Strongly degenerate parabolic equations in the spaces BV

渡邉　紘

Hiroshi Watanabe

Department of Mathematics, Faculty of Science and Engineering, Chuo University

1　導入

本論文では, 以下の形の非線形退化放物型方程式の初期値境界値問題を考える.

$$
\text{(IBVP)} \qquad \begin{cases} u_t + \nabla \cdot A(x,t,u) + B(x,t,u) = \mathit{\Delta}\beta(u), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial \beta(u)}{\partial \mathbf{n}}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega). \end{cases}
$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は有界な Lipschitz 領域とする. $\nabla = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_N)$, $\mathit{\Delta} = \sum_{i=1}^N \partial^2/\partial x_i^2$ は $\mathbb{R}^N$ の spatial nabla, Laplacian として, [0,T] は固定された時間区間である. 左辺の関数 $A(x,t,\xi) = (A^1, \ldots, A^N)(x,t,\xi)$ を $\overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}^N$ 値の微分可能な関数とし, $B(x,t,\xi)$ は $\overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}$ 上の実数値の微分可能な関数とする. 右辺の関数 β は $\mathbb{R}$ 上増加で局所 Lipschitz 連続であると仮定する. $\mathbf{n}$ は $\partial\Omega$ の単位法線を表す. 形の上では, 時間に依存した双曲型保存則と多孔性媒質方程式の線形結合とみなされるため, この方程式は双曲型の性質と放物型の性質を両方持つ方程式であると考えられる. 実際, 拡散項の非線形関数 β に対する仮定により, この方程式は次のような性質を持つ.

1. β に狭義増加を仮定した場合, $\beta' = 0$ となる点の集合は高々可算点である. この意味で, 上記の方程式を (弱) 退化放物型方程式と呼ぶ. この場合, 双曲性より放物性の方が強い状況であると解釈できる.

2. β に単調非減少を仮定した場合, $\beta' = 0$ となる点の集合が非負測度を持つ場合が考えられる. この意味で, 上記の方程式を強退化放物型方程式と呼ぶ. この場合, 放物性が強いところと双曲性が強いところが混在していると考えられる.

他方, (IBVP) はダム問題, ステファン問題, 微粒子懸濁液の沈殿・硬化過程を記述する数学モデル等へ応用することができる興味深い問題である.

本論文では, 初期値境界値問題 (IBVP) に対する一般化された意味での解を定義し, その存在と一意性, 連続的依存性について述べる. 解の存在性の証明には非線形発展作用素の理論を用い, 差分近似を通して解の構成を行う. また, 一意性と連続的依存性の証明には双曲型保存則の解に対して用いられる手法を改良して用いる.

また, 本論文で扱う Neumann 境界条件は拡散項に対して課される条件である. よって, 問題を適切に扱うために, 移流項の境界上での流入と流出を制限する以下の条件を関数 A に課す.

流入流出条件

関数 $v \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ をとる. このとき, 任意の実数 k に対して

$$\mathrm{sgn}(T_r v - k)[A(x,t,T_r v) - A(x,t,k)] \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0,$$

が $\mathcal{H}^{N-1}$-a.e. $x \in \partial\Omega$, $\mathcal{L}^1$-a.e. $t \in [0,T]$ で成立する. ここで, $T_r : BV(\Omega) \to L^1(\partial\Omega; \mathcal{H}^{N-1})$ は trace 作用素である.

2 一般解

初期値境界値問題 (IBVP) に対する一般解を定義する. まず, 弱退化の場合を考える. この場合は超関数の意味の解を BV 空間内で考えればよい. この解を *BV solution* と呼び, 以下のように定義する.

Definition 2.1. *$u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ を取る. 関数 $u \in L^\infty(\Omega \times (0,T)) \cap BV(\Omega \times (0,T))$ が以下の二つの性質を満たすとき, (IBVP) の BV solution である呼ぶ.*

(1) $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ であり, $u(\cdot,0) = u_0$ が成立する.

(2) $\nabla\beta(u) \in L^2(0,T; L^2(\Omega)^N)$ であり, 各 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ に対し, 次の等式が成立する.

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad &\int_0^T \int_\Omega (u\varphi_t + A(x,t,u)\cdot\nabla\varphi - B(x,t,u)\varphi - \nabla\beta(u)\cdot\nabla\varphi)dxdt \\ &\qquad - \int_0^T \int_{\partial\Omega} A(x,t,T_r u)\cdot\mathbf{n}(x)\ \varphi\ d\mathcal{H}^{N-1}dt = 0.\end{aligned}$$

次に, 強退化の場合の一般解の定義を行う. この場合, 双曲性が強い部分が存在するため, 超関数の意味の解を定義しても一意性は期待されない. そこで, 双曲型保存則方程式の一般解として知られているエントロピー解の概念に沿った解を BV 空間内で考える. この解を BV-エントロピー解と呼び, 定義を以下で与える.

Definition 2.2. $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ を取る. 関数 $u \in L^\infty(\Omega \times (0,T)) \cap BV(\Omega \times (0,T))$ が次の二つの条件を満たすとき, *(IBVP)* の BV-エントロピー解と呼ぶ *:*

(1) $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ であり, $u(\cdot, 0) = u_0$ が成立する.

(2) $\nabla\beta(u) \in L^2(0,T; L^2(\Omega)^N)$ であり, 各 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T))^+$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して, 次の不等式が成立する.

$$\int_0^T \int_\Omega |u-k|\varphi_t dxdt \geq \int_0^T \int_\Omega \mathrm{sgn}(u-k)(\nabla\beta(u)\cdot\nabla\varphi$$

$$-[A(x,t,u) - A(x,t,k)]\cdot\nabla\varphi + [B(x,t,u) + \nabla\cdot A(x,t,k)]\varphi)dxdt$$

$$+\int_0^T \int_{\partial\Omega} \mathrm{sgn}(T_r u - k)[A(x,t,T_r u) - A(x,t,k)]\cdot \mathbf{n}(x)\varphi d\mathcal{H}^{N-1}dt.$$

Remark 2.3. 流入流出条件を使うと, *BV-entropy solution* が *BV solution* になることが示される.

3 主結果

主結果を述べる. 弱退化と強退化で同様の結果が得られるため, 本稿では強退化の場合のみを述べる. まず, 非線形発展作用素の理論を用いて解の存在を証明するために, 初期値境界値問題 (IBVP) を以下のような $L^1(\Omega)$ 上の抽象的 Cauchy 問題に書き換える：

$$\text{(ACP)} \qquad \begin{cases} (d/dt)u(t) = \mathcal{A}(t)u(t) \quad \text{for } t \in (0,T), \\ u(0) = v \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega). \end{cases}$$

ここで, $(d/dt)u(t)$ は $u(\cdot)$ の一般化された意味での導関数と解釈される. また, 微分作用素 $\mathcal{A}(t)$ は, *BV-entropy solution* の定義に沿って定式化される. この問題に対し, 以下のような非線形発展作用素の生成定理が得られる.

Theorem 3.1 (W., S.Oharu [3]). 初期値境界値問題 *(IBVP)* に対する $L^\infty(\Omega)$ 上の非線形発展作用素 $\{\mathcal{U}(t,s); 0 \leq s \leq t \leq T\}$ が存在する. さらに, 各 $v \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ に対し, 指数公式*:*

$$\mathcal{U}(t,s)v = L^1(\Omega)\text{ - }\lim_{\lambda\downarrow 0} \prod_{i=1}^{[(t-s)/\lambda]} (I - \lambda\mathcal{A}(s+i\lambda))^{-1}v, \tag{3.1}$$

が成立する. また, $v \in \widehat{D} \cap BV(\Omega)$ を仮定する. このとき, 関数 $u(x,t) = \mathcal{U}(t,0)v(x)$ は, *BV-entropy solution* を与える. ここで,

$$\widehat{D} \equiv \{v \in L^\infty(\Omega)\ ;\ \liminf_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}||(I - \lambda\mathcal{A}(t))^{-1}v - v||_1 < \infty\}.$$

さらに, BV-*entropy solution* の初期値への L^1 の意味での連続的依存性が得られる．この結果により, BV-*entropy solution* が一意的であることが分かる．

Theorem 3.2 (W. [1], W., S.Oharu [3]). 関数 u, v を初期関数 $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ に対する (*IBVP*) の BV-*entropy solutions* とする．このとき,

$$||u - v||_{L^1(\Omega)} \le e^{\alpha' t}||u_0 - v_0||_{L^1(\Omega)},$$

が成立する．ここで, α' は $-\frac{\partial}{\partial\xi}B(x,t,\xi) \le \alpha'$ を満たす正の定数である．

また, 上記の結果を含むような連続的依存性の結果も得られる．結果を述べるために, $i = 1, 2$ に対して, 非線形関数 A_i, B_i, β_i に関する初期値境界値問題を $(IBVP)_i$ と書くことにする．

Theorem 3.3. 関数 u, v をそれぞれ $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ を初期関数とする $(IBVP)_1$,$(IBVP)_2$ の一意な BV-*entropy solution* であるとする．このとき, 次の不等式が得られる．

$$||u(\cdot,t) - v(\cdot,t)||_{L^1(\Omega)} \le e^{\alpha' t}||u_0 - v_0||_{L^1(\Omega)} + 2(\sqrt{t}C_* + \alpha' e^{\alpha' t}C_{**})||\sqrt{\beta_1'} - \sqrt{\beta_2'}||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I)}$$

$$+\frac{e^{\alpha' t} - 1}{\alpha'}\left[\sup_{t\in(0,T)}|u(\cdot,t)|_{BV(\Omega)} \sup_{t\in(0,T),\xi\in I}||\tfrac{\partial}{\partial\xi}A_1(\cdot,t,\xi) - \tfrac{\partial}{\partial\xi}A_2(\cdot,t,\xi)||_{L^\infty(\Omega)}\right.$$

$$\left. + \sup_{t\in(0,T),\xi\in I}|A_1(\cdot,t,\xi) - A_2(\cdot,t,\xi)|_{BV(\Omega)} + \sup_{t\in(0,T),\xi\in I}||B_1(\cdot,t,\xi) - B_2(\cdot,t,\xi)||_{L^1(\Omega)}\right].$$

ここで $I \subset \mathbb{R}$ は u, v が値をとる閉区間とし, C_* と C_{**} は, $\sup_t|u(\cdot,t)|_{BV}$, $\sup_t|v(\cdot,t)|_{BV}$, $\sup_{t,\xi}|A_1(\cdot,t,\xi)|_{BV(\Omega)}$, $\sup_{t,\xi}||\frac{\partial}{\partial\xi}A_2(\cdot,t,\xi)||_{Lip(\Omega)}$, $\sup_{t,\xi}||B_2(\cdot,t,\xi)||_{BV(\Omega)}$, $||\beta_1'||_{L^\infty(I)}$, $||\beta_2'||_{L^\infty(I)}$, $||\sqrt{\beta_1'}||_{L^\infty(I)}$, $||\sqrt{\beta_2'}||_{L^\infty(I)}$, $||\sqrt{\beta_2'} - \sqrt{\beta_1'}||_{L^\infty(I)}$ に依存する正定数である．さらに, $|\cdot|_{BV}$ は全変動を表す．

この結果は非局所的移流項を持つ強退化拡散方程式の可解性に応用される．

参考文献

[1] H. Watanabe, A unieqeuness theorem of the BV solutions to nonlinear degenerate parabolic equations, to appear.

[2] H. Watanabe, S. Oharu Unique existence of BV-entropy solutions for strongly degenerate convective diffusion equations, RIMS, Kyoto Univ., Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, 1640 (2009), 144-163.

[3] H. Watanabe, S. Oharu, BV-entropy solutions to nonlinear strongly degenerate parabolic equations, to appear.

[4] H. Watanabe, S. Oharu Finite-Difference approximation to a class of strongly degenerate parabolic equations, preprint.