

完全グラフの絡み目内在性

Intrinsic linking of complete graphs

数学専攻 遠藤 慎吾
ENDO Shingo

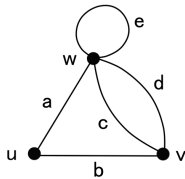
1 準備

1.1 グラフ

グラフ (graph) または多重グラフ (multigraph) とは, 空でない集合 V と, V と互いに素な集合 E と, 辺を頂点の対に対応させる関数 ψ からなる 3 個組 (V, E, ψ) のことである. ここで, V の要素を頂点 (vertex) といい, E の要素を辺 (edge) といい, ψ を接続関数 (incidence function) という.

$x, y \in V$ かつ $e \in E$ に対して, $\psi(e) = \{x, y\}$ をみたすとき, e は x と y を結ぶ (join) といい, e を xy で表す. このとき, x, y をそれぞれ辺 xy の端点 (end vertex) という. さらに, x, y はそれぞれ辺 xy に接続する (incident) といい, x と y は隣接する (adjacent) という. また, 2 本の辺がちょうど 1 つの端点を共有しているとき, それらの辺は隣接する (adjacent) という. 以後, 簡単のために, $\psi(e) = \{x, y\}$ を $\psi(e) = xy$ で表す.

$x, y \in V$ かつ $e, f \in E$ に対して, $\psi(e) = xx$ をみたすとき e をループ (loop) といい, $\psi(e) = xy$ かつ $\psi(f) = xy$ をみたすとき e, f を多重辺 (multiple edges) という. グラフ G がループと多重辺をもたないとき, G を単純グラフ (simple graph) という.



$$G = (V, E, \psi)$$

$$V = \{u, v, w\}, E = \{a, b, c, d, e\}$$

$$\psi(a) = uw, \psi(b) = uv, \psi(c) = vw, \psi(d) = vw, \psi(e) = ww$$

図 1: 多重グラフの例

$G' = (V', E', \psi')$ が $G = (V, E, \psi)$ の部分グラフ (subgraph) であるとは, $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ で, ψ' が ψ の E' への制限であるときをいい, $G' \subseteq G$ で表す.

グラフ $G = (V, E, \psi)$ に対して, $\psi(e) = xy$ とする. このとき, e を縮約 (contraction) するとは, x, y とそれらに接続している辺を消去し, 新たな頂点 v を加え, x または y に隣接していた頂点と v を結ぶ辺を加える操作をいい, G から e を縮約して得られるグラフを G/e で表す.

グラフ G, H に対して, G の部分グラフに有限回の辺の縮約を行うことで H が得られるとき, H は G のマイナー (minor) であるといい, $G \succ H$ で表す. G がある性質をみたし, G のどのマイナーもその性質をみたさないとき, G はその性質に対して極小マイナー (minor minimal) であるという.

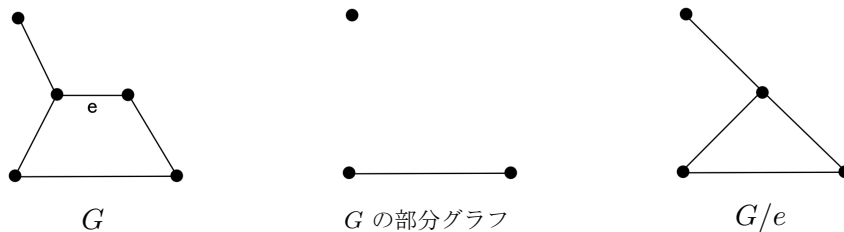


図 2: 部分グラフ・縮約の例

任意の2つの頂点がちょうど1本の辺で結ばれているグラフを**完全グラフ** (complete graph) といい、 n 頂点完全グラフを K_n で表す。

グラフ G に対して、 $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_r$ かつ $V_i \cap V_j = \emptyset$ ($1 \leq i < j \leq r$) かつ同じ集合 V_i ($i = 1, 2, \dots, r$) に属する2つの頂点が隣接しないように $V(G)$ を空でない r 個の集合に分割できるとき、 G は **r 部グラフ** (r -partite graph) であるという。このとき、 G は **r 分割** (r -partition) (V_1, V_2, \dots, V_r) をもつという。また、 V_i をそれぞれ**部集合** (partition) という。 i 番目の部集合が n_i 個の頂点を含み、異なる部集合の任意の2つの頂点がちょうど1本の辺で結ばれている r 部グラフのことを**完全 r 部グラフ** (complete r -partite graph) といい、 K_{n_1, \dots, n_r} で表す。



図 3: 完全グラフ (左) と完全 3 部グラフ (右)

グラフ W が**歩道** (walk) であるとは、 $V(W) = \{x_0, x_1, \dots, x_l\}$, $E(W) = \{e_1, e_2, \dots, e_l\}$ で、 $\psi_W(e_i) = x_{i-1}x_i$ ($0 < i \leq l$) であるときをいう。このとき、 W は**長さ** (length) l であるといい、 W を $x_0x_1 \dots x_l$ で表す。また、 x_0, x_l をそれぞれ**端点** (end vertex) といい、特に、 x_0 を**始点** (initial vertex), x_l を**終点** (terminal vertex) という。すべての頂点が異なる歩道を**パス** (path) といい、長さ l のパスを P_l で表す。始点と終点が同じで、それ以外のすべての頂点が異なる歩道を**サイクル** (cycle) といい、長さ l のサイクルを C_l で表す。

グラフが**連結** (connected) であるとは、任意の2つの頂点に対して、それらを結ぶパスが存在するときをいう。あるグラフに含まれる、極大で連結な部分グラフを、そのグラフの**成分** (component) という。

1.2 空間グラフと絡み目

\mathbb{R}^3 を3次元ユークリッド空間とする。グラフ G の \mathbb{R}^3 への埋め込みの像を G の**空間埋め込み** (spatial embedding) または**空間グラフ** (spatial graph) という。このとき、頂点は点、辺は端点に対応する点を結ぶ曲線であり、辺に対応する曲線は内部で交わらない。すべての辺が線分として埋め込まれているような空間埋め込みを**線形埋め込み** (linear embedding) という。

グラフ G の2つの空間埋め込み Γ_1, Γ_2 に対して、 Γ_1 を Γ_2 に写すような向きを保つ \mathbb{R}^3 の同相写像が存在するとき、 Γ_1 と Γ_2 は**同じ型** であるという。

グラフ G の各成分がサイクルのとき、 G の空間埋め込みを**絡み目** (link) という。ここで、 n 個の成分からなる絡み目を **n 成分絡み目** (n -components link) といい、特に、1成分絡み目を**結び目** (knot) という。絡み目 L が xy 平面に含まれる絡み目と同じ型のとき、 L は**自明** であるという。

絡み目 L が**分離可能** (splittable) であるとは、2次元球面 S^2 の $\mathbb{R}^3 - L$ への埋め込みで、 $\mathbb{R}^3 - S^2$ の各成分が L の成分を少なくとも1つ含むようなものが存在するときをいう。そのような S^2 が存在しないとき、 L は**非分離** (non-splittable) であるという。

2 絡み目内在グラフ

定義 2.1 グラフ G の任意の空間埋め込みが n 成分の非分離な絡み目を含むとき、 G は **n 絡み目内在** (intrinsically n -linked) であるという。さらに、グラフ G の任意の空間埋め込みが非自明な

結び目を含むとき, G は**結び目内在** (intrinsically knotted) であるという.

また, ある $n > 1$ で n 絡み目内在であるとき, 単に G は**絡み目内在** (intrinsically linked) であるという. 1983年に, Conway-Gordon [1] および Sachs [11] により, いくつかのグラフに関する絡み目内在性が示された. Conway-Gordon は K_6 と K_7 に関して定理 2.1 を証明した.

定理 2.1 (Conway-Gordon [1]) K_6 は 2 絡み目内在であり, K_7 は結び目内在である.

Sachs は $K_6, K_{3,3,1}$ を含むような 7 個のグラフに関する絡み目内在性を証明した. これらのグラフを**ペテルセン族** (Petersen family) という.

定理 2.2 (Sachs [11]) ペテルセン族のグラフは 2 絡み目内在である. さらに, ペテルセン族のグラフは 2 絡み目内在性に関して極小マイナーである.

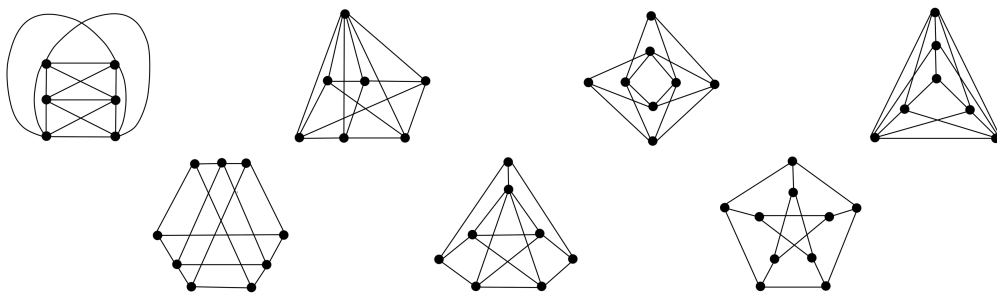


図 4: ペテルセン族

ペテルセン族に対して, Sachs の結果の逆を証明したのが Robertson-Seymour-Thomas [10] である. これにより, 2 絡み目内在性に関する極小マイナーはペテルセン族がすべてであることが示された.

定理 2.3 (Robertson-Seymour-Thomas [10]) グラフ G が 2 絡み目内在であることの必要十分条件は, G がマイナーとしてペテルセン族のグラフをもつことである.

3 絡み目内在性に関しては, 次のことが証明されている.

定理 2.4 (Hespen-Lalonde-Sharrow-Thomas [4]) $K_{3,3,3}$ は 3 絡み目内在ではない.

定理 2.5 (Flapan-Naimi-Pommersheim [3]) K_{10} は 3 絡み目内在であるが, K_9 は 3 絡み目内在ではない.

より一般に n 絡み目内在に対する研究も行われている.

定理 2.6 (O'Donnol [8]) $K_{2n+1,2n+1}, K_{2n,2n,1}$ は n 絡み目内在である. さらに, n 絡み目内在になるような最小の完全 2 部グラフは $K_{2n,2n}, K_{2n+1,2n}, K_{2n+1,2n+1}$ のいずれかである.

定理 2.7 (Drummond-Cole and O'Donnol [2]) $K_{\lfloor \frac{7}{2}n \rfloor}$ は n 絡み目内在である.

3 線形埋め込み

これまでに見てきた定理では、非自明とあるだけで、絡み目の型を特定することはできない。それは、各辺の埋め込み方をいくらでも複雑にできるからである。しかし、埋め込み方を線形埋め込みに制限すると、結び目の形をした辺が作られることはないので、より具体的な結果が得られる。

定理 3.1 (Huh-Jeon [5]) K_6 の任意の線形埋め込みはホップ絡み目をちょうど1つ含むか、または、ホップ絡み目ちょうど3つと三葉結び目ちょうど1つを含む。ただし、ホップ絡み目および三葉結び目は、図5のようなものである。

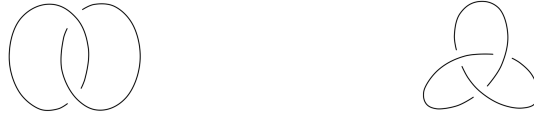


図 5: ホップ絡み目 (左) と三葉結び目 (右)

定理 3.2 (Ramírez Alfonsín [9]) K_7 の任意の線形埋め込みは三葉結び目を含む。

特に、 K_9 は3絡み目内在ではなかったが、線形埋め込みに制限するとそのような絡み目を含むことは興味深い。

定理 3.3 (Naimi-Pavelescu [6]) K_9 の任意の線形埋め込みは非分離な3成分絡み目を含む。

また、任意の型をもつ絡み目 L に対して、線形埋め込みが必ず L を含むような完全グラフの存在が証明されている。

定理 3.4 (Negami [7]) 任意の絡み目 L に対して、次のような自然数 $R_+(L)$ が存在する。すなわち、 $n \geq R_+(L)$ ならば、 K_n の任意の線形埋め込みは L を含む。

参考文献

- [1] J. H. Conway, C. McA. Gordon, “Knots and links in spatial graphs”, J. Graph Theory 7 (1983), 445–453.
- [2] G. C. Drummond-Cole, D. O’Donnol, “Intrinsically n-linked Complete Graphs”, Tokyo J. of Math. Volume 32, Number 1 (2009), 113–125.
- [3] E. Flapan, R. Naimi, J. Pommersheim, “Intrinsically triple linked complete graphs”, Topology and its Applications 115 (2001), 239–246.
- [4] J. Hespen, T. Lalonde, K. Sharrow, N. Thomas, “Graphs with (edge) disjoint links in every spatial embedding”, Preprint (1999).
- [5] Y. Huh, C. B. Jeon, “Knots and links in linear embedding of K_6 ”, J. Korean Math. Soc. 44. (2007), 661–671.
- [6] R. Naimi, E. Pavelescu, “Linear embeddings of K_9 are triple linked”, Preprint (2012).
- [7] S. Negami, “Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs”, Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991), 527–541.
- [8] D. O’Donnol, “Intrinsically n-linked complete bipartite graphs”, J. Knot Theory Ramifications 17 (2008), 133–139.
- [9] J. L. Ramírez Alfonsín, “Spatial graphs and oriented matroids: the trefoil”, Discrete and Computational Geometry 22 (1999), 149–158.
- [10] N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, “Sachs’ linkless embedding conjecture”, J. Combin. Theory Ser. B 64 (1995) 185–277.
- [11] H. Sachs, “On a spatial analogue of Kuratowski’s theorem on planar graphs - an open problem”, Graph theory (Lagow, 1981), 230–341, Lecture Notes in Math. 1018, Springer, Berlin, (1983).