ポンスレの定理について
On the theorem of Poncelet

数学専攻　有賀　雅雪
Masayuki ARUGA

序

本論文は硲文夫「代数幾何学」(森北出版) の第１２章と第１３章に基づく総合報告である．二つの射影二次曲線に関する Poncelet の定理は１９世紀における射影幾何学の精華であるが,「代数幾何学」では楕円曲線と関係させて Poncelet の定理の証明を与えている．これは従来から知られていたことであるが,「代数幾何学」ではなるべく予備知識を前提とせず，極端に言えば高校数学の範囲で読み取れるように書かれている．ただ，これまで発展して来た代数幾何学の様々な手法を用いずに素朴な計算だけで乗り切ろうとしているので，計算が非常に煩雑である．したがって,「代数幾何学」に述べられている Poncelet の定理の証明を精査し，説明をほぐし，補うべきところは補って記述をまとめ直すことには幾許かの意義はあるだろう．

論文は４節からなっているが，第１節では非特異射影曲線の双対曲線について必要事項をまとめている．また，本論から外れるが、興味深い代数曲線に対してその双対曲線の例を示している．第２節では非特異三次曲線が可換群の構造をもつことを復習している．この事実は今日では Riemann-Roch の定理を用いて証明するのが普通であるが,「代数幾何学」では「二つの射影三次曲線の９交点のうち８点を通る射影三次曲線は残りの１点も通る」という射影幾何の定理に基づいて説明していて，本論文の記述もそれに従っている．以上の準備の下に，第３節では「代数幾何学」の論述に沿って Poncelet の定理の証明について記述している．ここでは二つの非特異二次曲線から一つの楕円曲線を構成することが鍵であるが，そこの計算を整理した．第４節では一つの楕円曲線から二つの非特異二次曲線を構成し，Poncelet の定理の例を構成する逆問題について記述した．ここは「代数幾何学」の著者も力を入れたところのようで，迫力のある議論が続いているが，初学者には見えにくい誤りがあり，本論文ではそこを修正してまとめ直した．

1　準備

定義 1.1. K を体，$F(X,Y,Z)\in K[X,Y,Z]$ を同次多項式とし，C を方程式 $F(X,Y,Z)=0$ によって定義される射影曲線，P を C の点とする．

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial X}(P),\frac{\partial F}{\partial Y}(P),\frac{\partial F}{\partial Z}(P)\Big)\neq(0,0,0)$$

となるとき，P は C の非特異点であるという．さらに,

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P)X+\frac{\partial F}{\partial Y}(P)Y+\frac{\partial F}{\partial Z}(P)Z=0$$

によって定義される直線を点 P における C の接線とよぶ.

一方,

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial X}(P),\frac{\partial F}{\partial Y}(P),\frac{\partial F}{\partial Z}(P)\Big)=(0,0,0)$$

となるとき，P は C の特異点であるという.

定義 1.2. K を代数的閉体，$C\subset\mathbb{P}^2(K)$ を射影曲線とする．C の各点が非特異であるとき，射影曲線 C は非特異であるという.

補注 1.3. K を体とする．射影平面 $\mathbb{P}^2(K)$ の直線全体は対応 $aX+bY+cZ=0 \mapsto (a:b:c) \in \mathbb{P}^2(K)$ によって $\mathbb{P}^2(K)$ と同一視できる．

記号 1.4. K を代数的閉体，$C \subset \mathbb{P}^2(K)$ を非特異射影曲線とする．

$$C^* = \Big\{ \Big(\frac{\partial F}{\partial X}(P), \frac{\partial F}{\partial Y}(P), \frac{\partial F}{\partial Z}(P) \Big) \text{ ; } P \text{ は } C \text{ の非特異点} \Big\} \subset \mathbb{P}^2(K)$$

と記す．

次の事実が知られている．

定理 1.5. $C \subset \mathbb{P}^2(K)$ を非特異射影曲線とする．このとき，C^* もまた射影曲線．さらに，C^* が非特異なら，$(C^*)^* = C$ (双対性).

射影曲線 C^* を C の双対曲線とよぶ．

命題 1.6. K を標数 $\neq 2$ の代数的閉体，$A \in M(3,K)$ を正則な対称行列とし，C を方程式

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$$

によって定義される非特異二次曲線とする．このとき，C の双対曲線 C^* は方程式

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$$

によって定義される．

記号 1.7. K を標数 $\neq 2,3$ の代数的閉体，$a, b \in K$ とする．E を $y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$ によって定義される非特異射影曲線とする．$(0:1:0) \in E \subset \mathbb{P}^2(K)$ を O と記す．

記号 1.8. E を $y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$ によって定義される非特異射影曲線とする．
(1) $P, Q \in E$ に対して P と Q を通る直線を $l_{P,Q}$ と記す．$P = Q$ のとき，$l_{P,Q}$ は P における E の接線を表わすと考える．
(2) $P \in E$ に対して P と O を通る直線を v_P と記す．$P = O$ のとき，$v_P = v_O$ は O における E の接線を表わすと考える．

定理 1.9. E を $y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$ によって定義される非特異射影曲線とする．
(1) $P, Q \in E$ とすれば，$l_{P,Q} \cap E = \{P, Q, R\}$ と表わせる．このとき，$(P+Q)+R = O$ と定義する．
(2) $R \in E$ とすれば，$v_R \cap E = \{R, O, S\}$ と表わせる．このとき，$R + S = O$ と定義する．
　したがって，(1)，(2) を合わせて加法 $P + Q = S$ が定義される．さらに，E は加法 $+$ に関して可換群となる．E の単位元は O で与えられる．

定義 1.10. 可換群の構造をもつ非特異射影曲線を楕円曲線とよぶ．

公式 1.11. K を標数 $\neq 2,3$ の代数的閉体，E をアファイン方程式 $y^2 = x^3 + ax + b$ $(a, b \in K)$ によって定義される楕円曲線とし，$P = (x_1, y_1)$，$Q = (x_2, y_2)$ を E の点とする．このとき，次が成立する．
(a) $P \neq Q$ の場合，

$$P + Q = \begin{cases} O & (x_1 = x_2) \\ (\lambda^2 - x_1 - x_2, -\lambda(\lambda^2 - x_1 - x_2) - \mu) & (x_1 \neq x_2) \end{cases}$$

ここで，

$$\lambda = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},\ \mu = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}$$

(b) $P = Q$ の場合，

$$P + Q = \begin{cases} O & (y_1 = 0) \\ (\lambda^2 - 2x_1, -\lambda(\lambda^2 - 2x_1) - \mu) & (y_1 \neq 0) \end{cases}$$

ここで，

$$\lambda = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1},\ \mu = \frac{-x_1^3 + ax_1 + 2b}{2y_1}$$

2 Poncelet の定理

記号 2.1. C_1, C_2 を $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ における相異なる非特異二次曲線とする．P_0 を C_1 の点，L_0 を P_0 を通る C_2 の接線とする．P_1 を P_0 以外の L_0 と C_1 とする．L_1 を P_1 を通る C_2 の接線とする．以下同様にして P_2, L_2, P_3, $L_3, \ldots$ と C_1 の点と C_2 の接線を交互に定義する．

定理 2.2. (Poncelet) 記号 2.1 の仮定の下で，さらに，$P_n = P_0$, $L_n = L_0$ となるような整数 $n > 0$ が存在すると仮定する．このとき，任意の点 $P'_0 \in C_1$ および P'_0 を通る C_2 への任意の接線 L'_0 から始めても $P'_n = P'_0$ および $L'_n = L'_0$ が成立する．

Poncelet の定理の準備として，相異なる二次曲線 C_1，C_2 から楕円曲線 E を構成する．

定理 2.3. K を標数 $\neq 2, 3$ の体，C_1，C_2 を K の上に定義された相異なる非特異二次曲線とする．さらに，

$$E = \{(p, L) \in C_1 \times C_2^* \ ;\ p \in L\} \subset C_1 \times C_2^*$$

と定義する．このとき，E は楕円曲線の構造をもつ．

証明の概略. $C_1 \times C_2^*$ の部分集合 E を読み換えると，

$$E = \{((x:y:z),(X:Y:Z)); \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} A_2^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0, Xx + Yy + Zz = 0\}$$

という等式が成り立つ．ここから変数変換を繰り返し，$(x:y:z) = (s^2 - 1 : 2s : s^2 + 1)$ と媒介変数表示して，E のアファイン方程式 $u^2 = as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e$ $(a, b, c, d, e \in K)$ が得る．これから楕円曲線の Weierstrass 標準形 $y^2 = x^3 + Ax + B$ $(A, B \in K)$ に持って行く．

定義 2.4. 写像 $\iota_1 : E \to E$ を $\iota_1(p, L) = (q, L) \in E$ によって定義する．ここで，q は L と C_1 の p とは異なる交点とする．

命題 2.5. ι_1 は射影曲線 E の位数 2 の自己同型.

定義 2.6. 写像 $\iota_2 : E \to E$ を $\iota_2(p, L) = (p, M) \in E$ によって定義する．ここで，M は p を通る，L 以外の C_2 の接線とする．

命題 2.7. ι_2 は射影曲線 E の位数 2 の自己同型である．

記号 2.8. $\iota_2 \circ \iota_1 = \varphi$ と記す.

定理 2.9. 射影曲線 E の位数 2 の自己同型 ι は次のいずれかに限る．
(a) $\iota(x) = x + P$ ($P \in E$ の定点で，$2P = O$ が成立する)
(b) $\iota(x) = -x + Q$ ($Q \in E$)

Poncelete の定理は次の定理に帰着する．

定理 2.10. E を楕円曲線，ι_1，ι_2 は E の射影曲線としての位数 2 の自己同型とし，$\varphi = \iota_2 \circ \iota_1$ とおく．このとき，$x_0 \in E$ と正の整数 n が存在して $\varphi^n(x_0) = x_0$ となるなら，φ^n は E の恒等写像．

証明の概略. 定理 2.9 によって，ι_1，ι_2 の組み合わせは次のいずれか．

(1) (ι_1, ι_2)=((a),(a))，(2) (ι_1, ι_2)=((a),(b))，(3) (ι_1, ι_2)=((b),(a))，(4) (ι_1, ι_2)=((b),(b))

それぞれの場合について調べていくと，(1)，(2)，(3) では図形的にあり得ないことがわかるので，(4) について考えると結果を得る．

以上のように，Poncelet の定理の証明が完成した．証明では，2 つの 2 次曲線から 1 つの楕円曲線を構成した．ここからは逆に，1 つの楕円曲線から 2 つの 2 次曲線を構成することを考え，いつ n 角形が描けるのかに注目して議論していく．

命題 2.11. E を $u^2v = At^3 + Bt^2v + Ctv^2 + Dv^3$ によって定義される楕円曲線，$(t_0 : u_0 : 1)$ を E の無限遠点以外の K 有理点とする．また，

$$b_1 = 1,\ c_1 = -t_0,\ b_2 = \alpha,\ c_2 = u_0 - t_0\alpha,\ a_3 = -A,\ c_3 = -\frac{(c_2^2 - D)}{t_0},\ b_3 = -\frac{(2b_2c_2 - c_3 - C)}{t_0}$$

(α, β は媒介変数) とおく．C_1 を二次曲線 $y^2 = 4xz$，C_2^* を

$$X = b_1t + c_1,\ Y = b_2t + c_2,\ Z = a_3t^2 + b_3t + c_3$$

で定義される二次曲線とする．このとき，Poncelet の定理に現れる楕円曲線は E と一致する．

証明の概略. 任意の非特異二次曲線は放物線 $y^2 = 4xz$ に変換されるので，$(x : y : z) = (s^2 : 2s : 1)$ と媒介変数表示ができる．このとき，Poncelet の定理に現れる楕円曲線 E は E は $(Xs + Y)^2 - (Y^2 - XZ) = 0$ と書き直せる．これを整理すれば，$u^2 = At^3 + Bt^3 + Ct + D$(アファイン表示) となっている．さらに変形すると，

$$u^2v = At^3 + Bt^2v + Ctv^2 + Dv^3$$

(ただし，$t = -c_1\beta$，$u = (b_1c_2 - b_2c_1)\beta$，$v = b_1\beta(\alpha$，$\beta$ はパラメータ) となり、α，β の 2 変数としたもとの楕円曲線 E の式が導出できた．

命題 2.12. C_1 を $y^2 = 4xz$ によって定義される二次曲線．C_2 を媒介変数表示

$$X = b_1t + c_1,\ Y = b_2t + c_2,\ Z = a_3t^2 + b_3t + c_3$$

によって表示される二次曲線の双対曲線とする．また，

$$A = -b_1a_3,\ B = b_2^2 - (b_1b_3 + c_1a_3),\ C = 2b_2c_2 - b_1c_3 - c_1b_3,\ D = c_2^2 - c_1c_3$$

とする．このとき，Poncelet の定理に現れる楕円曲線 E は

$$u^2 = At^3 + Bt^3 + Ct + D$$

によって定義され，自己同型 φ_E は

$$\varphi_E(t, u) = (t, u) + P_0,\ P_0 = \big(-\frac{c_1}{b_1}, \frac{(b_2c_1 - b_1c_2)}{b_1}\big)$$

によって与えられる．