

を満たす $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 全体である．

(2) 変動指数 Triebel–Lizorkin 空間 $F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ は,

$$\|f\|_{F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} = \left\| \left\{ 2^{js(\cdot)}\theta_j * f \right\}_{j=0}^{\infty} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\ell^{q(\cdot)})} < \infty$$

を満たす $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 全体である．

Fourier multiplier

$N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ を多重指数とする．このとき, $m(\cdot) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\|m\|_N := \sup_{|\alpha| \le N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |D^{\alpha} m(\xi)|$$

と定義する．簡単のため, $\mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F} f = \mathcal{F}^{-1}[m \cdot \mathcal{F} f]$ と書く．このとき, 次の Fourier multiplier 定理が成り立つ．

Theorem 2 ([6]). $p(\cdot), q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ かつ $p_+, q_+ < \infty$ とし, $s(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ とする．
(i) $N > \max\{|s_-|, |s_+|\} + \frac{24 \max\{n, C_{s(\cdot)}\}}{\min\{p_-, q_-\}} + n + 2$ ならば, ある定数 c が存在し,

$$\|\mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F} f\|_{F^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} \le c \|m\|_N \|f\|_{F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}}$$

が任意の $m(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と $f \in F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ.
(ii) $N > \max\{|s_-|, |s_+|\} + \frac{24\max\{2n, C_{s(\cdot)}\}}{\min\{p_-, q_-\}} + n + 2$ ならば, ある定数 c が存在し,

$$||\mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F} f||_{B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} \le c||m||_N ||f||_{B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}}$$

が任意の $m(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と $f \in B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ.

次に, かけ算作用素の成す空間を導入する. 今, $s \in \mathbb{R}$ に対し,

$$H_2^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ : \ ||f||_{H_2^s} = ||(1+|\cdot|^2)^{s/2}(\mathcal{F}f)(\cdot)||_{L^2} < \infty\}$$

とする. $\psi(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と $\varphi(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は

$$0 \le \psi(\xi) \le 1, \ \ \mathrm{supp}\,\psi \subset \{\xi : |\xi| \le 4\}, \ \ \psi(\xi) = 1 \text{ if } |\xi| \le 2,$$

$$0 \le \varphi(\xi) \le 1, \ \ \mathrm{supp}\,\varphi \subset \left\{\xi : \frac{1}{4} \le |\xi| \le 4\right\}, \ \ \varphi(\xi) = 1 \text{ if } \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2$$

を満たすとする. このとき, かけ算作用素の成す空間 h_2^s は

$$||m||_{h_2^s} := ||\psi m||_{H_2^s} + \sup_{k=0,1,2,\cdots} ||\varphi(\cdot) m(2^k \cdot)||_{H_2^s} < \infty$$

となる $m(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 全体とする. このとき, 次の Fourier multiplier 定理が成り立つ.

Theorem 3 ([6]). $p(\cdot), q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ かつ $p_+, q_+ < \infty$, $s(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ とする.
(i) $v > \frac{n}{2} + \frac{8\max\{n, C_{s(\cdot)}\}}{\min\{p_-, q_-\}}$ なら, ある定数 c が存在し,

$$||\mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F} f||_{F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} \le c||m||_{h_2^v} ||f||_{F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}}$$

が任意の $m(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ と $f \in F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ.
(ii) $v > \frac{n}{2} + \frac{8\max\{2n, C_{s(\cdot)}\}}{\min\{p_-, q_-\}}$ なら, ある定数 c が存在し,

$$||\mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F} f||_{B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} \le c||m||_{h_2^v} ||f||_{B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}}$$

が任意の $m(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ と $f \in B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ.

Hilbert 変換等の重要な作用素は Fourier multiplier の形で表されることが知られているが, その有界性を調べる為に上の定理は調和解析において基本的なものである. 本論文ではこの Fourier multiplier 定理の系として, レギュラリティ (微分回数) を制御する為の lifting property も得られている.

複素補間空間

次に関数の分解法として重要な原子-分子分解があり, $F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ に対しては既に Diening らにより得られており ([3]), 数列指数が定数の場合に限り $B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q}$ の原子分解が Kempka により示されている ([4]). $B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ の原子-分子分解を示す事により, 作用素の有界性の研究で用いられる次に述べる複素補間空間に関する定理が証明できる. この結果は変動指数に付加条件を課すことなく, 古典的な場合 (指数がすべて定数の場合) と同様に得られる事を示している. 以後 $A^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ で $B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ または $F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ を表すものとする.

Theorem 4 ([8]). $p_0(\cdot), p_1(\cdot), q_0(\cdot), q_1(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ かつ $p_+, q_+ < \infty$, $s_0(\cdot), s_1(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ とする．各 $\theta \in (0,1)$ に対し

$$\frac{1}{p(\cdot)} = \frac{1-\theta}{p_0(\cdot)} + \frac{\theta}{p_1(\cdot)},\ \frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1-\theta}{q_0(\cdot)} + \frac{\theta}{q_1(\cdot)},\ s(\cdot) = (1-\theta)s_0(\cdot) + \theta s_1(\cdot)$$

となるように $p(\cdot), q(\cdot), s(\cdot)$ をとる．このとき，

$$(A^{s_0(\cdot)}_{p_0(\cdot),q_0(\cdot)}, A^{s_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),q_1(\cdot)})_\theta \approx A^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$$

が成り立つ．

$B^s_{p(\cdot),q}$ と $F^s_{p(\cdot),q}$ の双対空間

最後に，関数空間論では基本的な概念であるところの空間の双対性と反射性を，可積分指数 $p(\cdot)$ のみを変動させた空間 $B^s_{p(\cdot),q}$ と $F^s_{p(\cdot),q}$ に関する次の結果を得た．

Theorem 5 ([7]). $1 < q < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とする．$p(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ を，$1 < p_- \le p_+ < \infty$ かつ *Hardy–Littlewood* の最大作用素が $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$-有界となる変動指数とする．また，$p(\cdot)'$ と q' を，それぞれ $p(\cdot)$ と q の共役指数とする．このとき，$(A^s_{p(\cdot),q}(\mathbb{R}^n))' = A^{-s}_{p(\cdot)',q'}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．特に $F^s_{p(\cdot),q}(\mathbb{R}^n)$ と $B^s_{p(\cdot),q}(\mathbb{R}^n)$ は反射的である．

参考文献

[1] A. Almeida and P. Hästö, *Besov spaces with variable smoothness and integrability,* J. Func. Anal. **258** (2010), 1628–1655.

[2] L. Diening, *Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$,* Math. Inequal. Appl. **7**, no. 2 (2004) 245–253.

[3] L. Diening, P. Hästö and S. Roudenko, *Function spaces of variable smoothness and integrability,* J. Func. Anal. **256** (2009), 1731–1768.

[4] H. Kempka, *Atomic, molecular and wavelet decomposition of 2-microlocal Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable integrability,* Func. Approx. Comment. Math, **43**, No. 2 (2010), 171-208.

[5] O. Kováčik and J. Rákosník, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*, Czech. Math. J. **41** (1991), 592–618.

[6] T. Noi, *Fourier multiplier theorems on Triebel–Lizorkin and Besov spaces with variable exponents,* submitted for publication.

[7] T. Noi, *Duality of variable exponent Triebel–Lizorkin and Besov spaces,* to appear in J. Func. Spaces Appl.

[8] T. Noi and Y. Sawano, *Complex interpolation of Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces with variable exponents,* J. Math. Anal. Appl. **387** (2012), 676–690.

[9] W. Orlicz. *Über konjugierte Exponentenfolgen,* Studia Math. **3** (1931), 200–211

[10] K. Rajagopal, M. Růžička, *On the modeling of electrorheological materials,* Mech. Res. Comm. **23** (1996), 401–407.

[11] H. Triebel, *Theory of Function Spaces,* Birkhäuser, Basel, Boston, 1983.