薄い領域でのブシネスク方程式
Boussinesq Equations in thin Domains

齋藤 純一
Jun-ichi Saito

連立非線形偏微分方程式

$$\begin{aligned}
&\partial_t u + (u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p + 2fk\times u = g\theta\\
&\mathrm{div}\ u = 0\\
&\partial_t\theta + (u\cdot\nabla)\theta - \kappa\Delta\theta = H\\
&u(x,0) = u_0,\ \theta(x,0) = \theta_0
\end{aligned}$$

は、Boussinesq equations と呼ばれる流体の運動を表す方程式系である。u は流体の速度ベクトル、θ は流体の持つ温度、p は流体の圧力、$2fk\times u$ はコリオリ項、H は熱源を表し、ν は動粘性係数、κ は熱拡散係数、g は重力加速度ベクトルでありいずれも定数である。この Boussinesq equations を次の 2 つの薄い領域で考える。

領域 1.（平坦な領域） $0<\varepsilon<1$ とする。

$$\Omega_\varepsilon = \{\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3\ ;\ (x_1,x_2)\in\omega,\ 0<x_3<\varepsilon\ \}.$$

ここで、ω は $\mathbf{R}^2$ 内の有界な C^2 領域であるとする。Ω_ε の境界を $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_t\cup\Gamma_b\cup\Gamma_l$ で表し、

$$\Gamma_t = \overline{\omega}\times\{\varepsilon\},\ \Gamma_b = \overline{\omega}\times\{0\},\ \Gamma_l = \partial\omega\times(0,\varepsilon).$$

と定義する。

領域 2.（球殻） $0<\varepsilon<1/2$ とし、(r,λ,φ) を球座標とする。

$$Q_\varepsilon = \{\ r\in(1,1+\varepsilon),\ \lambda\in(0,\pi),\ \varphi\in(0,2\pi)\}.$$

また、S を単位球面、つまり

$$S = S^2 = \{\ r=1,\ \lambda\in(0,\pi),\ \varphi\in(0,2\pi)\ \}.$$

と定義する。

地球流体力学などの分野では、大気や海洋の流れを解析するにあたり Boussinesq equations を利用することがある（例えば Sirayama, S., 2001）。だが、実際には Bussinesq equations をそのまま数値計算して近似解を求めることは少なく、研究対象となる流体の存在する領域が鉛直方向に対し薄い領域である事から、鉛直方向の速度を無視し方程式系を変形[1]して数値計算することが多い。つまり 2 次元の Boussinesq equations の解を利用して流体の運動の解析を行うのである[2]。

本論文では、2 次元 Boussinesq equations の解が薄い領域での流体の水平方向の運動を記述するのに有効であることを示す。ここでいう 2 次元 Boussinesq equations とは、以下の方程式系である。

$$\begin{aligned}
&\partial_t\tilde{u} + (\tilde{u}\cdot\nabla')\tilde{u} - \nu\Delta'\tilde{u} + \nabla'\tilde{p} + \tilde{b}(\tilde{u}) = 0\\
&\mathrm{div}'\ \tilde{u} = 0\\
&\partial_t\tilde{\theta} + (\tilde{u}\cdot\nabla')\tilde{\theta} - \kappa\Delta'\tilde{\theta} = 0\\
&\tilde{u}(x',0) = \tilde{u}_0,\ \tilde{\theta}(x',0) = \tilde{\theta}_0.
\end{aligned}$$

[1]変形された方程式系を primitive equations という。
[2]厳密に言うと 2 次元の Boussinesq equations ではなく鉛直方向の微分が含まれた方程式系である。

ここで ∇' などプライムがついたものは水平方向に関する微分や変数を表すとする。また、$\tilde{b}(\tilde{u})$ については

$$\tilde{b}(\tilde{u}) = 2f \sin l(x_2)\,(-\tilde{u}_2, \tilde{u}_1, 0) \qquad \text{(領域 1 の場合)}$$
$$\tilde{b}(\tilde{u}) = 2f \cos \lambda\,(0, -\tilde{u}_\varphi, \tilde{u}_\lambda) \qquad \text{(領域 2 の場合)}$$

と定義する。

有効性を示すため次の事実を明らかにする。

定理 1　$0 < T < \infty$ とし、$\{u, \theta\}$ を境界条件

$$u_3 = 0,\ \partial_3 u_\alpha = 0\ (\alpha = 1, 2),\ \partial_3 \theta = 0 \qquad \textit{on } (\Gamma_t \cup \Gamma_b) \times (0, T),$$
$$u = 0,\ \theta = 0 \qquad \textit{on } \Gamma_l \times (0, T),$$

を満たす領域 *1* での *3* 次元 *Boussinesq equations* の *weak solution* とする。$H \in L^2(0, T;\, H_0^1(\Omega_\varepsilon))$, $u_0 \in \mathbf{V}_\varepsilon$, $\theta_0 \in H_l^1(\Omega_\varepsilon)$ に対し、$\left(\|H\|_{L^2(0,T;\,H_0^1(\Omega_\varepsilon))}\right)_{\varepsilon>0}$, $(\|u_0\|_{\mathbf{V}_\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, $\left(\|\theta_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right)_{\varepsilon>0}$ が有界列であり、さらに

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon u_0(x', x_3)\, dx_3 = \tilde{u}_0 \quad \textit{in } \tilde{\mathbf{H}} \textit{ weakly},$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \theta_0(x', x_3)\, dx_3 = \tilde{\theta}_0 \quad \textit{in } L^2(\omega) \textit{ weakly},$$

を満たすような $\tilde{u}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}$ と $\tilde{\theta}_0 \in L^2(\omega)$ が存在するならば、

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon u(\cdot, x_3)\, dx_3 = \tilde{u} \quad \textit{in } \mathcal{C}([0, T];\, \tilde{\mathbf{V}}^*) \cap L^2(0, T;\, \tilde{\mathbf{H}}),$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \theta(\cdot, x_3)\, dx_3 = \tilde{\theta} \quad \textit{in } \mathcal{C}([0, T];\, H^{-1}(\omega)) \cap L^2(0, T;\, L^2(\omega)),$$

を満たす *2* 次元 *Boussinesq equations* の *weak solution* $\{\tilde{u}, \tilde{\theta}\}$ が存在する。

定理 2　($H \equiv 0$ とする。)

$0 < T < \infty$ とし、$\{u, \theta\}$ を境界条件

$$u \cdot \vec{n} = 0,\ \operatorname{curl} u \times \vec{n} = 0,\ \nabla\theta \cdot \vec{n} = 0 \ \textit{on } \partial Q_\varepsilon \times (0, T),$$

を満たす領域 *2* での *3* 次元 *Boussinesq equations* の *weak solution* とする。$u_0 \in \mathbf{V}_\varepsilon$, $\theta_0 \in H^1(Q_\varepsilon)$ に対し、$(\|u_0\|_{\mathbf{V}_\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, $\left(\|\theta_0\|_{H^1(Q_\varepsilon)}\right)_{\varepsilon>0}$ が有界列であり、さらに

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} r u_0(\cdot, r)\, dr = \tilde{u}_0 \quad \textit{in } \mathbf{H}_S \textit{ weakly},$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} \theta_0(\cdot, r)\, dr = \tilde{\theta}_0 \quad \textit{in } L^2(S) \textit{ weakly},$$

を満たすような $\tilde{u}_0 \in \mathbf{H}_S$ と $\tilde{\theta}_0 \in L^2(S)$ が存在するならば、

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} r u(\cdot, r)\, dr = \tilde{u} \quad \textit{in } \mathcal{C}([0, T];\, \mathbf{V}_S^*) \cap L^2(0, T;\, \mathbf{H}_S),$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} \theta(\cdot, r)\, dr = \tilde{\theta} \quad \textit{in } \mathcal{C}([0, T];\, (H^1(S))^*) \cap L^2(0, T;\, L^2(S)),$$

を満たす *2* 次元 *Boussinesq equations* の *weak solution* $\{\tilde{u}, \tilde{\theta}\}$ が存在する。

ここで、定理の中に現れた関数空間については、以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
&H_l^1(\Omega_\varepsilon) = \{\ v \in H^1(\Omega_\varepsilon);\ v = 0 \text{ on } \Gamma_l\ \} \\
&\mathbf{V}_\varepsilon = \{\ v \in H_l^1(\Omega_\varepsilon) \times H_l^1(\Omega_\varepsilon) \times H_0^1(\Omega_\varepsilon);\ \mathrm{div}\ v = 0 \text{ in } \Omega_\varepsilon\ \} \quad (\text{領域 1 の場合}), \\
&\mathbf{V}_\varepsilon = \{\ v \in H^1(Q_\varepsilon)^3;\ \mathrm{div}\, v = 0 \text{ in } Q_\varepsilon \text{ and } v \cdot \vec{n} = 0 \text{ on } \partial Q_\varepsilon\ \} \quad (\text{領域 2 の場合}), \\
&\tilde{\mathbf{H}} = \{\ v \in L^2(S)^2;\ \mathrm{div}'\, v = 0 \text{ in } \omega\ \}, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \{\ v \in H_0^1(\omega)^2;\ \mathrm{div}'\, v = 0 \text{ in } \omega\ \}, \\
&\mathbf{H}_S = \{\ v \in L^2(S)^2;\ \mathrm{div}'\, v = 0 \text{ in } S\ \}, \quad \mathbf{V}_S = \{\ v \in H^1(S)^2;\ \mathrm{div}'\, v = 0 \text{ in } S\ \}.
\end{aligned}
$$

また、$*$ が付いている空間は双対空間とする。さらに、3 次元 Boussinesq equations の「弱解」を次のように定義する。

定義 1 $\{u, \theta\}$ がつぎの 2 つの条件を満たすとき、*Boussinesq equations* の弱解と呼ぶ。
1. $\{u, \theta\}$ は次の弱形式を満たす。

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(u, v) + (\,(u \cdot \nabla)u, v) + \nu(\nabla u, \nabla v) + 2f(k \times u, v) = (g\theta, v) \qquad \text{for } v \in \mathbf{V}_\varepsilon, \\
&\frac{d}{dt}(\theta, w) + (\,(u \cdot \nabla)\theta, w) + \kappa(\nabla\theta, \nabla w) = (H, w) \qquad \text{for } w \in H_l^1(\Omega_\varepsilon)\ (\text{領域 1}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{or for } w \in H^1(Q_\varepsilon)\ (\text{領域 2}).
\end{aligned}
$$

ただし、領域 2 の場合は $H \equiv 0$ とする。

2. $\{u, \theta\}$ は次のエネルギー不等式を満たす。

$$
|\theta(t)|^2 + \kappa \int_0^t |\nabla\theta|^2\, ds \le c \left(|\theta_0|^2 + \|H\|^2_{L^2(0,T;\,L^2(\Omega_\varepsilon))} \right) \qquad (\text{領域 1 の場合})
$$

(c は ε と独立な正定数)

$$
|\theta(t)|^2 + 2\kappa \int_0^t |\nabla\theta|^2\, ds \le |\theta_0|^2 \qquad (\text{領域 2 の場合})
$$

かつ、

$$
|u(t)|^2 + \nu \int_0^t |\nabla u|^2\, dt \le |u_0|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t |g\theta|^2\, ds.
$$

2 次元の Boussinesq equations の弱解も同じように定義する。定理 1 、2 とも、この 3 次元の弱解の水平方向の平均が 2 次元の弱解に収束することを証明している。その際、弱解の評価（さらには弱収束）と強収束がポイントとなるが、評価についてはエネルギー不等式を変形することにより得、強収束については以下の定理を利用することによって得ている。

定理 3 (Azerad, P. and Guillen, F., 2001) *Let $T > 0$, and let the Banach spaces $\mathbf{X} \overset{compact}{\hookrightarrow} \mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{Y}$. Let $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ be a family of functions of $L^p(0, T; \mathbf{X})$, $1 \le p \le \infty$, with the extra condition $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{C}(0, T; \mathbf{Y})$ if $p = \infty$, such that*
(H1) *$(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ is bounded in $L^p(0, T; \mathbf{X})$,*
(H2) *$|f_\varepsilon(x, t+h) - f_\varepsilon(x, t)|_{L^p(0,T-h;\,\mathbf{Y})} \le \varphi(h) + \psi(\varepsilon)$ with*

$$
\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \psi(\varepsilon) = 0. \end{cases}
$$

Then the family $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ possesses a cluster point in $L^p(0, T; \mathbf{B})$ and also in $\mathcal{C}(0, T; \mathbf{B})$ if $p = \infty$, as $\varepsilon \to 0$.

また、3次元の Boussinesq equations は非圧縮性粘性流体の熱対流運動も記述している。大気中の代表的な熱対流の現象として積乱雲があるが、この積乱雲により竜巻が生じることがあるようだ (Sinno, H., 2001)。竜巻は鉛直方向に軸を持つ渦といえるから、水平方向に回転する渦を考えればよい。つまり2次元空間での渦度を考えることになる。

空間2次元での渦度に関する研究はその存在や評価、時間無限大での漸近挙動などいろいろな研究がなされているが、渦そのもの、特に渦対の運動、さらにはにガウス曲率が一定な曲面上で渦の運動は、特徴のある曲線上を動くことがわかっている。

定理 4 (Kimura, Y., 1999) *A vortex pair on S^2 moves along the geodesic which bisects and is perpendicular to the curve that connects the two vortices.*

Moreover, on the Poincaré disc, a vortex dipole moves on the geodesic which passes the initial position of the dipole.

ガウス曲率が一定である2次元リーマン曲面は、球面 (S^2)、平面 (E^2)、双曲面 (H^2) と分類される。定理 3 は S^2 上と H^2 (ポアンカレの円板) 上での渦対の運動についての結果を得ている。

もともと定曲率リーマン多様体に興味のあった私は、上記の定理の結果に非常に興味を抱いた。以前に複素双曲空間内の曲率一定な実超曲面について分類を行ない、ひとつの結果を得ていたからである。本論文ではそのひとつの結果である、複素双曲空間内の主曲率が一定な超曲面の分類についても言及する。ここで「実超曲面」とは、複素次元を n としたときの $(2n-1)$ 次元の部分多様体のことである。

J. Berndt は 以下の仮定

「structure vector field が主曲率方向である」$\cdots$ (H)

を満たす複素双曲空間内の定主曲率の実超曲面について分類し、以下のような定主曲率の表を得た (Berndt, J., 1990)。 表中の α, λ, μ は主曲率を表し m_α, m_λ, m_μ は重複度を表している：

type	α	λ	μ	m_α	m_λ	m_μ
(a)	$2\coth(2r)$	$\tanh(r)$	$\coth(r)$	1	$2k$	$2(n-k-1)$
(b)	$2\tanh(2r)$	$\tanh(r)$	$\coth(r)$	1	$n-1$	$n-1$
(c)	2	1	—	1	$2n-2$	—

ここで $r \in \mathbf{R}^+$、$k \in \{0, \cdots, n-1\}$ である（ここで r は実超曲面である tube の半径を表し k は次元を意味している)。

上の表からわかるように、仮定 (H) を満たす複素双曲空間内の主曲率一定な超曲面はその主曲率をたかだか3つしか持たない。よって 「 異なる3つの定主曲率をもった実超曲面が仮定 (H) を満たす 」 ことがいえれば、$H_n(\mathbf{C})$ 内の異なる3つの定主曲率を持った超曲面の分類が出来上がることになる。今回それを成し遂げることができ、次の結果を得た。

定理 5 M を連結で3つの相異なる定主曲率をもつ $H_n(\mathbf{C})$ $(n \geq 3)$ の実超曲面とする。このとき M は、次に挙げる $H_n(\mathbf{C})$ 内の実超曲面の中の1つに合同である。

(a) $k \in \{1, \cdots, n-2\}$ に対する $H_k(\mathbf{C})$ の周りの半径 r $(\in \mathbf{R}^+)$ の *tube,*

(b) $H_n(\mathbf{R})$ の周りの半径 r $(\in \mathbf{R}^+ \backslash \{\ln(2+\sqrt{3})\})$ の *tube.*

この定理では $n \geq 3$ と仮定している。$n=2$ の場合はまだ分類されていない。$n=2$ の場合を分類することにより3次元の主曲率一定な実超曲面を考えることができ、その上の渦対について研究することが出来る。$n=2$ の場合での実超曲面の分類はこれからの課題であり、その超曲面上での渦対の運動はさらにその先の課題である。