

学位論文要旨

Approximation-solvability theory and numerical methods for mathematical models of nonlinear phenomena

Akihiro Ida

伊田 明弘

2007年（平成19年）

近年では、自然科学、工学、経済学など幅広い分野において、考察する対象を複数の未知量に対する非線形問題として取り扱う研究が多く見られるようになってきた。これらの研究の多くでは、数学モデルとして非線形連立偏微分方程式を構築し、その解の振る舞いについて論じられている。特に流体解析などの分野で適用される移流・拡散系モデルは、多岐に渡って用いられ大きな成果を生み出し続けている。

数学モデルの立て方によっては、得られた非線形連立偏微分方程式の解が存在しない場合がある。また、境界条件や初期値の選び方によっては、適当に構築された非線形連立偏微分方程式であっても安定な解が存在するとは限らない。数学モデルの妥当性を確かめるためには、非線形連立偏微分方程式の解の存在と安定性を示すことが非常に重要である。

非線形連立偏微分方程式の厳密解を求めることは非常に困難であるが、ソリトン理論やカオス理論など非線形現象を扱う多くの研究成果が生まれている。非線形性の強い現象においては、数学的に何を示すべきかを選定することが難しい場合もある。このような問題に対しては、計算機を用いた数値的なシミュレーションの結果が重要な示唆を与えることも多い。非線形現象を扱う数学理論の構築には数値的なシミュレーションが大きく寄与している。

計算機の高性能化が急速に進むことにより、非線形連立偏微分方程式を数値的に解き物理現象のシミュレーションことは広く行われるようになってきている。このようなシミュレーションを行うには、非線形連立偏微分方程式を、差分法、有限要素法、有限体積法などの手法を用いて離散化し、離散近似方程式の解を計算機を用いて計算する方法が一般的である。どのような離散化手法を選択すべきかは、元の方程式系と密接な関係があり非常に重要な問題であるが、しばしば適用の妥当性などの数学的検証が十分に行われないうえに使用され、元の方程式系の近似とは見なせない方程式系を解いてしまっている場合がある（幸運にも元の方程式の適当な近似を与えている場合も多々ある）。多くの数学モデルの中でも使用される頻度の高い、移流・拡散系モデルに現れる非線形連立偏微分方程式に対して適当な離散近似方程式を得るための理論の構築は重要課題である。

非線形偏微分方程式を計算機上で解くための数値計算アルゴリズムの開発と改良は重要な課題である。現実の現象を数値シミュレーションにより計算機上に再現するためには、計算格子が非常に多くなり膨大な計算資源が必要となる。数値計算においては、丸め誤差や打ち切り誤差が不可避であるため、計算規模が大きくなることは困難が増大するということである。また、航空機周りの流体計算のように非線形現象を精度良く記述することを求められる場合には、数値計算アルゴリズムの収束性の良さが要求される。最近では、計算機の性能向上はマルチコア化の方向に向かう傾向があり、数値計算アルゴリズムの開発・改良についても並列化への要求が非常に高まっている。

非線形偏微分方程式を解く数値計算アルゴリズムには、連立一次方程式を解くための線形ソルバを利用するものが一般的に用いられている。このため、線形ソルバが問題を解くためのボトルネックとなる場合が多い。大規模な疎行列を係数に持つ連立一次方程式を解くための効率と精度の良いアルゴリズムの開発も重要である。

第 1 章では、非線形項が時間に依存する場合の準線形発展方程式に対する近似可解性について、この問題を一般のバナッハ空間における半線形発展方程式の初期値問題に対する近似可解性の問題として一般化し、汎用性のある一般理論を構築することを目指している。この章では、最近必要十分条件の形で近似可解性定理として確立された最良の結果を応用することによって得られるバナッハ空間における半線形発展方程式に対する近似可解性定理について論じ、この結果の詳細な証明を与えている。これらの証明に用いられている論法や手法は、そのまま数値計算を行う上での組織的なアルゴリズムを与えて居り、連続モデルを離散化して連続モデルに適合する離散モデルを定式化する上で有効であり、他方でこれらの離散モデルの数値計算法も与えているため理論的かつ実用的な結果である。

第 2 章では、非線形方程式を数値的に解くために本研究で新たに開発した数値計算アルゴリズムである非線形残差切除法に関する研究について述べる。また、非線形残差切除法において最も計算負荷が大きい内部ソルバに適用される並列化 AMG 法に関する研究についても記述する。

非線形残差切除法は、線形方程式解法である残差切除法を非線形方程式に拡張することにより得られたものである。残差切除法は反復解法の一つであり、反復ごとに残差が単調に減少する特徴を持つ。残差切除法の収束性は、内部ソルバと呼ばれる他種の線形ソルバの性能に大きく依存する。残差切除法は楕円型偏微分方程式を数値的に解くための方法として開発された。楕円型偏微分方程式のなかでも特に計算対象として考えられていたのは、流体现象を記述するナビエーストークス方程式を数値的に解く際に現れる圧力のポアソン方程式である。圧力のポアソン方程式は、運動量保存則との関係により境界条件がすべてノイマン条件で与えられる。複雑な形状の境界を考える時には適当な境界条件を与えることが難しく、圧力のポアソン方程式が解を持つ条件であるノイマンの拘束条件が満たされない場合がある。残差切除法は、このような解が存在しないような問題に対しても残差が最小になる近似解を得ることを目的の一つ

としている。非線形残差切除法では、非線形項に対してテーラー展開を行い適当な項で打ち切り、多項式で表される非線形についての非線形方程式を扱い、ある近似解に対して非線形残差が減少するように修正を加えていく。一般的に多く用いられている手法のように、方程式を線形化して繰り返し解くのではなく、非線形方程式の残差を直接逡減させる手法である。この手法により、線形近似による反復では収束までに非常に時間がかかる非線形問題に対して、より短時間で解を得ることができる。また、線形反復の範疇に収まらないような問題を取り扱うことができるようになる。

非線形残差切除法の収束性についても残差切除法の収束性と同様に、内部ソルバと呼ばれる他種の線形ソルバの性能に大きく依存する。本研究では、移流・拡散系モデルを取り扱うことを前提として、内部ソルバに代数的多段格子（AMG）法を採用した。AMG法は、SOR法などの逐次緩和法に対する加速手法であり、拡散項が支配的な方程式系を離散化して得られる連立一次方程式を高速に解く数値計算法として、近年注目を浴びている。また、本研究では、将来大規模なモデルを取り扱うことを考え、非線形残差切除法において最も計算負荷が大きいAMG法の並列化についても取り組んだ。AMG法は逐次計算の部分を実質的に含んでいるため並列計算に向かない手法である。1ノード内での計算に関しては、代数的多色順序付け（AMC）法を取り入れることにより並列効果を発揮させることに成功した。通信が発生する並列計算環境においては、AMC法の通信負荷が大きく台数効果が得られなくなるため、疎格子上での逐次緩和法にはAMC法を用いず、ヤコビ法を採用することで並列効果を保つことができた。

本研究では、非線形性が強く収束させることが困難であるといわれる Sorenson 型格子生成方程式および Hilgenstock 型格子生成方程式に対して非線形残差切除法を適用した例を示す。

第3章では、Banach 空間における次の準線形発展方程式の近似可解性について論じ、これを大規模移流拡散方程式に適用することについて論じる。

拡散項、移流項、反応項に分解される形の半線形放物型システムに適用し、構成した近似解の評価を行う。

第4章では、コンピュータを用いて HIV の感染過程を取り扱う試みに関する研究について記述する。

免疫システムは人体において複雑で多様性のあるシステムである。HIV ウイルスは非常に複雑かつ驚くほど論理的なプロセスで免疫システムを崩壊させる。AIDS 疾患の治療法は、免疫システムの状態と疾患の進行に従って、より効果的なものに変えなくてはならない。本研究ではこのような疾患の進行と治療を取り入れた数学モデルを提案した。この数学モデルは数値的に安定かつ一意可解あることが示される。HIV 疾患の進行に対する我々の数学モデルに対しては生理学的解釈が与えられる。数値シミュレーションの結果は視覚化され、その結果は、抗レトロウイルス療法の見点から妥当であると考えられる。我々のアプローチは実用的な臨床治療の

問題に用いられることが期待される。

第5章では、HIV感染過程に対する数学的アプローチに関する研究について記述する。

AIDSの進行やHIV感染プロセスのような非線形現象を表す数学モデルを求めるためには、非線形演算子を微分演算子の和と摂動に分解するような方法で、時間に依存した発展方程式の一般的なクラスをとりいれるのが効率的である。その結果、(通常は移流拡散演算子に適用される)陰的解法と(様々な生理学的相互作用を表す)陽的手法と組み合わせた「semi-implicit product formula (半陰解法)」が得られる。このように演算子を分解することにより、適当な条件下において、元の方程式の近似可解性が証明できる。

本研究を行うにあたり、大春慎之助教授から懇切なるご指導を賜りました。甚大なる感謝の意をここに明記し、厚く御礼申し上げます。本研究を行う機会を与えて下さいました(株)ヴァイナスの藤川泰彦氏に感謝いたします。論文作成あたりは、海上保安大学の松浦義則教授にご指導ご助力いただき、ありがとうございました。また、本研究に関する数値計算コードおよび可視化ソフトウェアの開発にあたり、多大なるご助力を頂いた(株)ヴァイナスの石上隆氏、橋場数宏氏、谷口幸二氏、藤尾茂氏および大春研究室の学生の皆さんに厚く御礼申し上げます。

本研究の基幹をなす第1章の研究成果は広島大学の松本敏隆助教授、第3章の研究成果は大春研究室の黒田直次氏の研究を引用させて頂いたものです。また、第2章の研究成果はA S I総研の田村敦宏氏、第4章の研究成果はアリゾナ州立大学の太春佳子氏との共同研究により得られた成果です。皆様に心より感謝いたします。

この研究を行うにあたり、筆者に対して非常に良い環境を与えて下さった(株)ヴァイナスおよび中央大学理工学研究科数学専攻に対して厚くお礼申し上げます。