ヴァシリエフ不変量とウェイトシステムについて
On Vassiliev invariants and weight systems

数学専攻　海老原　智之
EBIHARA, Tomoyuki

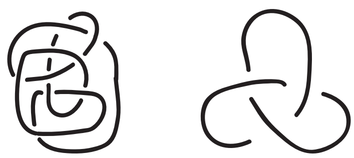
1　結び目理論の諸定義

定義 1.1. $\mathbb{R}^3$内の S^1 と同相な部分集合を**結び目**という. 有限個の結び目の非交和な和集合を**絡み目**という.

定義 1.2. 絡み目 L と L' が**同値である**とは, $\varphi(L) = L'$ となるような $\mathbb{R}^3$ の向きを保つ自己同相写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が存在することをいう.

定義 1.3. L を $\mathbb{R}^3$ 内の絡み目とする. 射影 $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ による L の像で, 各点の逆像が高々*2* 点であり, 逆像が *2* 点の部分において各交差の上下関係を示した図式を L の**正則図形**という.

例 1.4. (正則図形の例)

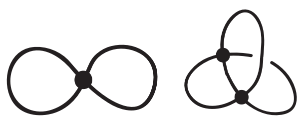


自明な結び目　　三葉結び目

2　Vassiliev 不変量

定義 2.1. $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ を滑らかなはめ込みとして, その特異点は横断的に交わる二重点のみとする. そのときの f による像を**特異結び目**という.

例 2.2. (特異結び目の例)



定義 2.3. 特異結び目 K, K' が**同値である**とは, $\varphi(K) = K'$ となるような向きを保つ自己微分同相写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が存在することをいう.

　v_0 を数値的な結び目の不変量, つまり結び目 K に対し, $v_0(K)$ は実数とする.
この v_0 を以下のようにして特異結び目の不変量に拡張する.
まず初めに, K を特異点を 1 つだけもつ特異結び目とし, K, K_+, K_- を以下の正則図形を持つ結び目とする.

K　　K_+　　K_-

ただしこれらの正則図形は上の図で示した部分以外は同一であるとする. このとき

$$v_0(K) = v_0(K_+) - v_0(K_-)$$

とすると K_+, K_- は特異点を持たないので, 1 つの特異点を持つ特異結び目 K に対し, $v_0(K)$ を計算することができる.

v が既に高々$n-1$ 個の特異点を持つ特異結び目に対して定義された不変量であるとする.
K をちょうど n 個の特異点を持つ特異結び目とし, K, K_+, K_- を以下の正則図形を持つ特異結び目とする.

K K_+ K_-

ただしこれらの正則図形は上の図で示した部分以外は同一であるとする. このとき,

$$v(K) = v(K_+) - v(K_-)$$

とすると K は n 個の特異点, K_+, K_- は $n-1$ 個の特異点を持っているので, v の決め方により, $v(K)$ を計算することができ, 帰納的に特異結び目の不変量に拡張することができる.

定義 2.4. 特異結び目の不変量 v が, 任意の $m+1$ 個の特異点を持つ特異結び目 K に対し

$$v(K) = 0$$

をみたすとき, v を高々位数 m の **Vassiliev 不変量**であるという.

3 ウェイトシステム

定義 3.1. 有限個の弦が張られている円周をコード図式という. すべてのコード図式のなす集合を $\mathscr{D}^c$ とし, 弦が m 本のコード図式全体のなす部分集合を $\mathscr{G}_m\mathscr{D}^c$ という.

例 3.2. $\mathscr{G}_3\mathscr{D}^c$ は次の 5 つの図式からなる.

定義 3.3. コード図式 D と D' が**同値である**とは, コードを保つような微分同相写像 $\phi : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ が存在することをいう.

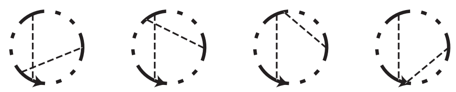
定義 3.4. 以下を満たす関数 $W : \mathscr{G}_m\mathscr{D}^c \to \mathbb{R}$ を次数 m の**ウェイトシステム**という.

1. もし $D \in \mathscr{G}_m\mathscr{D}^c$ が孤立弦と呼ばれる, 他の弦と一切交わらない弦を持つとき, 次が成り立つ.(*FI*)

$$W(D) = 0$$

2. 以下に与えられた図式 D_s, D_e, D_w, D_n に対し, 常に次の等式が成り立つ.(*4T*)

$$W(D_s) - W(D_e) + W(D_w) - W(D_n) = 0 \tag{1}$$



D_s D_e D_w D_n

ただしこれらの図式は, 上の図で示した部分以外は同一であるとする. 式 (*1*) を **4 項関係式**という.

全ての Vassiliev 不変量を位数によってフィルター付けする.

$$0 \subset \mathscr{V}_0 \subset \mathscr{V}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{V}_m \subset \cdots$$

$\mathscr{G}_m(V) := \mathscr{V}_m/\mathscr{V}_{m-1}$ とすると, $\mathscr{V}$ に付随する次数付きベクトル空間 $\mathscr{G}(V)$ ができる.

$$\mathscr{G}(V) := \oplus \mathscr{G}_m(V) \tag{2}$$

また $\{w : \mathscr{G}_m\mathscr{D}^c \to \mathbb{R} \mid FI, 4T\} \subset \mathbb{R}^{\mathscr{G}_m\mathscr{D}^c}$ を $\mathscr{W}_m$ として, $\oplus\mathscr{W}_m$を $\mathscr{W}$ と表す.

定理 3.5. $\mathbb{R}$ 上で Vassiliev 不変量のフィルター付けされたベクトル空間に付随する次数付きベクトル空間 $\mathscr{G}(V)$ は $\mathscr{W}$ と同型である. より正確にいうと

1. 線型写像 $f : \mathscr{V}_m \to \mathscr{W}_m$ が存在する.

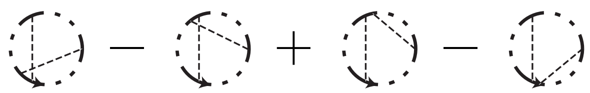
2. 線型写像 $K : \mathscr{W}_m \to \mathscr{V}_m$ が存在する.

3. 上の二つの写像はほぼ互いの逆写像になっている.

定義 3.6. $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間 $\mathscr{A}^c$ を次のように定める.

$$\mathscr{A}^c = \mathrm{span}(\mathscr{D}^c)/\mathrm{span}\{4T\} \tag{3}$$

ここで $4T$ とは $S - E + W - N$ の全体のなす集合である*:*

$4T = \{$  $\}$

定義 3.7. **漢字図式**は, 1 つの向きのついた円と, いくつかの向きのついていない破線からなる連結グラフで, 頂点の位数はすべて *3* で以下を満たす.

1. 内側の頂点：3 つの破線がついていて, その頂点には向きがついている.

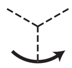
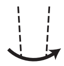
2. 外側の頂点：破線と円をつなぐ頂点.

すべての漢字図式の集まりを $\mathscr{D}^t$ とし, $\mathscr{D}^t$ のなかで頂点の総数が *2m* 個のものの集まりを $\mathscr{G}_m\mathscr{D}^t$ とする.

定義 3.8. $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間 $\mathscr{A}^t$ を次のように定める.

$$\mathscr{A}^t = \mathrm{span}(\mathscr{D}^t)/\mathrm{span}\{STU\}$$

ここで STU とは $S-T+U$ の全体のなす集合である:

$STU = \{$  $-$  $+$  $\}$

ただしこれらの図式は, 上の図で示した部分以外は同一であるとする.

定理 3.9. 線型写像 $\phi^c : \mathscr{A}^c \to \mathscr{A}^t$ は同型写像である.

定義 3.10. 漢字図式の円を 1 点で切り, 線分にしたものを**線分上図式**という. すべての線分上図式の集まりを $\mathscr{D}^l$ とする.

定義 3.11. ベクトル空間 $\mathscr{A}^l$ を次のように定める.

$$\mathscr{A}^l = \mathrm{span}(\mathscr{D}^l)/\mathrm{span}\{STU\}$$

定理 3.12. 直線を閉じることによって定義される写像 $\phi^l : \mathscr{A}^l \to \mathscr{A}^t$ は同型写像である.

以下では $\mathscr{A}^c\mathscr{A}^t\mathscr{A}^l$ を $\mathscr{A}$ と書く.

4 $\mathscr{A}$ の構造

命題 4.1. 線分上図式の連結和 $\mathscr{D}^l \times \mathscr{D}^l \to \mathscr{D}^l$ により積 $\cdot : \mathscr{A}\otimes\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ が誘導される. この積により, $\mathscr{A}$ は結合的で可換的な代数となる. 空の円が $\mathscr{A}$ の単位元になる.

定義 4.2. $\mathrm{span}(\mathscr{D}^t)$ を $\mathscr{D}$ とする. $\mathscr{D}^t$ の元 D に対する D_s を D の各破線に ”l” または ”r” の印を内側の点のまわりでは同じ印になるようにつけたものとし, $\Delta : \mathscr{D}^t \to \mathscr{D}\otimes\mathscr{D}$ を次のように定義する.

$$\Delta(D) = \sum_{s\in\mathscr{S}(D)} L(D_s)\otimes R(D_s)$$

$\mathscr{S}(D)$ を D の分割全体とし, $L(D_s)$ は D の ”r” 印がついた破線を取り除いたもの, $R(D_s)$ は D の ”l” 印がついた破線を取り除いたものとする.

命題 4.3. Δは $\mathscr{A}$ の余可換,余結合な余積を誘導する. $\mathscr{A}$ の双対代数 $\mathscr{A}^*$の元εを$\varepsilon(\bigcirc) = 1,\ \varepsilon|_{\mathscr{G}_m\mathscr{A}} = 0\ (m > 0)$ と定義すると, εは余代数の余単位元となる.

命題 4.4. 命題 4.1 と命題 4.3 により, $\mathscr{A}$ は双代数である.

参考文献

[1] Dror Bar-Natan, On the Vassiliev Knot Invariants, Topology Vol.34.No.2, pp423-472(1995)

[2] K.Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Birkhauser (1996)

[3] S.Chmutov, S.Duzhin and J.Mostovoy, Introduction to Vassiliev Knot Invariants, CAMBRIDGE(2012)

[4] 阿部英一, ホップ代数, 岩波書店 (1977)